Der Rechenunterricht

in der

Deutschen Volksschule

von

Dr. Berthold Hartmann.

2. Auflage.

Kesselringsche Hofbuchhandlung (E. v. Mayer)

Frankfurt a. M. —— Verlag —— Leipzig.

☞ Vom Königl. Sächsischen Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts wurden laut Generalverordnung vom 16. Februar 1893 nachstehende Schulbücher

zur Einführung empfohlen:

Die Rechenbücher

von Direktor Dr. B. Hartmann und Oberlehrer J. Ruhsam in Annaberg.

Ausgabe A in 6 Heften, für 6- bis 8stufige Schulen.
Ausgabe B in 4 Heften, für 2- bis 4stufige Schulen.

Ausgabe A:

1. Heft.	Die Zahlreihen 1 bis 10 und 1 bis 100.	(56 S.)	25 ₰
2. Heft.	Die Reihen der Grundzahlen.	(56 S.)	25 ₰
3. Heft.	Die Zahlreihe 1 bis 1000.	(64 S.)	25 ₰
4. Heft.	Die unendliche Zahlreihe. Mehrfach benannte Zahlen.	(60 S.)	25 ₰
5. Heft.	Dezimal- und Bruchzahlen.	(64 S.)	25 ₰
6. Heft.	Das bürgerliche Rechnen.	(96 S.)	40 ₰

Ausgabe B:

1. Heft.	Die Zahlreihe 1 bis 10. Die Zahlreihe 1 bis 100.	(48 S.)	25 ₰
2. Heft.	Die Reihen der Grundzahlen. Die Zahlreihe 1 bis 1000.	(72 S.)	25 ₰
3. Heft.	Die unendliche Zahlreihe. Mehrfach benannte Zahlen. Dezimalzahlen.	(72 S.)	25 ₰
4. Heft.	Bruchzahlen. Bürgerliches Rechnen.	(72 S.)	25 ₰

Die erste Auflage des vorliegenden Rechenbuches erschien 1885, die zweite Auflage 1889, die dritte Auflage 1890. Alsdann folgten rasch aufeinander die vierte bis achte Auflage. Wenn ein neues Rechenwerk in dieser Weise Anklang findet, so darf wohl angenommen werden, daß es den hohen Anforderungen, welche die heutige Pädagogik an ein solches stellt, mehr als die vor ihm benutzten Rechenwerke entspricht. Die vielen Neueinführungen verdankt dasselbe einer bis jetzt einzig in ihrer Art dastehenden Stoffauswahl und Stoffverteilung. Ohne das bewährte Alte preiszugeben, haben es die Herren Verfasser vortrefflich verstanden, die berechtigten Forderungen der neueren Pädagogik praktisch zu verwerten. Die Erfahrung aber hat gelehrt, daß auf diesem Wege nicht nur Rechenverständnis und Rechenfertigkeit, sondern auch „froher Fleiß" bei den Kindern mit Sicherheit erzielt werden.

Der billige Preis bei vorzüglicher Ausstattung hat zu der großen und schnellen Verbreitung der Rechenhefte viel mit beigetragen. — Zu sämtlichen Heften sind Auflösungen mit zahlreichen Übungen, sachlichen und methodischen Bemerkungen zum Rechenunterrichte überhaupt erschienen.

Einige Urteile:

Sächs. Schulzeitung. 1886. Nr. 46. Zittau: „Die behufs Ausarbeitung eines Rechenaufgabenbuches eingesetzte Kommission erklärte, von ihrem Vorhaben absehen zu wollen, da die neue Bearbeitung eines Rechenbuches von Dr. Hartmann und Oberlehrer Ruhsam in Annaberg nach den gleichen Grundsätzen verfahre." (Amtliche Hauptkonferenz.)

Stoffpläne für den Schulinspektionsbezirk Auerbach i. V. (Sachsen.) IV. Die notwendigsten Lehrmittel. a) Für die Schüler: Hartmann-Ruhsam, Rechenbuch für Stadt- und Landschulen. b) Für die Lehrer: Hartmann, Der Rechenunterricht.

Lehrplan für die einfachen Volksschulen des Königreichs Sachsen. Herausgegeben von Geh. Schulrat Kockel. S. 72. Ausgedehnte Verbreitung haben in den letzten Jahren nachgenannte neuere Aufgabensammlungen gefunden: Dr. Hartmann und Ruhsam, Rechenbuch für Stadt- und Landschulen.

Meißner Schulbote. 1890. Nr. 2. Urteile über Hartmann-Ruhsams Rechenbücher. (Bezirkslehrerverein Meißen, Versammlung am 17. Mai cur.): „Die Versammlung erkennt in den Hartmannschen Rechenbüchern einen bedeutenden methodischen Fortschritt und empfiehlt dieselben bei Einführung neuer Rechenhefte." Konferenz Meißen-Land (Versammlung am 21. Mai c.) faßte einen dem vorstehenden gleichlautenden Beschluß.

Deutsche Schulpraxis. (Leipzig.) 1887. Nr. 9. . . Wir bewundern den Fleiß und das Geschick, mit dem die zusammenhängende Reihe von Aufgaben in den einzelnen Abschnitten . . . aufgestellt ist. Eine praktischere Einführung in das wirkliche Leben können wir uns nicht denken . . . Wir wünschen den Heften im Interesse unserer Schulen das fleißigste Studium und die weiteste Verbreitung, dann müssen sicheres Können und froher Fleiß die Früchte des Rechenunterrichts werden.

Päd. Studien. (Rein.) 1889. S. 247. Die Hartmann-Ruhsamschen Rechenbücher sind mit großer Sorgfalt und Sachkenntnis abgefaßt und verraten überall den selbständigen Rechenmethodiker. Darum können sie warm empfohlen werden. (Grabs.)

Thüringische Schulzeitung. 1888. Nr. 6. Nach klar ausgeprägten Grundsätzen zusammengestellt. Das Bestreben, anschaulich vorzugehen, fällt auf jeder Seite in die Augen. Das Eingehen auf die Sachen geschieht so gründlich, daß man sich fast mit Geduld wappnen muß, um alle Vornahmen bis zu Ende zu verfolgen. Die Hefte können wir aufrichtig empfehlen.

Schulblatt für Thüringen und Franken. 1888. Nr. 47. Das vorstehende Rechenbuch müssen wir unserer Ansicht nach als das beste aller uns bekannten Schul-Rechenbücher bezeichnen. „Anschauung, Verständnis, Uebung!" Nach dieser pädagogischen Regel ist der ganze Stoff bearbeitet. Auch die äußere Ausstattung des Buches ist schön. Wir können dasselbe nur empfehlen. . . .

Päd. Blätter. (Kehr-Schöppa.) 1889. S. 503. Die genannten Rechenbücher gehören zu den besten ihrer Art: sie berücksichtigen nicht nur, was der Schüler können muß, sondern auch, was er wissen muß; es ist mehr eine Verbindung von Stoff und Methode, und damit haben sie gegen viele ihresgleichen einen Vorzug. . . .

Päd. Reform. 1887. Nr. 47. Diese Rechenhefte können mit andern weitverbreiteten Rechenwerken getrost in die Schranken treten.

Der

Rechenunterricht

in der

deutschen Volksschule

vom Standpunkte des erziehenden Unterrichts.

Ein methodisches Handbuch für Lehrer und Seminaristen, zugleich eine Anleitung zum Gebrauche des Hartmann-Ruhsamschen Rechenbuchs für deutsche Stadt- und Landschulen.

Von

Dr. Berthold Hartmann,
Direktor der städtischen Schulen zu Annaberg in Sachsen.

Zweite, sorgfältig durchgesehene und erweiterte Auflage.

Leipzig, Seeburgstraße 38. Frankfurt a/M., Opernplatz 10.
Kesselringsche Hofbuchhandlung (E. v. Mayer)
Verlag.
1893.

Druck der Königl. Universitätsdruckerei von H. Stürtz in Würzburg.

Meinen getreuen Mitarbeitern

an der Bürgerschule zu Annaberg

am Tage

des fünfzigjährigen Bestehens

derselben.

Vorwort zur ersten Auflage.

Das Buch, welches hiermit dem Wohlwollen der vaterländischen Lehrerschaft empfohlen wird, zerfällt in einen allgemeinen und einen besondern Teil. Jener behandelt die wichtigsten Fragen aus der Theorie des Rechenunterrichts in eingehender, einheitlicher und übersichtlicher Weise. Dieser zeigt, wie sich die Praxis des Volksschulrechnens in größern und kleinern Schulen zu gestalten hat, wenn der Grundforderung: „Unterrichte naturgemäß!“ entsprochen werden soll. Dabei haben nicht nur alle bemerkenswerteren Erscheinungen auf dem Gebiete der Rechenlitteratur sorgfältige Beachtung gefunden, sondern es sind auch diejenigen allgemein pädagogischen Forderungen der neuern Zeit, welche einen wirklichen Fortschritt in sich schließen, gebührend berücksichtigt worden. So hat, um nur das eine zu erwähnen, der Konzentrationsgedanke, dem die Zukunft auch des Volksschulunterrichts entschieden gehören wird, eine eingehende Würdigung erfahren. Die nächste Folge davon war eine von andern Rechenwerken vielfach abweichende Behandlung der Sachgebiete des Rechnens und eine stärkere Betonung der Verbindung des letztern mit den sachunterrichtlichen Fächern. Doch ist deshalb die formale Seite des Rechnens, wie der Kundige bald herausfinden wird, durchaus nicht vernachlässigt worden. Im Gegenteil, die Konzentration beeinflußte auch diese in der vorteilhaftesten Weise: die mündlichen und schriftlichen Darstellungsformen hieß sie auf sicherer psychologischer Grundlage naturgemäß aufbauen, und überall forderte sie geschmackvolle Einfachheit, unbeschadet der mathematischen Korrektheit. Wenn nun noch hinzugefügt werden kann, daß alles, was hier dargeboten wird, die Frucht vieljähriger praktischer Versuche und Erfahrungen in Verbindung mit sorgfältigen theoretischen Erwägungen ist, ein Buch, das in Wahrheit aus der Schule hervorging; so liegt schließlich der Wunsch nahe, daß kompetente Beurteiler der Arbeit Existenzberechtigung zuerkennen möchten! Und so stellen wir denn ebenso wie vordem das „Rechenbuch“ auch diese Gabe hoffnungsfreudig in den Dienst der deutschen Volksschule. Möge sie dazu beitragen, daß der Rechenunterricht in derselben mehr und mehr das leiste, was er leisten soll: Hebung der geistigen Thätigkeit des Zöglings überhaupt, Selbstständigkeit und Sicherheit in den Rechnungen des bürgerlichen Lebens insbesondere. Möge sie vor allem aber auch mit dazu verhelfen, daß solches erreicht werde durch „frohen Fleiß!“ —

Annaberg, Ostern 1888.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die neue Auflage kündigt sich als eine „sorgfältig durchgesehene und erweiterte“ an. Eine Vergleichung mit der alten wird überzeugen, daß damit nicht zuviel gesagt ist. Schon die äußere Ausstattung läßt bemerkenswerte Fortschritte erkennen. Auch hat das Buch an Umfang erheblich zugenommen. Die Hauptsache aber ist, daß sein Inhalt nach drei Seiten hin wesentlich erweitert und vertieft worden ist. Zunächst in dem geschichtlichen Abrisse. Derselbe giebt jetzt ein vollständiges, dabei übersichtliches und einheitliches Bild der Entwickelung des Rechnens und des Rechenunterrichts. Sodann in der Berücksichtigung der neuen und neuesten Bestrebungen auf dem Gebiete des Rechenunterrichts. Dieselbe ist eine so umfassende, wie sie in gleicher oder auch nur annähernd gleicher Weise in keinem andern Rechenwerke der Gegenwart gefunden wird. Endlich in der Aufstellung großer Gesichtspunkte. Letztere sind so gewählt, daß sie dem Lehrer zur vollen Herrschaft über den Lehrstoff mit allen seinen zahlreichen Einzelfällen verhelfen.

Als wertvolle neue Beigaben erscheinen noch die Litteraturnachweise und das alphabetische Sach- und Namenverzeichnis. Die erstern berücksichtigen alle bedeutenden Erscheinungen der Rechenlitteratur, letzteres dient der sichern und raschen Auffindung der Hauptpunkte des Rechnens und des Rechenunterrichts.

Unser „Handbuch“ ist bald nach seinem Erscheinen von sachkundiger Seite als die „bedeutendste Erscheinung“ in der Rechenlitteratur der Neuzeit bezeichnet worden. Von anderer, ebenfalls sachkundiger Seite ist seine „Sonderstellung“ hervorgehoben worden. Wir sind für beide Bemerkungen dankbar. Insbesondere auch für die zweite. Denn sie wollte besagen, daß trotz der zahlreichen methodischen Handbücher für den Rechenunterricht ein Buch, wie das unsere, noch nicht vorhanden war. Das aber spricht nicht nur für seine Daseinsberechtigung, sondern auch für seine Brauchbarkeit neben jedem andern Rechenwerke.

In Verbindung mit unserm Rechenbuche, welches jetzt in neunter Auflage erschienen ist, und mit den Lehrerheften, welche sich eng an die Einzelfälle des Rechenbuchs anschließen, bildet das Handbuch einen Lehrbehelf, welcher, gehörig durchdrungen und richtig verwertet, den Erfolg verbürgt, den wir allen deutschen Volksschulen von Herzen wünschen: Sicherheit, Fertigkeit und Selbständigkeit in den Rechnungen des bürgerlichen Lebens, Hebung der geistigen Thätigkeit überhaupt und „frohen Fleiß.“

Annaberg, Ende August 1893.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Allgemeiner Teil.

Erster Abschnitt. Aus der Geschichte des Rechenunterrichts.

Zweiter Abschnitt. Über den heutigen Stand des Rechenunterrichts.

Dritter Abschnitt. Der Lehrplan für den Rechenunterricht.

Seite

Vierter Abschnitt. Das Lehrverfahren im Rechenunterricht.

Besonderer Teil.

Fünfter Abschnitt. Die Darstellungsformen im Rechnen.

[1]) Die erste Auflage enthielt noch: Sechster Abschnitt. Ausführungsbestimmungen. Stunden- und Arbeitspläne. In den Rechenstunden. Einsicht, Einübung und Anwendung. Wiederholungen und Prüfungen. Verlauf der Rechenstunden. Ursachen der Mißerfolge im Rechenunterrichte.

Der Inhalt dieses Abschnittes ist aus logischen Gründen zum Teil in die andern Abschnitte des Handbuchs, zumeist aber in die Lehrerhefte verwiesen worden.

Alphabetisches Sach- und Namenverzeichnis.

A.

B.

C.

Allgemeiner Teil.

Erster Abschnitt.

Aus der Geschichte des Rechenunterrichts.

§ 1.

Das Rechnen vor der Einführung der indisch-arabischen Positionsschreibweise.

Litteratur: Adam, W. Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts. Quedlinburg, Vieweg 1892. Bartholomäi, Fr. Zehn Vorlesungen über Philosophie der Mathematik. Jena 1860. Friedlein, G. Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen 1869. Günther, Sigmund. Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis 1525. (In Kehrbach: Monumenta Germaniae Paedagogica, Bd. III.) Berlin 1887. Hankel, Hermann. Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874. Jänicke, E. Die Geschichte des Rechenunterrichts. (In Kehr: Geschichte der Methodik des deutschen Volksschulunterrichts. Bd. 1.) 2. Aufl. Gotha 1888. Kuckuck (jetzt Kallius genannt), A. Die Rechenkunst im 16. Jahrhundert. (In der Festschrift zur dritten Säcularfeier des Gymnasiums zum grauen Kloster.) Berlin 1874. Raumer, Karl v. Geschichte der Pädagogik. Dritter Teil. 5. Aufl. Gütersloh 1880. Sterner, Matthäus. Prinzipielle Darstellung des Rechenunterrichts auf historischer Grundlage. I. Teil. Geschichte der Rechenkunst. München und Leipzig 1891. Stoy, Heinrich. Zur Geschichte des Rechenunterrichts. Erster Teil. Inaugural-Dissertation. Jena 1876. Treutlein, F. Geschichte unserer Zahlzeichen und Entwickelung der Ansichten über dieselben. (Im Programm des Gymnasiums zu Karlsruhe.) Karlsruhe 1875. Unger, Friedrich. Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart nach den Originalquellen bearbeitet. Leipzig 1888. Weißenborn, H. Die Entwickelung des Zifferrechnens. (Im Programm des Gymnasiums zu Eisenach.) Eisenach 1877. Wildermuth, K. Rechnen. (In Schmid: Encyklopädie des gesammten Erziehungs- und Unterrichtswesens. Sechster Band.) Gotha 1867.

Das Rechnen und der Rechenunterricht der deutschen Volksschule der Gegenwart, mit denen sich das vorliegende Buch beschäftigt, erscheinen als ein Fertiges. Deshalb wäre es wohl zulässig gewesen, dieselben gleich von vorn herein als ein solches zu behandeln. Wir zogen indessen doch vor, es nicht zu thun. Denn dieses Fertige ist ein Gewordenes, das Ergebnis einer mehrtausendjährigen Entwickelung. Wer dasselbe recht begreifen und würdigen will, der muß wissen, wie es entstand. Und so tritt namentlich an den Rechenlehrer die Aufgabe heran, die Geschichte seines Unterrichtsgegenstandes wenigstens in ihren Hauptzügen zu studieren.

Die Geschichte des Rechnens weist bis auf die Anfänge der Entwickelungsgeschichte der Menschheit zurück. Die Geschichte des deutschen Volksschulrechenunterrichtes fängt mit dem Reformationszeitalter an. Das Rechnen mußte anheben, sobald Menschen mit Menschen verkehrten.[1]) Der deutsche Volksschulrechenunterricht hat die deutsche Volksschule, das Kind der deutschen Reformation, zur Voraussetzung. Hiernach zerfällt auch die Geschichte unseres Gegenstandes in zwei große Abschnitte: einen ältern, welcher von der Entwickelung des Rechnens und der Rechenkunst handelt und einen neuern, welcher sich mit der Entwickelung des Rechenunterrichts, insbesondere des deutschen Volksschulrechenunterrichts, beschäftigt.

Jedes Rechnen setzt den Besitz einer geordneten Reihe von Zahlvorstellungen voraus. Der Rechenverkehr mit andern aber fordert neben dem Besitze derselben Zahlvorstellungsreihe auch noch die Übereinstimmung in gewissen mündlichen und schriftlichen Darstellungen der Zahlen und Zahlverknüpfungen. Dieses ist der Weg, den der einzelne Mensch noch heute zurücklegen muß, wenn er ein praktischer Rechner werden will. Es ist zugleich der Weg, den die ganze Menschheit im Laufe der Jahrtausende zurückgelegt hat.

Die Menschheit, als Ganzes genommen, setzt sich zusammen aus einzelnen Völkern und Völkergruppen, deren leibliche und geistige Entwickelung oft große Verschiedenheiten zeigt. In ihrer geistigen Entwickelung namentlich halten die Völker nicht gleichen Schritt. Zunächst fällt auf, daß die Völker des Morgenlandes denen des Abendlandes lange Zeit vorangehen, darauf von diesen eingeholt und schließlich weit zurückgelassen werden. Weiter bemerkt man, daß trotz der gleichen Ziele, denen die einzelnen Entwickelungsreihen anfangs zustreben, doch jede derselben in besonderer Form, teilweise auch mit anderm Inhalte auftritt. Wenn es sich dann aber ereignet, daß gleiche Entwickelungsstufen morgen- und abendländischer Wissenschaft aufeinandertreffen, so ist fast immer eine zu weitern Fortschritten anregende Verschmelzung beider die Folge. Die Geschichte der Wissenschaften kennt eine ganze Reihe solcher Verschmelzungen. Eine der bemerkenswertesten darunter aber ist die, mit welcher wir es hier zu thun haben, die Verschmelzung der morgen- und abendländischen Rechenkunst.[2])

Es kann nicht unsere Aufgabe sein, der Entwickelung des Rechnens bei allen Kulturvölkern der alten Welt nachzugehen. Denn wir wollen keine vollständige Geschichte des Rechnens schreiben. Für unsere Zwecke reicht schon eine gedrängte Darstellung der Entwickelung des Rechnens bei den Griechen und Römern und weiterhin im christlichen Abendlande

1) Bartholomäi a. a. O. S. 1 ff. Sterner a. a. O. S. 2 f. Stoy a. a. O. S. 7 f.

2) Wildermuth a. a. O. S. 720 f. Adam a. a. O. S. 79 ff.

bis zu dem Zeitpunkte, wo das indisch-arabische Positionssystem bekannt wurde, aus.

Als notwendige Voraussetzung des Rechnens überhaupt haben wir den Besitz einer geordneten Reihe von Zahlvorstellungen bezeichnet. Wie sich diese Zahlvorstellungsreihe beim Individuum der Gegenwart entwickelt, davon später. Hier nur das eine. Die Menschheit der Gegenwart verfügt nicht allein über diese Reihe, sondern auch über alle sonstigen Vorbedingungen des Rechnens. Das beeinflußt die bezügliche Entwickelung des Individuums aber ganz wesentlich. Und deshalb darf man auch nicht von der Entwickelung des heutigen Individuums ohne weiteres auf die Entwickelung der ganzen Menschheit schließen wollen. Ob es überhaupt jemals gelingen wird, den Parallelismus zwischen der geistigen Entwickelung des Individuums und der ganzen Menschheit allgemein zu beweisen, muß zur Zeit noch dahingestellt bleiben. Solange derselbe aber nicht bewiesen ist, können die Angaben über die vorgeschichtliche Entwickelung der Zahlvorstellungen in der Menschheit auch nicht viel mehr als Vermutungen sein[3]). Dieses umsomehr, als auch die Schlüsse, welche man auf Grund von Berichten über gegenwärtig noch auf niedriger Bildungsstufe stehende Völkerschaften gemacht hat, und auf welche man sich gern beruft, auch nur mit großer Vorsicht aufzunehmen sind. Kommt es dabei doch nicht allein auf die formale Richtigkeit der Schlüsse, sondern auch auf die Genauigkeit und Zuverlässigkeit des Beobachtungsmaterials an. Wer aber wüßte nicht, wie man sich schon in der Beurteilung des Geisteslebens einzelner Stämme des eigenen Volkes täuschen kann! Und so glauben wir denn ein weiteres Eingehen auf die Entwickelung der Zahlvorstellungen in der Menschheit überhaupt unterlassen zu sollen. Dieses aber umsomehr, als diejenigen, welche sich dafür interessieren, in der oben aufgeführten Litteratur, z. B. bei Bartholomäi, Hankel und Stoy, weitere wünschenswerte Aufschlüsse finden.

Ist hiernach zur Zeit noch nicht genügend klargestellt, wie sich die Zahlvorstellungen in der Menschheit nach und nach entwickelt haben, so ändert dieses doch an der Thatsache, daß eine solche Entwickelung stattfand und daß sie der Entwickelung der übrigen Bedingungen des Rechnens vorausging, nichts. Zu diesen übrigen Bedingungen aber gehören besonders die Zahlwörter und Zahlzeichen. Erst als die Zahlvorstellungen da waren, stellte sich das Bedürfnis ein, Zahlwörter und Zahlzeichen zu bilden. „Nachdem man dahin gelangt war, in einer großen Anzahl gleichartiger Individuen oder Gegenstände jedes einzelne als solches hervorzuheben, mußte auch sofort das Bedürfnis sich geltend machen, die Anzahl dieser benannten Einheiten zu fixieren.“[4])

Mehr noch als die Verwertung zu eigenem Bedarfe drängte dazu der Verkehr mit anderen. Ohr und Auge aber waren es, welche dabei gebraucht wurden. Deshalb auch das Verlangen nach Hörbarem und Sicht-

3) Stoy a. a. O. S. 9.
4) Stoy a. a. O. S. 13.

barem. Ob die Zahlwörter oder Zahlzeichen zuerst gebildet wurden, ist noch keineswegs sicher, wenn auch gewöhnlich angenommen wird, daß die Zahlwörter früher als die Zahlzeichen da waren.[5]) Aber darauf kommt schließlich auch nicht viel an. Viel wichtiger ist, daß sich zwischen ihnen und den Zahlvorstellungen eine Wechselwirkung entwickelte, welche zu immer weiteren Bildungen drängte. Denn mit der fortschreitenden Kultur mehrten sich die Fälle, in denen man sicherer Zahlen bedurfte. „Neben der auch unter den günstigsten Umständen vorhandenen Unsicherheit des Gedächtnisses, welche bei der den Zahlbegriffen eigentümlichen Isoliertheit von andern Hilfsvorstellungen sich noch besonders geltend machen muß, ist es ein tiefbegründetes ethisches Bedürfnis, künftigen Streit unmöglich zu machen; ein solcher ist aber gerade in den Fällen, wo Zahlen mit in Betracht kommen, heftiger und hartnäckiger, als sonst".[6])

Zur Bildung der ersten Zahlzeichen wurden allem Anscheine nach bei den meisten, wenn nicht allen Völkern Striche verwendet. Besonders deutlich tritt dieser Brauch in den Zahlzeichen der Römer hervor. Hier findet man senkrechte und schiefe Striche in mancherlei Zusammenstellungen (Gruppen). Diese Zeichen sind jedenfalls älter als die Buchstabenschrift. Buchstaben als Zahlzeichen würden also auf jüngere Bildungen deuten. Merkwürdig ist in dieser Beziehung die Verwendung der Buchstabenreihe des Alphabets als Zahlzeichen bei den Griechen seit dem 5. Jahrhundert v. Chr.[7])

Um zur vollen Herrschaft über die Zahlvorstellungen zu gelangen, um dieselben mit Leichtigkeit zu gebrauchen, dazu reichten die Zahlzeichen und Zahlwörter aber keineswegs aus. Und so trat denn schon sehr früh das Bedürfnis, alle Zahlvorstellungen in einer geordneten Reihe mit leicht unterscheidbaren Gruppen zu besitzen, hervor. Die darauf gerichteten Bemühungen führten zu den Zahlsystemen. Das jetzt herrschende Zahlsystem ist das Zehnersystem. Das älteste Zahlsystem ist dasselbe aber nicht. Als solches dürfte vielmehr das Fünfersystem zu gelten haben, wovon deutlich Spuren noch in den römischen Zahlzeichen (in den Halbstufen V = 5, L = 50, D = 500) vorhanden sind.[8]) Erst als die Nötigung vorlag, größere Zahlen zu beherrschen, ging man zum Zehnersysteme über. Die Grundlage desselben bildete offenbar die Anzahl der Finger. Neben Fünfer- und Zehnersystem mag es allerdings noch andere Systeme gegeben haben, wie z. B. das Zwanzigersystem (im Anschlusse an die Zahl der Glieder an Händen und Füßen), das Zwölfer- und Sechzehnersystem, wovon sich Spuren in den Maßen mehrerer Völker zeigen u. dgl. m. Schließlich gelangte aber das Zehnersystem zur Alleinherrschaft.

Mit der Ausbildung des Zehnersystems gingen die Bemühungen, die Zahlen demselben entsprechend darzustellen, Hand in Hand. Das ge-

---

5) Hankel a. a. O. S. 7 f., 31 f. Stoy a. a. O. S. 13 f.
6) Stoy a. a. O. S. 15.
7) Adam a. a. O. S. 2 f., 46 ff. Sterner a. a. O. S. 50 f.
8) Sterner a. a. O. S. 6 f. Stoy a. a. O. S. 20.

lang der Sprache verhältnismäßig bald und gut. Denn schon in den Zahlwörtern der alten Kultursprachen tritt die dezimale Gliederung der Zahlreihe deutlich hervor. Viel, viel schwerer hielt es, das Zehnersystem in die Zahlschrift einzuführen.

„Bei ihr kommt das Bewußtsein des in den Zahlwörtern herrschenden Dezimalsystems nur langsam zum Durchbruche, und man begegnet hier einer der merkwürdigsten Erscheinungen in der Entwickelung des menschlichen Geistes. Ein endloses Abmühen langer Jahrhunderte, an welchem die ersten Geister des Altertums und des Mittelalters Anteil haben, war nötig, um endlich eine immer und immer höhere Stufe in der schriftlichen Darstellung zu erreichen: man nähert sich unsrer gegenwärtigen, überhaupt wohl vollkommensten, der Positionsschreibweise soweit, daß der letzte Schritt gar nicht ausbleiben konnte, — da wird durch eine wunderbare Verkettung der geschichtlichen Ereignisse der Abschluß dieser Entwickelung von einer fremden Kulturquelle herbeigeführt."[9])

Welchen Verlauf diese höchst interessante Entwickelung der Zahlschrift unter der Herrschaft des Zehnersystems im Abendlande gehabt hat, darüber nun folgendes.

Als die Griechen im 5. Jahrhundert v. Chr. aus noch unbekannten Gründen ihre ursprüngliche einfache schriftliche Darstellungsweise der Zahlen aufgaben und die Buchstabenreihe des Alphabets als Zahlen verwendeten, wurde die Einwirkung des Zehnersystems auf ihre Zahlenschrift mit allen Vorteilen, welche sie im Gefolge hatte, keineswegs begünstigt.[10]) Denn zu den Zahlen bis 1000 brauchten sie allein schon 28 Zeichen gegenüber den 7 Zeichen der Römer. Außer den 24 Buchstaben des Alphabets verwendeten sie noch 3 besondere Zeichen (für 6, 90, 900), und von 1000 ab setzten sie unter jeden Buchstaben einen senkrechten Strich.[11]) Das erschwerte schon die Darstellung und Auffassung der Zahlen an sich in hohem Grade, mehr noch aber die Ausbildung eines leicht zu handhabenden Rechenmechanismus. Man könnte vielleicht meinen, die Darstellung z. B. der Hunderte durch einen einzigen Buchstaben zeichne sich durch Kürze aus und sei deshalb recht praktisch. Aber gerade das Gegenteil ist der Fall. Denn wenn wir jetzt rechnen: $300 + 500 = 800$, so führen wir diese Aufgabe, durch die Schreibweise unterstützt, sofort auf $3 + 5 = 8$ zurück, machen bei jeder Zahl also von zwei Teilvorstellungen Gebrauch, bei 300 von drei und hundert u. s. f. Mit griechischen Zahlzeichen hingegen geschrieben, heißt dieselbe Aufgabe $\tau + \varphi = \omega$, während die entsprechende Eineraufgabe $\gamma + \varepsilon = \eta$ ist. Da sieht man doch sofort: diese Schreibweise nimmt auf den Zusammenhang der beiden Aufgaben keinerlei Bezug, gewährt also auch keine der unsrigen entsprechende Erleichterung. Die Griechen hatten zufolge ihrer Schreibweise mit der ungeteilten dreihundert u. s. f. zu operieren. Und so blieb ihre

9) Stoy a. a. O. S. 22.
10) Hankel a. a. O. S. 34. Dagegen Friedlein a. a. O. S. 9.
11) Adam a. a. O. S. 46 f.

Zahlschrift bis zuletzt eine sehr schwerfällige, der Fortentwickelung in unserm Sinne schlechterdings unzugängliche.[12])

Anders war es bei den Römern. Diese hatten ihre einfachen Zahlzeichen beibehalten und mit ihnen die uns bekannte Zahlschrift ausgebildet. Dieselbe zeigt an und für sich zwar auch nichts, was auf eine Einwirkung des Zehnersystems hindeutete. Aber schon der Umstand, daß in der römischen Zahlschrift die Zahlwörter einen vollkommen entsprechenden, höchst anschaulichen Ausdruck finden, verleiht ihr hohen Wert. So mag es denn gekommen sein, daß die Römer sie bis zuletzt nicht aufgaben und daß selbst im spätern Mittelalter, als sich die Einwirkungen des Zehnersystems mehr und mehr geltend machten, das Abendland noch immer an ihr festhielt. Man war damals allen Ernstes auf dem besten Wege, mit Hilfe der römischen Ziffern dasselbe zu erreichen, was bald darauf im Gewande der indisch-arabischen Zahlzeichen von auswärts eingeführt wurde.

Neben ihren Vorzügen zeigt die römische Zahlschrift freilich auch erhebliche Mängel. Wir nennen gleich den Hauptmangel: die Verwendung von mehr als einem Zeichen — und deshalb die Besetzung von mehr als einer Stelle — bei den Zahlen 1 bis 9 (mit alleiniger Ausnahme von 1 und 5). Hieraus allein schon erklärt sich die schließliche Verwerfung der römischen Ziffern, als man die Zahlschrift in volle Übereinstimmung mit dem Zehnersysteme brachte, d. h. als man zur reinen Stellungs- oder Positionsschreibweise überging. Sehen wir aber, unter Weglassung mancher Zwischenstufen, zu, wie sich die Positionsschreibweise unter Anwendung der römischen Ziffern entwickelte, und wie dieselbe kurz nach dem Jahre 1200 in der noch heute gebräuchlichen Positionsschreibweise (mit Hilfe der indisch-arabischen Ziffern) ihren Abschluß fand.[13])

Um die ganze Entwickelung zu verstehen, braucht man sich nur zu vergegenwärtigen, was damals für das Rechnen angestrebt wurde. Es handelte sich weder um die Ausbildung einer Wissenschaft, noch einer Kunst, sondern lediglich um die Herstellung eines „möglichst einfachen, d. h. möglichst leicht und zuverlässig ausführenden mechanischen, sämtliche Fälle umschließenden Schematismus.[14]) Da aber mußte sich bald zeigen, daß mit den römischen Ziffern für sich allein wenig oder nichts geleistet werden konnte. Auch mußte, weil die Kunst des Schreibens nur verhältnismäßig wenigen zu Gebote stand, der Versuch, mit einer rein schriftlichen (graphischen) Darstellung zum Ziele zu gelangen, zunächst als ein zweckloser erkannt werden. Und so kam man denn darauf, durch ein Recheninstrument (ein Rechenbrett), welches Abakus (= Staubbrett) genannt wurde,

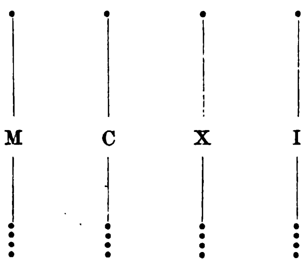
12) Sterner a. a. O. S. 52.

13) Eine eingehende Behandlung der Geschichte des Rechenunterrichts hätte hier auch der Darstellung der Zahlen mit Hilfe der Finger, der Digitalzahlen, zu gedenken, welche im Altertume und Mittelalter eine große Rolle spielte. Wer sich dafür interessiert, den verweisen wir auf Stoy a. a. O. S. 31 ff.

14) Stoy a. a. O S. 47 f.

allen vorhandenen Bedürfnissen zu entsprechen. Nach vier erhaltenen Abakus-Exemplaren zu urteilen, gebrauchten die Römer (und nach ihnen die abendländischen Christen bis zum 10. Jahrhundert) einen Linien-Abakus mit Knöpfen, welche an Stäben hin und her geschoben werden konnten. Neben demselben hatten sie noch einen Abakus mit freien Rechenpfennigen oder Steinchen. Die Darstellung der Zahlen blieb für beide Instrumente aber jedenfalls dieselbe: die Zahlen wurden in ihre Hauptstufen (Einer, Zehner, Hunderter ꝛc.) und Zwischenstufen (Halbe Zehner, Hunderter, Tausender ꝛc.) zerlegt, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.[15])

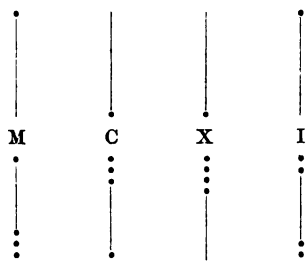
Fig. a.



Abakus vor dem Gebrauche.[16])

Erklärung: Die obern Knöpfe bedeuten (von links nach rechts) 5000, 500, 50, 5, die untern Knöpfe je 1000, 100, 10, 1.

Fig. b.



Abakus nach dem Gebrauche.

Erklärung: Darstellung der Zahl 1892, bestehend aus

1 M	=	1000
5 C + 3 C	=	800
5 X + 4 X	=	90
2 I	=	2

Der Linien-Abakus der Römer bedeutet gegenüber dem bisherigen Verfahren, die Zahlen darzustellen, einen sehr bemerkenswerten Fortschritt. Denn derselbe zeigt nicht nur eine Zusammenfassung und scharfe Sonderung der einzelnen Stufen des Zehnersystems, sondern auch eine Unterordnung der Zwischenstufen unter die Hauptstufen. Außerdem konnte mit demselben, was besonders wichtig ist, auf allen Stufen wie mit Einern gerechnet werden. Und so darf denn der Linien-Abakus die Bedeutung einer wichtigen Vorstufe des spätern Positionsrechnens jedenfalls für sich in Anspruch nehmen.[17])

15) Das Rechnen mit dem Abakus ist „Instrumentales Rechnen“. Vgl. Sterner a. a. O. S. 81.

16) Es handelt sich hier nur um ein Schema, nicht um eine Abbildung des Linien-Abakus.

17) Hier sei noch kurz bemerkt, daß die Ansichten, ob die Linien des Abakus mit freien Rechenpfennigen oder Steinchen während des Rechnens senkrechte oder wagerechte Lage erhielten, geteilte sind. Friedlein a. a. O. S. 23 und 48 ff. ist für die wagerechte, der bekannte Mathematiker Cantor, welcher sich um die Geschichte der Mathematik außerordentlich verdient gemacht hat, für die senkrechte Lage. Ebenso Stoy a. a. O. S. 49 ff. Innere Gründe sprechen dafür, daß letztere recht haben.

Dem Linien-Abakus folgte im 10. Jahrhundert der Spalten-Abakus, gewöhnlich Kolumnen-Abakus genannt. Dieser hing mit der fortschreitenden Entwickelung des Schriftwesens eng zusammen. Denn als die Zahl derer, welche die Kunst des Schreibens erlernten, mehr und mehr wuchs, fand man es schließlich bequemer, römische Ziffern anstatt der Rechenpfennige oder Steinchen auf die Linien zu setzen. Dabei mußte sich natürlich das Bedürfnis, die Ziffern auseinanderzuhalten, einstellen. Und so wurden denn sehr bald nicht mehr die Linien, sondern die Zwischenräume, die Spalten oder Kolumnen benutzt. Dieses Verfahren gestattete zugleich, sämtliche Einheiten einer Stufe in eine Spalte zu schreiben, also die hemmenden Halbstufen (Fünferstufen) auszuschalten.

Der Kolumnen-Abakus war wie folgt eingerichtet:[18])

$\overline{\mathrm{M}}\ \overline{\mathrm{I}}$	$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	$\overline{\mathrm{I}}$	C	X	I
			I	VIII	IX	II

Seine Einrichtung ist also eine höchst einfache und übersichtliche. Nach den Einern, Zehnern und Hunderten folgen die Einer-, Zehner-, Hunderttausende u. s. f. Sämtliche eingeschriebenen römischen Ziffern gehören der ersten Stufe an, ihr Stellenwert ist aber leicht zu erkennen. So liest man in unserm Falle sofort 1892. Der durch den Kolumnen-Abakus erreichte Fortschritt war hiernach ein sehr bedeutender. Stoy faßt denselben im Hinblick auf den Linien-Abakus in folgende drei Punkte zusammen:[19])

„1) Vollständige Beseitigung der fünffachen Zwischenstufen,
2) hiermit zum ersten Male vollkommen reine Darstellung des dezimalen Systems durch die Schrift, und endlich
3) die Einsicht in die Möglichkeit, mit neun Zahlzeichen sämtliche Zahlen darstellen zu können“.

In der That, es ist erstaunlich, wie nahe man mit dem Kolumnen-Abakus der heutigen Positionsschreibweise gekommen war. Denn was fehlte dieser noch? Nichts weiter als die Annahme einfacherer Zahlzeichen und die Beseitigung der Linien! Also etwas, das gegenüber dem bereits Gewonnenen doch nur sehr wenig besagen wollte. Und so war es wirklich nur noch eine Frage der Zeit, daß das Abendland selbständig zur vollkommensten Positionsschreibweise gelangte.

Denn zunächst mußte einleuchten, daß die Positionsschreibweise mit dem Kolumnen-Abakus, welche nur 9 Zeichen brauchte, nicht an die römischen Ziffern gebunden war. Dieses aber umsomehr, als diese Ziffern infolge ihrer Zusammensetzungen sich als recht unpraktische erwiesen. So erklären sich auch die Bemühungen, die ersten neun Buchstaben des griechischen Alphabets zu verwenden, ebenso das Bestreben des bedeutendsten

18) Nach Friedlein a. a. O. S. 51.
19) a. a. O. S. 58.

Abacisten, des trefflichen Gerbert (nachmaligen Papstes Sylvester II., gestorben 1003), neun besondere Zeichen, Charaktere genannt, einzuführen, sehr einfach.[20])

Weiterhin mußte aber auch der Wunsch, sich von dem Liniengerüste des Abakus möglichst frei zu machen, sehr nahe liegen. Infolgedessen kam man darauf, wo es anging, je drei Zahlordnungen (Stufen) ohne Zwischenlinien, bloß durch einen Bogen oben zusammengefaßt, zu schreiben. Und nur eines Zeichens hätte es noch bedurft, um alle Linien überflüssig zu machen, des Zeichens für — leere Stellen.

„Diesen letzten Schritt ohne fremde Beihilfe zu thun, dazu ließ ihnen (den Abendländern) der Gang der geschichtlichen Ereignisse keine Zeit. Im 11. und 12. Jahrhundert gelangten die ersten spärlichen Mitteilungen über die indische Arithmetik unter dem Namen Algorithmus von Spanien aus in die übrigen europäischen Kulturländer.[21]) Als dann an der Grenzscheide des 12. und 13. Jahrhunderts Leonardo Pisano (nach seiner Vaterstadt Pisa, auch Fibonacci, d. h. Sohn des Bonacci) mit seinem „Liber abbaci" den Zeitgenossen das vollkommene Positionssystem und zwar in meisterhafter Darstellung als die Frucht seiner langjährigen Reisen (in Afrika und den europäischen Mittelmeerländern) darbot, da war der Boden in allseitiger und durchgreifender Weise vorbereitet, sodaß die neue Schreibweise und die durch diese bedingte neue Rechenkunst verhältnismäßig leicht und schnell sich Eingang verschaffen konnten."[22])

„Die Zahlengraphik hatte mit diesem Zeitpunkte im Abendlande die Höhe erreicht, auf welcher wir noch heutigen Tages stehen. Und mit derselben bricht auch für die Rechenkunst eine neue Zeit an, die zweite und gewiß auch letzte Periode, die des Positionsrechnens. Verwirklicht und hervorgerufen durch die aus Indien uns gebrachte Zahlengraphik, vorbereitet jedoch und infolge einer langen Entwickelungsreihe ermöglicht, beginnt die neue Kunst der Zahldarstellung und des Rechnens von Europa aus ihren, erst auf der Verschmelzung indischer und europäischer Wissenschaft beruhenden, welterobernden Siegeslauf."[23])

Rückblick. Bis Ende des zwölften Jahrhunderts reichen die Bemühungen der Völker des Abendlandes, das sprachlich verhältnismäßig bald ausgebildete Zehnersystem schriftlich darzustellen. Solange man über die Positionsschreibweise noch nicht verfügte, konnte auch von einem Rechnen im heutigen Sinne nicht wohl die Rede sein. Deshalb ist die älteste und ältere Geschichte des Rechenunterrichts genau genommen nur eine Geschichte der Vorbedingungen desselben: der Entstehung und Entwickelung der Zahlvorstellungen, des Zählens und der Zahlzeichen (der mündlichen und schriftlichen Darstellung der Zahlvorstellungen), besonderer Hilfsmittel zum Rechnen und ganz zuletzt erst des Rechnens selbst.

20) Adam a. a. O. S. 92 f.
21) Adam a. a. O. S. 96 ff.
22) Stoy a. a. O. S. 59.
23) Ebenda S. 60.

§ 2.

Die Einführung und Ausbreitung des indisch-arabischen Positionsrechnens.

Litteratur: Adam, W. Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts. Quedlinburg, Vieweg 1892. Allgemeine deutsche Biographie. Deutsche Blätter für erziehenden Unterricht. Sechster Jahrgang. (Müller, J. Die ältesten deutschen Rechenbücher.) Langensalza 1879. Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern. Nürnberg 1730. Günther, S. Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525. (In Kehrbach: Monumenta Germaniae Paedagogica, Bd. III.) Berlin 1887. Jänicke, E. Geschichte des Rechenunterrichts. (In Kehr: Geschichte der Methodik des deutschen Volksschulunterrichts. Bd. 1.) 2. Aufl. Gotha 1888. Kästner, A. G. Geschichte der Mathematik. Göttingen 1796—1800. Kuckuck (jetzt Kallius), A. Die Rechenkunst im 16. Jahrhundert. Separatabdruck aus der Festschrift zur dritten Säcularfeier des Berlinischen Gymnasiums zum grauen Kloster. Berlin 1874. Luther, Dr. M. An die Radherrn aller stedte deutsches lands: das sie Christliche schulen auffrichten und hallten sollen. (Ausgabe von Israel, A.) Zschopau 1883. Müller, J. Quellenschriften und Geschichte des deutschsprachlichen Unterrichts bis zur Mitte des 16. Jahrhunderts. (In Kehr: Geschichte der Methodik &c. Bd. 4). Gotha 1882. Der Praktische Schulmann. 34. Jahrgang. (Zimmermann, O. Über das älteste in deutscher Sprache gedruckte Rechenbuch.) Leipzig 1885. Raumer, K. v. Geschichte der Pädagogik. Fünfte Auflage. Bd. 1. Gütersloh 1879. Schmid, K. A. Encyklopädie des gesammten Erziehungs- und Unterrichtswesens. Sechster Band. (Wildermuth, K. Rechnen.) Gotha 1867. Sterner, M. Prinzipielle Darstellung des Rechenunterrichts auf historischer Grundlage. 1. Teil. München und Leipzig 1891. Treutlein, P. Das Rechnen im 16. Jahrhundert. (In: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Erstes Heft.) Leipzig 1877. Unger, F. Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. Leipzig 1888. Unger, F. Geschichte der elementaren Arithmetik. (Im Programm der Realschule zu Leipzig-Reudnitz.) 1883.

Nach den Bemerkungen am Ende des vorigen Paragraphen liegt die Annahme nahe, es müsse sich die indisch-arabische Positionsarithmetik im 13. Jahrhunderte von Italien aus in schnellem Laufe über das ganze christliche Abendland verbreitet und dem Abacismus, d. i. dem Rechnen nach römischer Weise und mit römischen Ziffern, ein rasches Ende bereitet haben. Eine solche Annahme würde indessen den Thatsachen nicht entsprechen. Wenigstens nicht, was Deutschland anbelangt. Denn obwohl auch hier um das Jahr 1200 der Boden ähnlich wie in Italien vorbereitet war, so bedurfte es doch noch über 300 Jahre, um die neue Rechenkunst zur herrschenden zu machen.

Die Positionsarithmetik ist nach allem, was man heute über dieselbe weiß, eine Erfindung der Inder. Aus den Anfangsbuchstaben ihrer Zahlwörter bildeten dieselben schon sehr bald ihre Ziffern. Danach entwickelten sie den genialen Gedanken, jeder der neun Ziffern neben ihrem absoluten Werte noch einen Stellenwert zu geben. Im 3. Jahrhundert n. Chr. spätestens fügten sie den „Angelpunkt der ganzen Positionsarithmetik“, die Null hinzu. Nun hatten sie alles beisammen, was zur Aufstellung des dekadischen Positionssystems, der unentbehrlichen Grundlage der Positionsarithmetik, nötig war. Und so bildeten sie die letztere, abgesehen von den Dezimalzahlen, auch nahezu in dem Umfange des heutigen Schulrechnens aus.

Im 8. Jahrhundert n. Chr. wurde das indische Positionssystem von den Arabern des Ostens angenommen. Da letztere sich zu gleicher Zeit auch die Mathematik der Griechen aneigneten, so trugen sie in der Folge nicht wenig zur Fortentwickelung der Positionsarithmetik bei. Und so nennt man die letztere auch mit Recht jetzt die indisch-arabische.

Unter den Ostarabern überragt einer als Mathematiker alle andern: Muhammed ibn Musa mit dem Beinamen Alchwarizmi (nach seinem Geburtsorte Chwarizim, dem heutigen Chiwa). Gewöhnlich wird derselbe kurz Muhammed ben Musa genannt. Gelebt hat er um das Jahr 800 n. Chr. in Bagdad, zuletzt am Hofe des Khalifen Al Mamum (813—833). Seine beiden Lehrbücher, von denen das eine die Algebra,[1] das andere die Arithmetik[2]) behandelte, standen in so hohem Ansehen, daß sie die Entwickelung der Mathematik mehrere Jahrhunderte hindurch beherrschten. Auf Muhammed ben Musa ist auch der Name Algorithmus oder Algorismus, womit man anfangs nur die indisch-arabische Positionsarithmetik, später aber fast jeden andern Rechenmechanismus bezeichnete, zurückzuführen. Denn dieser Name ist nichts weiter als eine Latinisierung des Beinamens Alchwarizmi.[3]

Noch im siebenten Jahrhunderte eroberten die Araber Nordafrika und bald darauf einen großen Teil von Spanien. Hier gründeten sie jenes wunderbare Reich, welches fast 300 Jahre hindurch den Ruhm, die erste Pflanzstätte der Künste und Wissenschaften in Europa zu sein, für sich in Anspruch nehmen durfte. In demselben gab es zahlreiche Schulen, darunter allein siebzehn Hochschulen. Der Ruf der letztern aber war groß, daß nicht nur aus dem übrigen Spanien, sondern auch aus Frankreich, Italien und England Hörer kamen. Deutsche fanden sich seltener ein. Daß die für die Wissenschaft begeisterten Jünger die Träger der Geisteskultur der Westaraber oder Mauren für das damalige christliche Europa geworden sind, ist bekannt. Daß sie als wesentlichen Bestandteil der arabischen Gelehrsamkeit aber auch die indisch-arabische Rechenkunst mit zurückbrachten, ist hier besonders zu betonen. Die Westaraber hatten diese Kunst allerdings von ihren Brüdern, den Ostarabern, überkommen. Aber ihre Liebe zur Baukunst, ihr Interesse für die Astronomie, ihr immer reicher sich entfaltender Handel machte sie auch zu ganz vorzüglichen Pflegern derselben. Und so finden wir bei ihnen eine stattliche Reihe tüchtiger Mathematiker. Darunter den ausgezeichneten Abu

1) Dieses Buch führt den Titel: Aljebr w'almukâbala, woraus später die Abkürzung Algebra entstanden ist. Unter Algebra versteht man die Lehre von den Gleichungen. Die Bedeutung des ursprünglichen Buchtitels ist: al jebr (oder aldjchebr) = Versetzung (eines Gliedes der Gleichung auf die andere Seite); al mukâbala = Vereinigung (der gleichartigen Glieder auf beiden Seiten der Gleichung).

2) Damit ist die praktische Arithmetik oder das gewöhnliche Rechnen (Zifferrechnen) gemeint.

3) Dieses ist durch eine 1857 in der Bibliothek zu Cambridge aufgefundene Handschrift festgestellt worden.

Muhammed Dschabir ibn Afla aus Sevilla, gewöhnlich kurz Geber[4]) genannt. Nicht wenige der arabischen Gelehrten versuchten sich auch mit Erfolg als mathematische Schriftsteller. Andere erlangten großen Ruhm als Lehrer u. dgl. m. Alles zusammen aber bewirkte, daß im christlichen Abendlande die Mathematik der Westaraber lange Zeit vorbildlich blieb. Daher betrachteten es anfangs auch die bedeutendsten der damaligen christlichen Mathematiker als ihre vornehmste Aufgabe, die Schriften der ost- und westarabischen Mathematiker durch Übersetzung ins Lateinische zugänglich zu machen. Oder sie hielten es schon für verdienstlich, wenn sie das mitteilten, was sie sich auf arabischen Hochschulen angeeignet hatten. Weil es aber üblich war, die Arithmetik der Araber Algorithmus zu nennen,[5]) so wurden die Übersetzer und Verbreiter derselben im Gegensatze zu den Vertretern des Abacismus, den Abacisten, mit der Zeit Algorithmiker genannt.

Der nachweislich erste Mathematiker, in dem sich der Übergang von den Abacisten zu den Algorithmikern vollzog, ist Atelhart von Bath.[6]) Er lebte bereits in der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts und war nicht nur mit allen Feinheiten des Abakusrechnens, sondern auch mit der Mathematik der Araber wohl vertraut. Ihm nahe steht der spanische Jude Johannes von Sevilla, ein fleißiger Übersetzer der Schriften der westarabischen Mathematiker ins Lateinische. Weiter sind zu nennen: Gerhard von Cremona (gest. 1187), welcher insbesondere die Algebra des Muhammed ibn Musa Alchwarizmi ins Lateinische übertrug; Johannes a Sacro Bosco (gest. 1226), eigentlich Johann von Halifax, Erzbischof von Canterbury, der Verfasser des im 13. Jahrhunderte und darüber hinaus gebräuchlichsten Lehrbuches der indisch-arabischen Rechenkunst;[7]) Jordanus Nemorarius, ein Zeitgenosse des vorigen, aber aus Thüringen gebürtig (Nemorarius = Waldbewohner), der bedeutendste deutsche Mathematiker jener Zeit und nur von dem schon oben[8]) erwähnten Italiener Leonardo Pisano (Fibonacci) übertroffen.

Was das 12. Jahrhundert begann, führte das 13. Jahrhundert fort, und das 14. Jahrhundert vollendete es. Der Algorithmus verdrängte den Abacismus; die indisch-arabische Positionsarithmetik gelangte innerhalb der damaligen gelehrten Welt zur Alleinherrschaft. Und so blieb schließlich nur noch übrig, das Positionsrechnen auch dem Volke zugänglich zu machen.

Es liegt nahe, vom 15. Jahrhunderte den ebenerwähnten Abschluß der ganzen Bewegung zu erwarten. Allein es verging dasselbe fast ganz,

---

4) Von diesem Namen hat man irrtümlicherweise oft das Wort „Algebra" abgeleitet.

5) Siehe oben, Seite 11.

6) Günther a. a. O. S. 68 f.

7) Das Buch führte den Titel: „Tractatus de arte numeri", hieß später „De Algorithmo" und behandelte nach einander: Numerieren, Addieren, Subtrahieren, Duplieren (Verdoppeln), Medieren (Halbieren), Multiplicieren, Dividieren, Progressionen, Wurzelausziehung.

8) Seite 9.

ehe man (wenigstens in Deutschland) die großen Vorteile des Positionsrechnens für das bürgerliche Leben, für Gewerbe, Handel und Verkehr, erkannte und würdigte. Bezeichnend dafür ist der Umstand, daß das erste deutsche Rechenbuch erst 1482, das zweite 1483 und das dritte 1489 erschien.

Bis zum Jahre 1482 gab es in Deutschland nur lateinische Rechenbücher, also Rechenbücher für Leute, welche des Lateinischen mächtig waren. So konnte auch die Positionsarithmetik bis dahin nur ein Bestandteil der gelehrten Bildung sein. Damit ist nun freilich nicht gesagt, daß für die Weiterentwickelung derselben von deutscher Seite gar nichts geschehen sei. Im Gegenteil, es leistete z. B. die Universität Wien gerade im 15. Jahrhunderte auf mathematischem Gebiete sehr Hervorragendes. Johann von Gmunden (gest. 1442) war es, ein bedeutender Algorithmiker, welcher hier eine mathematische Schule eröffnete, die eine stattliche Reihe glänzender Namen, darunter Peurbach und Regiomontanus, aufzuweisen hat. Georg von Peurbach (gest. 1461) verfaßte zahlreiche mathematische Schriften, darunter ein kleines, nur acht Quartblatt starkes arithmetisches Lehrbuch. Der Inhalt desselben war ein so gediegener, daß er auf viele Jahre hinaus den arithmetischen Schul-Lehrstoff nach Inhalt und Form beherrschte.[9]) Regiomontanus, nach seinem Heimatorte Königsberg in Franken so genannt, hieß eigentlich Johannes Müller (gest. 1471). Er war Peurbachs größter Schüler und hat sich besonders als Forscher auf dem Gebiete der Astronomie unsterbliche Verdienste erworben. Doch zeigte er auch eine für die damalige Zeit staunenswerte pädagogische Begabung für die Behandlung mathematischer Aufgaben. Später finden wir in Wien noch: Heinrich Stromer, welcher 1512 einen „Algorismus linealis" schrieb, der sich großer Beliebtheit erfreute; Heinrich Schreiber aus Erfurt, gewöhnlich Grammateus genannt, welcher in seinen Lehrbüchern mit den letzten Resten abacistischer Auffassung des Rechnens gründlicher als alle seine Vorgänger aufräumte; Rudolf von Jauer, der Herausgeber der ersten deutschen Algebra (1526), die nachmals Michael Stifel, ein Zeitgenosse Luthers, in neuer und vermehrter Auflage erscheinen ließ u. a. m.

So hoch aber auch diese Leistungen an und für sich sein mögen, auf das Volksrechnen übten sie zunächst doch keinen Einfluß aus. Denn während dieses die Anwendung der Gesetze der Zahlwelt auf das praktische Leben forderte, hatten es jene nur mit den Zahlgesetzen an und für sich zu thun.

Das empfand mit der Zeit niemand schwerer als der deutsche Kaufmann. Denn dieser bedurfte auch damals schon des kaufmännischen Rechnens,

---

9) Peurbachs Lehrbüchlein wird als „Introductorium in arithmeticam", „Elementa arithmetices" und „Algorismus" aufgeführt. Es gliedert seinen Stoff in folgende 12 Abschnitte: Numeration, Addition, Subtraktion, Mediation, Duplation, Multiplikation, Division, Progression, Quadrat- und Kubikwurzelausziehung, Goldene Regel und Gesellschaftsregel.

wenn er es den Kaufleuten anderer Völker, besonders den Italienern, gleich thun wollte. Die sämtlichen Spezies, die Zins-, Prozent-, Mischungs- und Geldwertrechnung, die Proportions- und Gesellschaftsrechnung mußten ihm zur Verfügung stehen. Nun ließen zwar vermögende Eltern schon im 12. und 13. Jahrhunderte ihre Söhne durch rechenkundige Privatlehrer, selbst Juden (die man durchweg für gute Rechner hielt), unterrichten. Oder sie schickten dieselben nach Italien, das sich seit Leonardo Pisanos Zeiten auf dem Gebiete des praktischen, insbesondere auch kaufmännischen Rechnens eines sehr guten Rufes erfreute. Das war aber auch alles, was geschah, um das arithmetische Wissen und Können des nichtgelehrten Teiles des deutschen Volkes während des Mittelalters auf der Höhe des Unentbehrlichen zu erhalten. Und da es im ganzen auch nur wenige waren, denen die erwähnten beiden Wege offen standen, so bemerkte man im öffentlichen und privaten Verkehre nicht viel davon.

Ungleich wichtiger sollte mit der Zeit eine andere Einrichtung für die Verbreitung praktisch-arithmetischer Kenntnisse in Deutschland werden. Wir meinen die deutschen Rechenschulen mit ihren vielgenannten Leitern, den Rechenmeistern. Es mag sein, daß einige dieser Rechenschulen schon im 14. Jahrhunderte bestanden. Der nachweislich erste Rechenmeister aber ist Jobs Kupfer in Nürnberg 1409.[10]) Weiterhin erscheinen die deutschen Rechenmeister gewissermaßen als die Handwerker der mathematischen Wissenschaften. Denn sobald sich mehrere derselben in einer Stadt aufhielten, vereinigten sie sich nach Art der Handwerker-Innungen, nahmen Lehrlinge mit sechsjähriger Lehrzeit an, prüften dieselben am Ende, sprachen sie los u. dgl. m. Die losgesprochenen Lehrlinge erhielten den Titel „Schreiber", wurden als Gehilfen verwendet und hatten die Anwartschaft auf freiwerdende Rechenmeisterstellen. Die Blütezeit der deutschen Rechenschulen fällt in das 16. Jahrhundert. Nürnberg, das bekanntlich in vielen Stücken die übrigen deutschen Städte übertraf, hatte auch die berühmtesten Rechenschulen. Im Jahre 1613 zählte es deren nicht weniger als 48. Seine zünftigen Rechenmeister pflegte man „ehrbar, wohlgelahrt und kunstberühmt" zu nennen. Mehrere derselben, wie Johann Heer, Zacharias Lochner, Sebastian Kurtz (Kurtius) u. a., verdienten diese Prädikate auch mit Recht.[11]) Ein Nürnberger Rechenmeister, Ulrich Wagner, war der Verfasser des ältesten gedruckten deutschen Rechenbuches. Der letzte derselben, Zacharias Schmidt, amtierte noch bis 1821.

Man darf annehmen, daß die deutschen Rechenschulen ihre Entstehung Anregungen verdankten, welche von deutschen Kaufleuten ausgingen. Denn das Rechnen, welches sie pflegten, war vorwiegend das kaufmännische Rechnen jener Zeit. Indem sie aber so zu Trägern und Pflegern der praktischen Arithmetik in einer Zeit wurden, in welcher sich weiter nie-

---

10) Günther a. a. O. S. 294.
11) Doppelmayr a. a. O.

mand ernstlich um dieselbe bemühte, erfüllten sie bereits eine sehr wichtige Aufgabe. Dazu kam aber noch, daß sie nicht nur zahlreiche Schüler ausbildeten, welche sich praktischen Lebensberufen widmeten, sondern auch tüchtige Rechenmeister, welche das begonnene Werk weiterführten und vervollkommneten. Und so machten sich die Rechenschulen in doppelter Weise um die praktische Arithmetik verdient: sie verbreiteten ein gewisses Maß arithmetischen Wissens und Könnens im deutschen Volke, und sie lenkten die Aufmerksamkeit mehr als zuvor auf die methodische Durcharbeitung des Rechenlehrstoffes.

So groß nun aber auch die Verdienste der deutschen Rechenschulen an sich sind und so beachtenswert ihr Rechnen als Vorstufe des Positionsrechnens ist,[12] bis zur Einführung des indisch-arabischen Positionsrechnens selbst sind sie im 15. Jahrhunderte nicht gekommen. Ja im 16. Jahrhunderte noch hielt es schwer, sie zur Annahme desselben zu bewegen. Denn ihr Hauptlehrmittel, das sie nicht preisgeben wollten, war das deutsche Rechenbrett, auch Rechenbank oder „Banckir" genannt, und dieses gestattete nur ein Rechnen in der Weise der Abacisten. Es ist dieses das unter dem Namen „Rechnen auf Linien" oder, wie es Adam Ries nennt, „Rechnung auff der linihen" bekannte Verfahren.

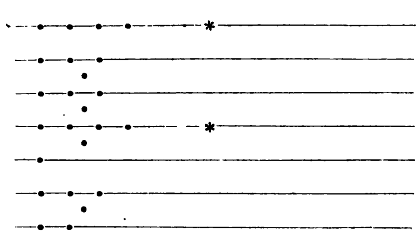
Eine ausführlichere Behandlung der Geschichte des Rechenunterrichts würde hier auf das Linienrechnen näher einzugehen haben. Da wir eine solche aber nicht beabsichtigen, so dürfen wir uns kurz fassen. Dieses umsomehr, als feststeht, daß das Linienrechnen, so verbreitet es auch in Deutschland gewesen ist, ein lebendiges Glied in der Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts nicht bildet.[13])

Das „Rechnen auf Linien" ist ein Verfahren, mit Hilfe von Marken (Rechenpfennigen) und eines Linienschemas (Rechenbank, Banckir) die Zahlen darzustellen und die Rechenoperationen zu vollziehen. „Man benutzte zum Linienrechnen entweder ein förmliches Rechenbrett oder ein in die Tischplatte eingegrabenes Liniensystem, oder man zeichnete sich ein solches und wischte es nach dem Gebrauche wieder ab. Das Kandlersche Rechenbuch aus dem 17. Jahrhunderte bemerkt dazu: ‚Mach auf ein Tuch, Tafel oder Papier etliche Linien, souil dir vonnöten sein werden'. Die Linien wurden horizontal zum Rechnenden gezogen, was deswegen bemerkenswert ist, weil die horizontale Richtung einen Gegensatz bildet zu den Vertikalkolumnen des Gerbertschen (Kolumnen-) Abakus. Zur bessern Übersicht bezeichnete man die Linien der Reihenfolge nach mit den römischen Ziffern I, X, C, M rc., die Kolumnen oder Spatien mit V, L, D rc. Später wurden die römischen Ziffern durch arabische (moderne) Ziffern ersetzt oder auch weggelassen, weil ein Kreuz auf der vierten Linie zur Orientierung ausreichte. Auf die Linien und in die Zwischen-

12) Siehe unten S. 18.

13) Sehr ausführlich behandelt Kuckuck (Kallius) a. a. O. das Linienrechnen. Auch Böhme a. a. O. verbreitet sich eingehend über dasselbe.

räume wurden Rechen- oder Zahlpfennige gelegt. Ein Zahlpfennig unter der ersten Linie galt $\frac{1}{2}$, ein Pfennig auf der ersten Linie 1, einer im ersten Spatium 5, einer auf der zweiten Linie 10, einer im zweiten Spatium 50 u. s. w. Es tritt also das Zehner- und Fünfersystem zugleich auf und dadurch die Verwandtschaft mit dem alten römischen Abakus in den Vordergrund. Wie bei diesem, reichen 5 Projektile zur Bezeichnung der 9 Einheiten einer Ordnung aus, nur rückt das Fünfersystem des römischen Knopfabakus beim Linienrechnen in die Kolumnen ein, und die Stelle der Knöpfe vertreten Zahlpfennige. Nach der Einrichtung des deutschen Rechenbrettes konnten auf einer Linie nur vier Rechenpfennige, in einem Spatium nur je einer untergebracht werden; es waren daher für ein Rechenbrett mit 5 Linien 25 Rechenpfennige ausreichend. Die *Darstellung* der Zahlen durch Marken geschah, indem man die zu legende Zahl nach dem Zehner- und Fünfersystem der Bedeutung der Linien gemäß verteilte. Beim *Ablesen* der Zahl fing man oben an, also bei den höchsten Sorten, und las in Triaden nach der damals gebräuchlichen Sprechweise."[14]) So wurde z. B. die Zahl 4 389 637 wie in beistehender Figur aufgelegt. Ausgesprochen aber wurde sie: Viertausendmaltausend, dreihunderttausend neunundachtzigtausend, sechshundert sieben und dreißig.



„Wollte man *addieren* auf Linien, so legte man die einzelnen Summanden nacheinander auf und zog die Summe in ihre kürzeste Form zusammen, d. h. 5 Marken auf einer Linie wurden durch eine im nächsten Spatium und 2 Marken im Spatium durch eine auf der nächsten Linie ersetzt. Schließlich wurde das Resultat in Ziffernschrift umgesetzt. Behufs Addition mehrsortiger Zahlen wurde das Linienschema durch senkrechte Striche in soviele Abteilungen (cambi, Banckire) gebracht, als man Sorten hatte, und jede Sorte gesondert addiert. Sollte eine Proberechnung angestellt werden, so mußten die einzelnen Posten von der Summe weggenommen werden; ‚bleibt nichts, so hast du recht gethan'.

Beim *Subtrahieren* wurde der Minuend aufgelegt, der Subtrahend aufgeschrieben. Die Subtraktion erfolgte stückweise, mit der höchsten Stelle begann man. Die liegengebliebenen Marken stellten den Rest dar. Unser ‚hebt sich auf' rührt her vom Subtrahieren auf Linien.

Fürs *Multiplicieren* wurde der Multiplikand aufgelegt, der Multiplikator geschrieben . . . Die *Division* war eine wiederholte Subtraktion. Man legte den Dividend auf und nahm den Divisor so oft fort, als es ging . . ."[15])

---

14) *Sterner* a. a. O. S. 214.
15) *Unger* a. a. O. S. 67.

Die Frage nach dem Ursprunge des Rechnens auf Linien ist noch nicht endgiltig entschieden, wenn es auch nahe liegt, dasselbe auf das römische Abakusrechnen zurückzuführen. Dagegen ist der Zweck desselben zweifellos der, dem Volke das Rechnen ohne Anwendung der indisch-arabischen Ziffern (welche man für zu schwer hielt) zu vermitteln. Mit der Rechenbank konnte auch der rechnen, welcher des Schreibens unkundig war. Daraus aber, daß das „Rechnen auf Linien“ in der Zeit auftauchte, als der Algorithmus in Deutschland bekannter wurde, und daß es wieder verschwand, als das Zifferrechnen die Herrschaft erlangte, geht zugleich hervor, daß es sein Dasein eigentlich dem Bestreben, die Vorteile des Algorithmus ohne die Rechenweise desselben zu erlangen, verdankt.

Der arithmetische Wert des Rechnens auf Linien ist sehr scharf von einem seinerzeit berühmten Rechenmeister, dem in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts lebenden Simon Jacob aus Koburg, charakterisiert worden. Die Kritik desselben lautet: „Wahr ist's, daß sie zu Hausrechnungen, da man viel Summirens, Ausgebens und Einnemens bedarff, etwan förderlich erscheinen, aber in Kunstrechnungen, die ein wenig etwas wichtig, zum offtermal verhinderlich. Nicht sag ich, daß man auf den Linien dieselben Rechnungen nicht auch machen könnte, sondern soviel vortheils ein Fußgänger, der leicht fertig und mit keiner Last beladen ist, gegen einen, der unter einer schweren Last stecket, hat, soviel vortheil hat auch ein Kunstrechner mit den Ziffern für einen mit den Linien“.[16]) Der methodische Wert des Rechnens auf Linien liegt in der Anschaulichkeit desselben. Wer darin geübt war, erlernte mit weniger Mühe das Zifferrechnen. Diese Thatsache hat kein Geringerer als Adam Ries empirisch erkannt und klar ausgesprochen.[17]) Nach diesem darf man wohl sagen, daß das deutsche Rechenbrett die Stelle der heutigen Rechenmaschinen in den damaligen deutschen Rechenschulen ausgefüllt hat.[18])

Das „Rechnen auf Linien“ behauptete seine Herrschaft als volkstümliches Rechnen in Deutschland bis gegen die Mitte des 16. Jahrhunderts, während der Algorithmus im Gewande der lateinischen Sprache nach wie vor das Rechnen der Wissenschaft blieb. An Anzeichen freilich, daß das indisch-arabische Positionsrechnen schließlich den Sieg davon tragen werde, fehlte es bereits im 15. Jahrhunderte nicht. Einzelne Rechenmeister verfügten über dasselbe, die deutschen Kaufleute begehrten es, und sein gelehrtes Gewand hatte es schon hin und wieder abgelegt. Der untrüglichste Beweis dafür liegt in dem ältesten gedruckten deutschen Rechenbuche aus dem Jahre 1482 vor.

In seiner weitern Entwickelung, welche besonders in die erste Hälfte des 16. Jahrhunderts fällt, trat das indisch-arabische Positionsrechnen in Deutschland unter mancherlei Namen auf. Die bemerkens-

16) Unger a. a. O. S. 69.

17) Ries, Quartbuch, Vorrede.

18) Die Redensarten: „Das Hundertste ins Tausendste werfen“; „vom Hundertsten ins Tausendste kommen“ u. a. m. weisen noch heute darauf hin, daß das deutsche Volk einmal viel mit dem Rechenbrette zu thun gehabt hat.

wertesten davon sind: „Rechnung auff der Federn“ (bei Adam Ries), „Rechnen mit der Feder“, „Rechnen mit der kryden“ (bei Jakob Kobel), „Rechnen mit den zyffern“ (bei Johann Böschenstein), „Rechnung auff ziffern“ (später auch bei Adam Ries) u. a. m. Wir haben in diesem Rechnen gewissermaßen die deutsche Form des Algorithmus vor uns, ein Rechnen mit indisch-arabischen Ziffern auf der Grundlage des Zehnersystems, also ein Rechnen, welches dem Geiste nach durchaus ein mit dem Rechnen der Gegenwart übereinstimmendes Rechnen ist.

Das „Rechnen mit der Feder“ stellte sich infolgedessen auch gleich von vorn herein in bewußten Gegensatz zu dem „Rechnen auf Linien“. War doch in dem letztern noch einmal und fast plötzlich die Rechenweise der Abacisten aufgetreten, gleichsam die deutsche Form des Abacismus.[19]) Und so entspann sich denn zwischen beiden Rechenweisen sehr bald ein heftiger Kampf, welcher einen großen Teil des 16. Jahrhunderts ausfüllte und der erst endete, als das „Rechnen mit der Feder“ endgiltig gesiegt hatte.

Es unterliegt nach diesem keinem Zweifel mehr, daß das Erscheinen des ersten gedruckten deutschen Rechenbuches, welches das indisch-arabische Positionsrechnen lehrte, in der Geschichte des Rechenunterrichts als ein hochwichtiges Ereignis zu gelten hat. Auch leuchtet ein, daß der Fortschritt, welchen das Positionsrechnen in Deutschland weiterhin aufweist, von da ab besonders in den deutschen Rechenbüchern zu Tage treten muß. Und so richten auch wir unser Augenmerk von hier ab mehr als bisher auf die einschlägige Litteratur, zunächst auf die ältesten deutschen Rechenbücher.

Das erste gedruckte deutsche Rechenbuch erschien, wie bereits erwähnt, 1482 und zwar in Bamberg. Sein Verfasser ist der obengenannte Nürnberger Rechenmeister Ulrich Wagner, sein Drucker Heinrich Petzensteiner aus Nürnberg, nachweislich Faktor des berühmten Buchdruckers Sensenschmid zu Bamberg. Ein vollständiges Exemplar dieses Rechenbuches ist allerdings nicht mehr vorhanden. Alles, was davon erhalten blieb, beschränkt sich auf neun Pergamentstreifchen in Visitenkartengröße. Die Königliche Bibliothek zu Bamberg bewahrt den kostbaren Überrest auf. Doch befindet sich glücklicherweise unter den neun Blättern das letzte Blatt mit, welches nach damaliger Sitte am Ende der letzten Seite nähere Angaben über Verfasser, Drucker und Erscheinungstag des Buches bringt. Hier heißt es nun, gedruckt in roten Lettern:

„Anno dñi . . . 1482 kl' 16. Junij p. Henꝛ. peczensteiner Babenberge: finit Ulrich wagner Rechēmeister zu Nürnberg.“

Die Ziffern, welche in dem Büchlein verwendet wurden, sind die indisch-arabischen, also die heute gebräuchlichen, nur daß für 4, 5 und 7

19) Günther a. a. O. S. 310.

abwechselnd noch die älteren Formen 8, ϥ und Λ vorkommen. Jede Kolumne zeigt eine rote Überschrift.[20])

Das zweite gedruckte deutsche Rechenbuch erschien 1483, ebenfalls in Bamberg. Auch wurde es von demselben Petzensteiner gedruckt, der im Jahre vorher das erste Rechenbuch gedruckt hatte. Ja, es ist sogar wahrscheinlich, daß dieser Petzensteiner der Verfasser des zweiten Rechenbuches gewesen ist. Denn am Ende desselben wird ausdrücklich bemerkt, daß es „durch“ Heinrich Petzensteiner „begriffen“ wurde. Und unter „begriffen — durch“ verstand man damals soviel wie ein Buch verfassen.

Von diesem zweiten Rechenbuche besitzt die „Ratsschulbibliothek“ zu Zwickau in Sachsen noch ein sehr gut erhaltenes Exemplar, dem weiter nichts als der Titel fehlt.[21]) Dafür steht aber auch hier auf der letzten Buchseite, ähnlich wie bei dem vorigen Buche:

„In zale Xp̄i 1483. kl'. 17. des Meyen Rechnung in mancherley weis in Babenberg durch hentz petzensteiner begriffen: volendet“.[22])

Das höchst wertvolle Büchlein besteht aus 77 unsignierten Blättern in Duodez (10,4 cm hoch und 10,7 cm breit), die Kolumnen (6,2 cm hoch und 7 cm breit) zählen je 16 Zeilen und haben rote Überschriften. Jedes der 21 Kapitel beginnt mit einem großen roten Buchstaben in Zierschrift. Die verwendeten Ziffern sind die unsern, nur daß die 2 stets eckig (Z) erscheint und bei 4, 5 und 7 wieder doppelte Formen (4 und 8, 5 und ϥ, 7 und Λ) auftreten. Viele Sprachformen, besonders aber die Orthographie des Textes tragen das Gepräge des Willkürlichen an sich, denn sie wechseln sehr oft. Doch sind die Auseinandersetzungen durchweg verständlich. Nicht selten begegnet man sogar im Gegensatze zu andern Schriften jener Zeit einer Kürze und Klarheit des Ausdrucks, welche man hier nicht sucht. So heißt es z. B. auf Blattseite 4a:

„Das erst capitel Vnd vorrede“.

„In dem puch der weyßheit. 11. schreibt Sa || lomō. Got hat alle ding geschaffen. In ge || wicht. In zal. vnd in maße. Seindtemal das in || allen dingē die zal ist not zewissen. So wyl ich sie

20) Nach Unger a. a. O. S. 36. Demselben gebührt das Verdienst, auf dieses älteste deutsche Rechenbuch zum ersten Male wieder mit Nachdruck hingewiesen zu haben. Kein einziger Historiker vor ihm scheint dasselbe gekannt zu haben, obwohl es im Serapeum 1847 S. 126 vom Besitzer selbst angezeigt wurde.

21) Dieses hochinteressante Buch, wahrscheinlich Unicum, hat Joh. Müller zuerst ausführlich beschrieben. (Deutsche Blätter a. a. O. S. 69 ff.) Nach ihm gedachten desselben Günther, Unger und Sterner a. a. O. Allen übrigen neuern Historikern der Arithmetik aber scheint es ebensowenig wie das erste bekannt zu sein. — Wir erhielten das Buch durch die Güte des Vorstandes der Zwickauer Ratsschulbibliothek behufs genauer Einsichtnahme auf längere Zeit in dankenswerter Weise geliehen.

22) Das will heißen: Im Jahre Christi (Xp̄i, eigentlich Xρ, d. h. die Anfangsbuchstaben von Χριστός, das Christogramm, gewöhnlich in der Form ☧ gegeben) 1483. kl' (= kalendas) den 17. Mai ꝛc.

leren von der kunst ꝺ zale darzu zum ersten not ist ‖ zewissen wie man ygliche zal schreiben sol mit vnt' ‖ scheyd der anꝺn. Es sein newn bedeutlich figur. ‖ 1 Z 3 4 5 6 Λ 8 9. vnd die zehent ist 0 vn̄ bedewt all ‖ ein nichs. so sie aber bey den andern figurē geschꝛ̃ ‖ wirdet so macht sie die andern mer bedeutten vnd ‖ mit den zehen figuren schreibt man alle zall. Nun ‖ merck das ygliche vntter den newn figuren an der ‖ ersten stat bedewt sich selbs. an der andern zehen ‖ mal sich selbs. an der drittē hundert mal sich selbs ‖ an der vierden tausent mal sich selbes vnd also der ‖ ygliche so sie fürbas geseczt wirdet gegen ꝺ linckē ‖ hant bedeut allmal zehenfert mere den die nechst ‖ die vor dir stet. dauon heb allmal also an zu zelen vō ‖ der ersten die gegen der rechten hand. eins. zehen. ‖ hunꝺt. tausent vnd secz aussiglich tausent ein pun ‖ ckt. dabey man merck wieuil die leczt mer tausēt ‖ bedeut vnd merck fleissig das die erst figur heißt ‖ die gegen der rechten handt vindest vnd gegen der ‖ lincken hant heyßet die leczte rc. alß du vindest ‖ hernach in etlichen figuren“.[23])

Diese dem Petzensteinerschen Buche entlehnte Textprobe zeigt zugleich, daß dasselbe durchaus die Positionsschreibweise unter Verwendung der indisch-arabischen Ziffern bringt. Daß in dem Buche weiterhin aber auch mit diesen Ziffern in den uns geläufigen Formen gerechnet wird, mögen die nachfolgenden darin vorkommenden Beispiele zeigen.

a) Additionsaufgaben (Blatt 6a).

63345	76104	876104
39863	28965	809789
103208	105069	1685893

b) Subtraktionsaufgaben (Blatt 7b).

85072	84569
39506	53546
45566	31023

609854760123
348096056387
261758703736

c) Multiplikationsaufgabe (Blatt 11a).

Die Aufgabe 640180 . 705081 wird wie folgt im Schachir (Fläche mit Netzlinien, dem Schachbrette zu vergleichen) gelöst:

---

23) Hier ist ꝺ = der, vō = von, geschꝛ̃ = geschrieben rc. zu lesen. Die beiden senkrechten Striche ‖ geben an, wo im Original eine Zeile endet.

```
      6 4 0 1 8 0
        6 4 0 1 8 0 / 1
    5 1 2 1 2*4 0 / 8
    0 0 0 0 0 0 / 0
  3 2 0 0 9 0 0 / 5
  0 0 0 0 0 0 / 0
4 4 8 1 2 6 0 / 7
4 5 1 3 7 8 7 5 4 5 8 0
```

Anmerkung. In dem zweiten Teilprodukte kommt ein jedenfalls sehr interessanter Druckfehler vor: für die mit * versehene 2 ist 4 zu setzen.

Abgesehen von der Schreibweise des Multiplikators, welche aber gar nicht so übel ist, finden wir hier durchaus die bei uns zumeist noch übliche Art zu multiplizieren.

d) Divisionsaufgabe (Blatt 13a).

Die Aufgabe 467:19 wird wie folgt gelöst:

```
  1
  4
281 ||
467 || 24
199 ||
  1
```

```
\   /
 \2/
8 X 6
 /1\
/   \
```

Diese Art zu dividieren wird „Teylen in Galein", d. h. Teilen, dessen Ausrechnung die Form einer Galeere (Gale, Galea) annimmt, genannt.[24]) Es ist im wesentlichen eine Division, bei welcher nur die Reste und zwar nach oben niedergeschrieben werden. Der Quotient steht rechts vom Dividenden und heißt 24, der Divisor steht unter dem Dividenden und rückt während der Division weiter nach rechts, der letzte Rest steht am höchsten und beträgt 11. Was hinter dem Quotienten im Kreuze noch steht, ist die Neunerprobe. Sobald man nämlich die Quersumme jeder der in der Aufgabe vorkommenden Zahlen durch 9 teilt, erhält man: vom Divisor 1, Dividend 8, Quotient 6, Rest 2. Die Lösung ist richtig, wenn das Produkt der Probezahlen von Quotient und Divisor, vermehrt um die Probezahl des Restes, die Probezahl des Dividenden giebt. Dieses aber ist hier der Fall, denn $1 \,.\, 6 + 2 = 8$.[25])

Petzensteiners Buch ist eine selbständige Arbeit, welche ausschließlich praktische Bedürfnisse berücksichtigt. Es beschäftigt sich nur mit dem Positionsrechnen, was namentlich bemerkenswert ist. Die Anordnung des Stoffes ist eine ebenso klare als übersichtliche, die Einkleidung der Aufgaben eine zumeist gelungene. Die überall beigefügten Lösungen weisen nur wenige Fehler auf. Daß ein solches Buch in der damaligen Zeit großes Aufsehen erregte, liegt nahe. Und so kann es auch nicht über-

24) Vergleiche Günther a. a. O. S. 319.

25) Zu sämtlichen Aufgaben ist noch zu bemerken, daß die von uns verwendeten Linien im Originale nicht vorkommen, sondern erst nachträglich mit roter Tinte eingezogen worden sind.

raschen, wenn es den gleichzeitigen Rechenmeistern als Muster diente, und wenn es mehrere derselben bei Abfassung ihrer Schriften stark ausbeuteten. Dieses that z. B. gleich der Verfasser des dritten gedruckten deutschen Rechenbuches, Johannes Widmann in Leipzig.

Das dritte gedruckte deutsche Rechenbuch erschien im Jahre 1489 zu Leipzig. Sein Verfasser, Johannes Widmann, gebürtig aus Eger, war Professor in Leipzig. Er gab dem Buche den Titel:

„Behēde vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft“.

Ans Ende desselben setzte er: „Gedruckt in der Fürstlichen Stath Leipczick durch Conradn̄ Kacheloffen Im 1489 Jare“.

Widmanns Buch enthält 232 Oktavblätter ohne Seitenzahlen und Blattzeichen. Sein Inhalt gliedert sich in folgende drei Abteilungen: „I. vō kunst vn̄ art der zal an yr selbst; II. vō der ordenung der zal; III. von der art deß messen die do geometria genant ist“.

Unter I. bringt Widmann die Spezies in unbenannten ganzen und gebrochenen Zahlen, unter II. die bürgerlichen (kaufmännischen) Rechnungsarten, die sich auf Ordnungen oder Verhältnisse der Zahlen gründen, unter III. etwas rechnende Geometrie. Auch für ihn ist bemerkenswert, daß er das „Rechnen auf Linien“ nicht behandelt. Wie Petzensteiner will er grundsätzlich nur das Positionsrechnen mit indisch-arabischen Ziffern lehren. Die Zifferformen sind bei ihm (bis auf eine einzige alte 7) die heute üblichen[26]). Auch macht er bereits von den Zeichen + (plus) und — (minus) Gebrauch. Den meisten Beifall fand seine Stoffanordnung, denn viele der nachfolgenden Rechenbuchverfasser nahmen dieselbe unverändert an. Was freilich die Aufgaben anlangt, so stehen dieselben nach Inhalt und Form hinter denen Petzensteiners zurück, es sei denn, was oft der Fall ist, daß er die Petzensteiners ohne weiteres in sein Buch herüber nahm.

Den drei ältesten deutschen Rechenbüchern schließen sich der Zeit nach die Bücher von Jacob Kobel, Johann Böschensteyn und Heinrich Schreiber, genannt Grammateus, an.

Jacob Kobels, des Oppenheimers Stadtschreibers, erstes Rechenbuch erschien 1514. Es brachte, abweichend von seinen drei Vorgängern, nur das Linienrechnen, dazu in römischen Ziffern. Trotzdem wurde es viel begehrt. Bis 1520 mußte es nicht weniger als sechsmal aufgelegt werden. Sechs Jahre darauf (1520) ließ Kobel ein Buch für das Positionsrechnen folgen: Mit der kryde odh Schreibfedern / durch die zeiferzal zu rechē / Ein neüw Rechēpüchlein / den angenden Schulern dh rechnūg zu erē getruckt. Vß Kayserlichē gewalt begnadigt / In sechs Jaren bey Pene X mark golts nit nachzutrückē .... Geben

26) Nach Unger a. a. O. S. 40 f. Ausführlich hat Drobisch Widmanns Buch 1840 behandelt. Derselbe hielt es damals für das älteste deutsche Rechenbuch, ein Irrtum, welchen viele nachgesprochen und nachgeschrieben haben. So neuerdings auch noch Zimmermann in einem sehr lesenswerten Aufsatze (Prakt. Schulmann 1885), Adam a. a. O. 2c.

zu Oppenheim Anno 1520". (Quart, 4 unbezeichnete und 40 römisch numerierte Blätter, Titelbild, Register.) Kobels Vortrag war einfach und deutlich. So kam es, daß seine Bücher rasch beliebt wurden. Besonders in Süddeutschland fanden sie viele Abnehmer. Zeitgenössische Rechenmeister benutzten sie bei Abfassung neuer Rechenbücher. So auch Adam Ries. Der Inhalt des vorhin erwähnten Buches erstreckt sich auf: 1) Numeration (Ursprung, Lesen und Schreiben der Zahlen, römisch und indisch-arabisch); 2) Addition; 3) Subtraktion; 4) Duplation; 5) Mediation; 6) Multiplikation; 7) Division; 8) Progression; 9) Proben; 10) Bruchrechnen; 11) Regeldetri- und Gesellschaftsaufgaben[27]).

Johann Böschensteyn gab 1514, also gleichzeitig mit Kobels Linienrechnen, heraus: „Ain New geordnet Rech / enbiechlin mit den zyffern den angenden schulern zu nutz In haltēt die Siben spezies Algorithmi mit sampt der Regel de Try / vnd sechs regeln d̄ prüch / vn̄ der regel Fusti mit vil andern guten fragen den kündern zum anfang nutzbarlich durch Joann Böschensteyn von Eßlingen priester neulych außgangen vnd geordnet". Am Ende: „Getruckt in der Kayserlichen stat Augspurg durch Erhart öglin Anno 1514 Jar". Linienrechnen kommt in diesem Buche nicht vor. In einfacher, den kindlichen Standpunkt berücksichtigender Weise werden sieben Spezies gelehrt: Numeration, Addition, Subtraktion, Duplation, Mediation, Multiplikation, Division. Außerdem: Regeldetri, Bruchzahlen und Regelfusti (Warenschadenberechnung, der Tara entgegengesetzt).

Heinrich Schreiber aus Erfurt, genannt Grammateus, Magister in Wien, ließ 1518 in Wien drucken: „Ein new künstlich behend und gewiß Rechenbuchlin / vff alle Kauffmanschafft. Nach gemeinen Regeln detri. Welschen practic. Regeln falsi. Etlichen Regeln Cosse. Proportiō des gesangs im Diatonio / auß zu theylen monochordum. Orgelpfeiffen, vn̄ andere Instrumēt / durch erfindung Pythagore. Buchhalten durch das Zornal / Kaps vnd Schuldbuch. Visir Ruthen zu machen / durch den Quadrat / vnd Triangel / sampt andern lustigen stücken der Geometrei. M. Henricus Grammateus. Wien. M. D. XViij". (Oktav, 96 Blätter mit den Blattzeichen A Aij 2c., Titelbild.)[28]) Grammateus unterscheidet nur vier Spezies: Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division, behandelt also mit Recht Numerieren, Duplieren und Medieren nicht als besondere Grundrechnungsarten. Auch sonst zeigt sein Buch gegenüber dem Hergebrachten noch manchen beachtenswerten Fortschritt.

Rückblick. Die Positionsschreibweise, eine Erfindung der Inder, wurde im 8. Jahrhundert n. Chr. von den Arabern angenommen. Durch diese kam sie dann nach Spanien. Mit ihr zugleich das Positionsrechnen. Christliche Hörer der maurischen Hochschulen verbreiteten die indisch-

---

27) Nach Unger a. a. O. S. 45 f.

28) Nach Unger a. a. O. S. 47. Zornal = Journal; Kaps = Kassabuch (von Kapsel). Die „Visir-Ruthe" war ein bezifferter Stab, mit dessen Hilfe der Inhalt der Fässer leicht gefunden werden konnte.

arabische Rechenkunst, Algorithmus genannt, seit dem 12. Jahrhundert in Italien, Frankreich, England und Deutschland. Der bedeutendste aller christlichen Algorithmiker ist der Italiäner Leonardo Pisano (Fibonacci). Ihm nahe kommt der Deutsche Jordanus Nemorarius. Als Übersetzer der arabischen Schriften ins Lateinische erwarben sich Johannes von Sevilla und Gerhard von Cremona große Verdienste. Johannes a Sarco Bosco schrieb das im 13. Jahrhundert beliebteste Rechenbuch. So verdrängte die indisch-arabische Rechenkunst, der Algorithmus, die altrömische Rechenkunst, den Abacismus, im 13. und 14. Jahrhunderte mehr und mehr. Noch immer aber war sie nur ein Bestandteil der gelehrten Bildung, weil sie lediglich im Gewande der lateinischen Sprache auftrat. Auch die deutschen Rechenschulen änderten daran nicht viel. Denn ihr Rechnen war lange nur eine unter dem Namen „Rechnen auf Linien“ mit Hilfe des deutschen Rechenbrettes gepflegte Form des Abakusrechnens. Der Wendepunkt für Deutschland trat ein, als die ersten deutschen Lehrbücher für Positionsrechnen erschienen. Das war 1482 (Ulrich Wagner), 1483 (Heinrich Petzensteiner) und 1489 (Johannes Widmann). Von jetzt ab drang das indisch-arabische Positionsrechnen auch ins deutsche Volk ein. Man nannte es in seinem deutschen Gewande: „Rechnen mit der Feder“ rc. Dasselbe nahm sofort den Kampf mit dem „Rechnen auf Linien“ auf, und schon 1518 konnte es nicht mehr zweifelhaft sein, welche der beiden Rechenweisen den Sieg davontragen werde.

§ 3.

Adam Ries, der größte deutsche Rechenmethodiker seiner Zeit.

Litteratur[1]. Außer den im vorigen Paragraphen genannten Schriften sind insbesondere noch folgende aufzuführen: Allgemeine Deutsche Biographie. Bd. 28. Seite 576. (Artikel: Adam Riese.) Andrae, C. H. G. Chronologische Nachrichten der Bergstadt Annaberg. Schneeberg 1837. Annaberger Wochenblatt. Jahrgang 1891. Nr. 295. 1. Beilage. (Aufsatz: Adam Ries, der Annaberger Rechenmeister. Dieser Aufsatz ist auch im „Glückauf!“ Nr. 12, Schneeberg 1891, abgedruckt worden.) Das Bayerland. 4. Jahrg. Nrn. 5. 6. 7. (Sterner, Adam Rys.) München 1893. Berlet, B. Über Adam Riese. (Im 12. Berichte über die Progymnasial- und Realschulanstalt zu Annaberg.) Annaberg 1855. Berlet, B. Die Coß von Adam Riese. (Im 17. Berichte über die Progymnasial- und Realschulanstalt zu Annaberg.) Annaberg 1860. — Beide Abhandlungen sind 1892 zusammen in einem unveränderten Neudrucke, dem aber eine Einleitung vorausgeht, bei dem Verleger unseres Handbuches erschienen. — Böhme, A. Adam Ryse, Rechnung auf der Linihen und Federn. (Im Schulblatt für die Provinz Brandenburg. Jahrg.

---

1) Die Geschichte des Rechenunterrichts wird jetzt mehr als vordem gewürdigt. So kommt es, daß auch der alte Annaberger Rechenmeister, der von jeher populärste von allen, wieder größere Beachtung findet. Dieses aber umsomehr, als nach allgemeiner Annahme in das Jahr 1892 sein 400jähriger Geburtstag fällt. Wir gedenken demnächst in einer besondern Schrift (Annaberg, Rudolph & Dieterici) uns mit Adam Ries eingehender zu beschäftigen, da aus naheliegenden Gründen hier nur ein beschränkter Raum für ihn zur Verfügung steht. Die ausführlichen Litteraturangaben dürften inzwischen sehr willkommen sein.

1858. Heft 7 u. 8.) Berlin 1858. — Auch als Sonderdruck erschienen. — Brockhaus, Konversationslexikon, 13. Auflage, Bd. 13, Seite 703. (Artikel: Ries oder Riese, Adam.) Daheim, 14. Jahrg. Nr. 31. (Allihn, M. Adam Riese, der Rechenmeister.) Nr. 43. (Herzog, E.. Zur Geschichte des Rechenmeisters Adam Riese.) Leipzig 1878. Deutsche Blätter für erziehenden Unterricht. 3. Jahrg. (Schubert, H. Die Rechenkunst im 16. Jahrhundert.) Langensalza 1876. Dietericus, Clari viri Annabergae. Gartenlaube, Jahrg. 1892, Nr. 21, Seite 347. (Lilie, M. Adam Riese.) Jenisius, Chronik von Annaberg. (Gedruckt und Manuskript.) Jenisius-Arnold, G. Chronicon Annaebergense continuatum. Genau nach der Urkunde . . . gedruckt. Annaberg 1812. Lehmann, Chr. Historischer Schauplatz derer natürlichen Merckwürdigkeiten in dem Meißnischen Ober-Ertzgebirge. Leipzig 1699. Meyer, Konversations-Lexikon. Dritte Auflage. Bd. 13. Seite 648. Leipzig 1878. (Artikel: Ries, Adam.) Obererzgebirgsche Zeitung. Jahrg. 1892. Nr. 112. Pädagogische Warte. 1. Jahrg. Nr. 27. (Grohmann, M. Adam Ries und seine Rechenwerke.) Leipzig 1892. Pädagogische Zeitung. 21. Jahrg. Nr. 23. (Rebhuhn, A. Adam Riese.) Berlin 1892. Dieselbe. Litterarische Beilage. 17. Jahrg. Nr. 11. (Rebhuhn, Über das Schicksal eines Manuskripts von Adam Riese.) Berlin 1892. Pierers Universal-Lexikon. 4. Aufl. Bd. 14. Seite 157. (Artikel: Adam Riese.) Altenburg 1862. Richter, Umständliche aus zuverläßigen Nachrichten zusammengetragene Chronica der im Meißnischen Ober-Ertz-Gebürge gelegenen Königl. Churfl. Sächsischen freyen Berg-Stadt St. Annaberg nebst beigefügten Urkunden. Annaberg 1746. Ries, Adam. Rechenbücher, Gerechent Büchlein und Coß. (Die nähern Angaben folgen unten im Texte.) Sächsische Kirchengalerie. Bd. VIII. S. 99. (Artikel: Zwönitz.) Dresden 1842. Serapeum, Zeitschrift für Bibliothekswissenschaft, Handschriftenkunde und ältere Litteratur. Jahrg 1847. Nr. 10. Sterner, M. Prinzipielle Darstellung &c. Vogtländischer Anzeiger. Jahrg. 1880. Beilage zu Nr. 199. (Müller, J. Adam Riese.) Plauen i. V. 1880. Wappler, H. E. Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. (Im Programm des Gymnasiums zu Zwickau i. S.) Zwickau i. S. 1887. Westermanns Jahrbuch der Illustrierten deutschen Monatshefte. 15. Band. Märzheft. (Emsmann, Adam Riese und seine Methode zu rechnen.) Braunschweig 1864. Wilisch, Annaberger Schulchronik. (Manuskript.)

Von den zahlreichen Rechenmeistern des 16. Jahrhunderts ist Adam Ries, der Annaberger Rechenmeister, der bekannteste. Seine Rechenbücher waren noch im 17. Jahrhunderte die gebräuchlichsten. Und bis heute haben sich die auf ihn zurückzuführenden geflügelten Worte: „Zwei mal zwei ist vier!“ — „Nach Adam Riese!“ im Volksmunde erhalten. Das alles deutet wohl darauf hin, daß sich Adam Ries um das volkstümliche Rechnen der damaligen Zeit und darüber hinaus große Verdienste erworben haben muß. Zugleich spiegelt sich darin die Dankbarkeit des Volkes wieder.

Welches freilich die Verdienste Adam Ries' im besondern gewesen sind, darüber herrscht auch gegenwärtig noch viel Unklarheit. Es ist ihm ergangen, wie so manchem andern volkstümlichen Manne: man hat ihn zum Träger von Verdiensten gemacht, die ihm nicht zukommen, und dabei hat man seine wirklichen Verdienste übersehen. So spricht ihm eine landläufige Ansicht noch jetzt die Erfindung des Rechnens mit indisch-arabischen Ziffern, ja selbst des Zehnersystems zu.[1]) Nach andern soll

1) Pädagogische Warte a. a. O. S. 434.

er wenigstens den „Übergang zum dekadischen System“ gefunden oder die „Geschicktheit“ des Zehnersystems zum Rechnen erkannt haben.[2]) Auch hat man ihn den Verfasser des „ersten methodischen Rechenbuches“ genannt,[3]) oder angenommen, daß er einer der bedeutendsten Mathematiker Deutschlands gewesen sei u. dgl. m.

Aus unsern bisherigen Darlegungen geht deutlich hervor, daß von solchen und ähnlichen Verdiensten bei Adam Ries nicht wohl die Rede sein kann. Aus dem einfachen Grund nicht, weil alles, was damit auf ihn übertragen wird, bereits da war, als Ries sich eben anschickte, sein erstes Rechenbuch zu schreiben. In der an sich richtigen Voraussetzung, ein Mann wie Adam Ries könne nur Bedeutendes geleistet haben, sprach man ihm als Eigentum zu, was man bei ihm vorfand, was an sich bedeutend war und leicht in die Augen fiel. Ob es bei ihm zum erstenmale vorkomme, danach wurde selten gefragt. Und so entstand schließlich jenes Gemisch von Wahrheit und Dichtung, welches mit wenig Ausnahmen bis auf den heutigen Tag verhindert hat, den bedeutenden Mann so zu würdigen, wie er es verdient.

Sollen die wirklichen Verdienste, welche sich Adam Ries um den Rechenunterricht erworben hat, festgestellt werden, so gelingt dieses nur, wenn man seine Rechenwerke eingehend studiert und mit den vor und nach ihnen erschienenen Rechenwerken, sowie mit dem damaligen Stande des Rechenunterrichts überhaupt, sorgfältig vergleicht. Deshalb folgendes.

Adam Ries hat vier verschiedene gedruckte Rechenwerke und einige Handschriften hinterlassen.

Die vier gedruckten Rechenwerke sind, nach der Zeit ihres Erscheinens geordnet, folgende:[4])

1. „Rechnung auff der linihen | gemacht durch Adam Riesen vonn Staffel | steyn / in massen man es pflegt tzu lern in allen | rechenschulen gruntlich begriffen anno 1518. | vleysigklich vberlesen / vnd zum andern mall | in trugk vorfertiget.[5]) | . . . Getruckt zu Erffordt zcum | Schwartzen Horn. | 1525.“ |

Das Buch, in Oktavformat erschienen, besteht aus 44 Blättern, von denen 40 von A bis Fiij signiert, 4 aber unsigniert sind.[6]) Die Blatt-

2) Annaberger Wochenblatt a. a. O. Berlet, Neudruck 2c. a. a. O. S. 26.

3) Inschrift der Gedenktafel am Rathause zu Staffelstein.

4) Diese vier Rechenwerke erhielten wir durch die Güte der Verwaltung der Hamburger Kommerz-Bibliothek auf längere Zeit zur Einsicht. Die von uns denselben entnommenen Buchtitel sind zuverlässige. Durch | deuten wir das Ende einer Zeile an, während / ein im Texte selbst vorkommendes Satzzeichen ist.

5) Hier folgt ein Holzschnitt: Schüler, vor dem Rechenbrette sitzend.

6) Die Signierung der Blätter erfolgte damals nach dem Alphabete und durch beigefügte römische Ziffern. Letztere in der Form j, ij, iij, iiij, v, vj, u. s. f. Die Buchstaben zeigten die Bogen, die Ziffern die Blätter an. So bedeutet z. B. Av das 5. Blatt des 1. Bogens, Diij das 3. Blatt des 4. Bogens u. s. f. Hiernach müßte nun unser Buch von A bis Fiij 43 Blätter, mit den 4 unsignierten Blättern

höhe beträgt 14,5 cm, die Breite 9,5 cm. Der Satz, 25 Zeilen auf jeder Seite, ist 11 cm hoch und 7,2 cm breit. Am Ende des Buches steht in der damals üblichen Weise:

„Gedruckt zu Erffordt / durch || Mathes Maler. M. || CCCCC. xxv. Jar." ||

Zuletzt folgt noch einmal das Bild, welches sich schon auf der Titelseite befindet.

Aus dem Titel des Buches ergiebt sich zweierlei. Erstens steht fest, daß Adam Ries sein erstes Rechenbuch 1518 geschrieben hat und daß dasselbe 1525 in zweiter Auflage (das Exemplar, welches uns vorlag, gehört derselben an) erschienen ist. Von der ersten Auflage hat man bis jetzt nirgends ein Exemplar aufgefunden. Zweitens ist gewiß, daß Ries zuerst eine Anleitung zum „Linienrechnen" schrieb, also die Praxis der deutschen Rechenschulen berücksichtigte. Das that bekanntlich auch Jakob Kobel. Während aber Kobel nur römische Ziffern brachte, machte Ries durchweg von den indisch-arabischen Ziffern und von der Positionsschreibweise Gebrauch. Über beide verbreitet sich der erste Abschnitt seines Buches, welcher wie folgt beginnt:

„Numerirn".

„Heyßt zelln / lernt wie man ein yede zall schrey- || ben / erkennen vnd außsprechen soll / solt wis- | sen das zehen ziffer ader figurn seindt / damitt || mann ein yede zall schreybt / sie sey kleyn odder || groß / vnter welcher die ersten neun bedeutlich | seinn / werden also gezeychnet. 1 2 3 4 5 || 6 7 8 9. Vnd die zehendt bedeut alleyn || nichts / sonder wen sie andern furgesetzt [7]) wurd | macht sie die selbigen mehr bedeutten / wurdt || also geschriben. 0. [8]) Nun soltu wissen / das ein || ytzliche ziffer vnter obgeschriben zehen / an der | ersten stat gegenn der rechten hanndt / bedeut || sich selbest / An der andern stat gegen der ling- || ken handt souiell zehen / ann der dritten souiell || hundert / vnd an der vierden gegen der lingken || hand souiel tausent / das merck in diesen wor- || ten / eyns / zigk / hundert / tausent / vō der rechten || handt / zele gegen der lingken wie hye." |

zusammen 47 Blätter enthalten. In Wirklichkeit sind es aber nur 43 Blätter. Denn von Eiiij geht es gleich zu F über, Fiij steht an Stelle von Fiiij und — Aviij ist verloren gegangen. Das vollständige Buch hat sonach 44 Blätter enthalten, wie oben angegeben. Das Exemplar der Hamburger Kommerzbibliothek enthält nur 43 Blätter. Wenn nun vielfach 43 Blätter für das vollständige Exemplar angegeben werden, so ist der Fehler jedenfalls auf unser Exemplar zurückzuführen. Man zählte die Blätter desselben, ohne daß man den Sprung von Blatt Aviij zu B bemerkte. Solche aber, welche das Buch nicht in Händen hatten, schrieben die 43 einfach nach.

7) Wir sagen jetzt „angehängt". Ries sagt viel richtiger „furgesetzt", denn die erste Stelle steht rechts.

8) Der Name „Null" kommt bei Ries nicht vor. Er setzt für das Wort stets das Zeichen 0.

„Lingk					Recht"
	8	9	7	6	
	7	5	8	9	
	tausent	hundert	zigk	sich selb	

Nach dem „Numerirn" steht die Anweisung, wie man am Rechenbrette zu rechnen hat. Dann folgen Aufgaben und ihre Lösungen in der Reihenfolge der Spezies, deren Ries acht unterscheidet (einschließlich „Numerirn"), zuletzt noch Aufgaben für einige besondere Rechnungsarten. Und so ergeben sich folgende Abschnitte für sein Buch:

„Numerirn. Von der linihen. Addirn. Subtrahirn. Duplirn. Medirn. Multiplicirn. Diuidirn. Progressio. Detri. Von gebrochen.[9]) Wechsell. Gewandt. Sylber vnd golt rechnung. geselschafft. Stich.[10]) Resoluirung."

Erst vier Jahre später lehrte Ries in einem zweiten Buche auch das indisch-arabische Positionsrechnen. Der Titel dieses Buches lautet:

2. „Rechenung auff der linihen || vnd federn in zal / maß || vnd gewicht auff allerley || handierung / gemacht vnd zusamengelesen || durch Adam Riesen von Staffelstein Rechen- || meyster zu Erffurdt im. 1522. Jar. || Jtzt vff sant Annabergk / durch in || fleissig vbersehen || vnd alle ge- || brechen eygentlich gerecht- || fertiget / vnd zum letz / || ten eine hübsche vn / || derrichtung an- || gehengt." ||

Dieses zweite Rechenbuch hat genau dasselbe Format wie das erste, zählt aber 75 von A bis Kiij signierte Blätter und 1 unsigniertes Blatt, zusammen also 76 Blätter. Am Ende desselben steht:

„Gedruckt vnnd Volendet zu Erffordt || durch Mathes Maler zū schwar- || tzen Horn am abent Nicolay || ym Jar 1525."

Es liegt nahe, anzunehmen, daß die erste Ausgabe des zweiten Rechenbuches 1522 erfolgte[11]) und daß die Ausgabe von 1525 die zweite Auflage desselben ist, wenn auch der Titel nicht ausdrücklich auf den zweiten Abdruck (wie bei dem ersten Rechenbuche) hinweist und ein Exemplar der ersten Auflage bis jetzt nirgends aufgefunden worden ist.

Das zweite Rechenbuch wird gewöhnlich das „kleine Rechenbuch" oder das „Oktavbuch" genannt. Es hat von allen Rechenbüchern unseres Adam Ries die meisten Auflagen erlebt (19 aus dem sechzehnten und 10 aus dem siebzehnten Jahrhundert sind bekannt) und hauptsächlich da-

---

9) Von gebrochenen Zahlen, Bruchzahlen (Brüchen).

10) Stich = Tausch (Warentausch).

11) In dem unter Nr. 4 aufgeführten Quartbuche heißt es auch mit Beziehung auf das zweite Rechenbuch Blatt 105a: „In meinem vorigen Büchlein / so 1522 in Erffurdt getruckt."

zu beigetragen, den Ruhm seines Verfassers auszubreiten und sicher zu stellen. So ist es auch mehrfach von andern nachgedruckt und erweitert worden. Bekannt sind z. B. Ausgaben von Erhart Helm in Frankfurt a. M. und Sebastian Curtius (Kurtz) in Nürnberg. Die alte Bezeichnung: „Rechnung auf Linien und Federn in allerlei Hantierung" kehrt aber fast überall wieder.

Nach Auswahl und Anordnung des Stoffes deckt sich das zweite Rechenbuch im großen und ganzen mit dem ersten. Nur daß in demselben das „Linienrechnen" kurz (auf 15 Seiten) erledigt und danach ausschließlich das „Positionsrechnen" oder — wie es Ries nennt — die „Rechenung auff der federn" gelehrt wird. Die Darstellungsformen der letztern unterscheiden sich wenig oder nicht von denen der andern Rechenbuchverfasser. Es sind bei Addition, Subtraktion und Multiplikation die bis heute üblichen Formen, bei der Division die abweichende Petzensteinersche Form.[12])

Nach dem „Oktavbuch" gab Ries in Druck:

3. „Ein Gerechent Büch‧‖lein / auff den Schöffel / Eimer / ‖ vnd Pfundtgewicht / zu eh‧‖ren einem Erbarn / Weisen ‖ Rathe auff Sanct An‧‖nenbergk. ‖ Durch Adam Riesen. ‖ 1533 ‖ Zu Leiptzick / hatt gedruckt diss Büchlein / Melchior Lotter. ‖ Volendet vnd ausgangen am abendt ‖ des Newen Jars ‖ 1536." ‖

Das „Gerechent Büchlein" ist ein Quartbuch, 19 cm hoch und 15 cm breit, der Satz (24 Zeilen auf der Seite) 15 cm hoch und 9,5 cm breit. Es zählt 79 von A bis B_3 signierte Blätter. Der Druck ist ein sehr schöner.

Als Inhalt bietet es eine „Vnderrichtung der Maß" und zahlreiche Tabellen, deren wichtigste sich auf das Verhältnis des Brotpreises zum jeweiligen Kornpreise beziehen. Es ist also kein eigentliches Rechenbuch, sondern ein Rechenknecht, ein „Faullenzer" nach damaliger Bezeichnung. Die in ihm von Ries berechneten Tabellen bildeten die Grundlage für die nachmals weit und breit berühmte „Annaberger Brotordnung", eine Einrichtung, welche mehrfach Nachahmung fand, so z. B. 1543 in Zwickau und Naumburg, woselbst Ries persönlich die erforderlichen Anweisungen erteilte.[13])

Vierzehn Jahre später erst ließ Ries sein Hauptwerk erscheinen:

4. „Rechenung nach der ‖ lenge / auff den Linihen ‖ vnd Feder. ‖ Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportio‧‖nes / Practica genant / Mit grüntlichem ‖ vnterricht des visierens. ‖ Durch Adam Riesen. ‖ im 1550. Jar. ‖ . . .[14]) Cum gratia & priuilegio ‖ Caesareo." ‖

12) Vergleiche das Beispiel auf Seite 21.

13) Zu vergleichen: Brief des Fritz Laytsch in der Obererzgeb. Z. a. a. O.

14) Hier folgt das bekannte Bild von Adam Ries mit der Umschrift: ANNO 1550 ADAM RIES SEINS ALTERS IM LVIII. Dabei sein „Handwerkszeichen",

Am Ende steht:

„Gedruckt zu Leipzig durch Jacobum Berwalt.“

Das Buch stimmt im Formate mit dem vorigen überein, ist also ein Quartbuch, der Satz desselben besteht aber aus 31 Zeilen auf der Seite, hat eine Höhe von 14,4 cm und eine Breite von 10,4 cm. Die vier ersten Blätter sind ohne Blattzahlen, doch ist das zweite mit Aij, das dritte mit Aiij bezeichnet. Vom fünften Blatte ab stehen oben die Blattzahlen 1 bis 196. Das ganze Buch zählt demnach 200 Blätter.

So liegt hier das dritte der Rechenbücher von Adam Ries vor. Gewöhnlich wird es das „große Rechenbuch“ oder das „Quartbuch“ genannt. Im Manuskripte vollendet hatte es Ries bereits 1525, wie Doppelmayr berichtet, also in demselben Jahre, in dem seine beiden ersten Rechenbücher in neuer Auflage erschienen. Weshalb er mit der Drucklegung seines Hauptwerks so lange zögerte, begreift sich leicht: es gab damals noch keine Verlagsbuchhändler, und unserm Ries fehlte es an Geld, um das umfängliche Buch auf eigene Kosten drucken zu lassen. Kein Geringerer aber als der Kurfürst Moritz von Sachsen war es, der ihm 1550 das erforderliche Geld vorstreckte. Ihm widmet daher auch Adam Ries sein Buch und bemerkt ausdrücklich: „Durch E. Ch. F. G. gnedigist vorstreckung / zu edirunge solchs buchs.“ [15])

Das Buch verteilt seinen Stoff auf vier Abschnitte:

a) „Inhalt auff den Linien.“ Blatt 2—46.
b) „Inhalt auff der Feder.“ Blatt 47—105.
c) „Inhalt der Practica.“ Blatt 106—181.
d) „Inhalt des Viesierens.“ Blatt 182—196.

Es behandelt also dieselben Gegenstände, welche die beiden ersten Rechenbücher gesondert behandeln, dazu aber noch die „Practica“, sowie das „Viesieren“. — Unter „Practica“ versteht Ries das Rechnen mit Vorteilen, welches damals besonders die Italiener ausbildeten (vergl. „Welsche Praktik“). „Viesieren“ ist die Ausmessung und Berechnung des kubischen Inhalts der Fässer unter Benutzung eines Stabes, der Visierrute. [16]) — „Rechenung nach der lenge“ nennt er das Ganze. Das will besagen, daß hier alles eingehend und gründlich, ausführlich behandelt wird.

---

ein Kreuz mit Neunerprobe: $\begin{smallmatrix} & 4 & \\ 2 & \times & 2 \\ & 4 & \end{smallmatrix}$. Manche Rechenmethodiker scheinen diese „Proba“ der Alten gar nicht zu kennen. Denn Böhme a. a. O. setzt $\begin{smallmatrix} & + & \\ 2 & \times & 2 \\ & 4 & \end{smallmatrix}$ und Jänicke a. a. O. nach ihm in der ersten Auflage auch $\begin{smallmatrix} & + & \\ 2 & \times & 2 \\ & 4 & \end{smallmatrix}$, in der zweiten aber $\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 2 & \times & 2 \\ & 4 & \end{smallmatrix}$. Zugleich erblickt Jänicke in der Figur irrigerweise das Wappen unseres Rechenmeisters.

15) Blatt Aiij.

16) Vergl. S. 23.

Das eigentlich Neue des Quartbuches bringen erst die beiden letzten Abschnitte. Doch auch die beiden ersten enthalten vieles, was in den Oktavbüchern nicht vorkommt. So bringt z. B. gleich der erste Abschnitt („Inhalt auff der Linien") folgende bemerkenswerte methodische Ansicht:[17])

„Zum Leser. ‖ Freundlicher lieber Leser / ‖ Ich habe befunden in vnder wei ‖ sung der Jugent das alle weg / die ‖ so auff den linien anheben des Re ‖ chens fertiger vnd laufftiger wer ‖ den / den so sie mit den ziffern die Feder genant an ‖ fahen / In den Linien werden sie fertig des zelen / ‖ vnd alle exempla der kauffhendel vnd hausrech ‖ nung schöpffen sie einen besseren grund / Mügen ‖ als denn mit geringer mühe auff den ziffern jre ‖ Rechnung volbringen / hierumb hab ich bey mir ‖ beschlossen / die Rechnung auff den linien zum ‖ ersten zu setzen / Wil die selbe nach der leng ‖ erkleren / Hiemit ein jeder andere Rech ‖ nung / so in diesem buch nachuol ‖ gent komen / nicht vberdrüs ‖ sig werd zu lernen / Son ‖ dern die mit lust ‖ vnd frölickeit ‖ begreiffen ‖ müge." ‖

Beachtenswert ist von diesem Standpunkte aus auch die Folge aller drei Rechenbücher. Es war keine zufällige, sondern eine wohlvorbedachte. Daß Ries übrigens an seinem „Quartbuche" auch nach 1525 noch arbeitete, liegt nahe. Und so erreichte er es auch, daß dasselbe nach Inhalt und Form das beste Rechenbuch seiner Zeit wurde. Wer über den Inhalt dieses Buches verfügte, galt für einen Rechenmeister. „Man achtete sein Buch vor gar künstlich, daß man sagte, wer Riesens Exempla solvieret, der soll für einen Meister in der Rechenkunst gelten."[18]) Und der bedeutendste deutsche Arithmetiker des sechzehnten Jahrhunderts, Michael Stifel, entlehnte Aufgaben von Adam Ries unter dem Zugeständnisse, die seinigen „möchten woll nicht so holdselig sein als Adams Riesen exempla."[19])

Wir haben nach diesem nur noch des handschriftlichen Nachlasses des Meisters, soweit derselbe in das Gebiet der Rechenlitteratur einschlägt, zu gedenken. Dazu gehört zunächst ein 534 Seiten starker Sammelband in Folio, welcher sich in der Kirchen- und Schulbibliothek des Städtchens Marienberg im sächsischen Erzgebirge befindet und der den von anderer Hand geschriebenen Titel führt:

5. „Adam Riesens ‖ seel: weiland Rechenmeisters zu St. Annaberg. ‖ Anno 1524 auffgesetzte und mit eigener Hand geschriebene / aber niemals publicirte ‖ Coß." ‖

Danach heißt es:

„So erstlich / nach seinem ableben / seinem Sohn Abraham Riesen dem ältern / Churf. Sächß. in Mathematischen und Münzsachen bestalten / hernach in Mathematischen Künsten gewesen Discipulo Lucas Brunnen / Kunst-Cämmerern / und aus deßen Ver-

17) Blatt 1a und 1b.
18) Doppelmayr a. a. O. S. 169.
19) Stifel, Deutsche Arithmetik. 1545. Bl. 17.

laßenschafft seinem Successore Theodosio Haseln / Churf. S. Canzley Secretario und auch Kunst Cämmerern / zukommen / von welchem sie mir endesbenannten ao 1656 verehret und neben etzlichen drgleichen Fragmentis 1664 also wie vor Augen zusammen gehefftet worden / Denjenigen nun dem diese collectania nach meinem Tode zuhanden kommen werden / ersuche ich hiermit / daß er selbige nicht allein der Kunst und Autori zu ehren / sondern auch wegen der antiquität / in eine Bibliothec oder einen solchen orth bringen wolle / da es zu einem gedächtnis erhalten werden möge, || Dreßden den 6. May Anno 1664 | Martin Kupffr / bestal || ter Schreib- und Rechenmeister | daselbsten.“ [20])

Schließlich ist noch zu erwähnen:

6. Eine „Satzungstafel“, welche Adam Ries 1543 für den Rat zu Zwickau anfertigte, als derselbe nach dem Annaberger Vorbilde eine neue Back- und Mahlordnung erließ. Die „Satzungstafel“, welche im Zwickauer Ratsarchive aufbewahrt wird, ist 28 Blatt in Folio stark und sehr deutlich von Ries selbst geschrieben. Daß sie sich bewährte, darf man annehmen; denn noch zu Anfang unseres Jahrhunderts bildete sie die Grundlage der Zwickauer Brotordnung.

Bei weitem wichtiger als die „Satzungstafel“ ist selbstverständlich die unter 5. genannte Handschrift. Mit dieser beschäftigt sich denn auch die Berletsche Programmarbeit von 1860.[21]) Danach besteht der fragliche Sammelband aus folgenden vier Teilen:

a) Einleitung in die Rechenkunst überhaupt, Seite 1—109;
b) die Coß oder Algebra, Seite 109—327;
c) die Umarbeitung der Coß mit vorausgehender Lehre der Zeichen, Seite 327—507;
d) Verdeutschungen aus den Datis Jordani, Seite 507—534.

Allerdings beziehen sich die Berletschen Mitteilungen fast nur auf den zweiten Teil, die Coß in ihrer ersten Bearbeitung. Und selbst für diesen können sie, wie wir uns überzeugt haben, Anspruch auf Vollständigkeit nicht erheben. Jedenfalls aber reichen sie aus, sich ein Bild von der Art und Weise, wie Ries seinen Gegenstand behandelte, zu machen.

20) Wie Rebhuhn in der Litt. Beil. Nr. 11 der Päd. Z. a. a. O. nachweist, ging die Handschrift nach Kupffer in den Besitz des „Weyland Churf. Sächß. Secret. Mathem. und „Kunst-Kämmerer in Dreßden“ Tobias Beutel über. Letzterer teilt nämlich in seiner 1702 in achter Auflage erscheinenden Arithmetik ein Verzeichnis von Schriften mit, welche er besitzt. Darunter befindet sich als Nr. 10 unsere Handschrift.

21) Berlet a. a. O. (Programm und Neudruck.) Derselbe hat sich durch seine Mitteilungen den Dank vieler verdient, umsomehr, als es den Anschein gewinnt, als sollte der Marienberger Sammelband weiterhin gar nicht mehr ausgeliehen werden. Sogar die Durchsicht desselben am Aufbewahrungsorte wird neuerdings sehr erschwert, denn man gestattet sie nur noch im Beisein eines Ratsbeamten. Mag diese Maßregel immerhin beweisen, daß man das Manuskript sorgfältig hütet; zuverlässigen Personen gegenüber, welche wissenschaftliche Zwecke verfolgen, sollte man etwas mehr Entgegenkommen zeigen.

Auf den Inhalt des Marienberger Sammelbandes an dieser Stelle näher einzugehen, halten wir für nicht angezeigt. Denn einerseits gehört dessen hauptsächlicher Inhalt, die Coß oder Algebra, d. i. die Lehre von den Gleichungen, nicht in das Bereich des Volksschulunterrichts. Anderseits ist durch neuere Forschungen erwiesen, daß die frühere Wertschätzung der Handschrift, wie sie unter anderm auch in der Berletschen Programmarbeit noch zu Tage tritt, eine sehr übertriebene ist.[22]) Was Ries im ersten Teile bietet, findet man auch in seinen Rechenbüchern. Die übrigen drei Teile aber bringen nicht viel mehr als die Übersetzung von Aufgaben, welche Ries — übrigens nach seinem eigenen Zugeständnis — ältern lateinischen Schriften entnahm. Er wollte diese Aufgaben seinen des Lateinischen nicht oder doch nicht genügend mächtigen Schülern zugänglich machen.

Die vorstehend aufgeführten sechs Schriften enthalten alles, was Adam Ries jemals über Rechnen und Rechenunterricht geschrieben und hinterlassen hat. Aus ihnen muß sich also auch ergeben, was derselbe als Rechenmeister leistete. Und zwar in doppelter Hinsicht. Es muß sich zeigen, ob und in welchem Umfange er das Rechnen sachlich fortentwickelte. Und es muß sich zeigen, ob und in welchem Grade er den Rechenunterricht methodisch förderte. Prüfen wir also seine Stoffe und seine Methode.

Die Stoffe, welche Adam Ries bearbeitete, sind dieselben, denen wir auch anderwärts begegnen. Noch ehe Ries geboren ward, wurden sie von Wagner, Petzensteiner und Widmann bearbeitet. Was bei diesen aber noch fehlte, das fügten die nächsten Autoren bis zum Jahre 1518, dem Erscheinungsjahre des ersten Rechenbuchs von Ries, hinzu. So hatte man die obenerwähnten acht Spezies in ganzen und gebrochenen Zahlen, die Regeldetri mit ihren mancherlei Anwendungen, das Rechnen mit Vorteilen (die Praktika), Gold- und Silberrechnung, Gesellschafts- und Mischungsrechnung, Stich (Tausch), die Regula falsi u. dgl. m. Dazu die dem damaligen Handel und Verkehre entsprechenden Sachgebiete. Der Inhalt der Marienberger Handschrift geht nach dem, was vorhin darüber bemerkt wurde, auch nicht darüber hinaus. Was aber das „Gerechent Büchlein" und die „Satzungstafel" betrifft, so können diese hier überhaupt nicht in Betracht kommen.

Das scheint nun vorerst nicht viel mehr zu sein als ein Nachweis, daß bei Ries dieselben Rechnungsarten oder Kapitelüberschriften vor-

22) Hierüber ist namentlich Wappler a. a. O. zu vergleichen. Nach ihm hat es keinen Sinn, jetzt noch anzunehmen, die „Coß" hauptsächlich habe den Ruhm von Ries begründet. Ja, wir behaupten ganz einfach: Nicht die bedeutendste, sondern die schwächste Leistung von Ries ist die Coß. Und Ries selbst hat sie offenbar als solche betrachtet. Denn wie käme er sonst dazu, dieselbe vollständig umzuarbeiten? Wie käme er namentlich dazu, in dieser Umarbeitung noch viel mehr als zuvor die Schriften anderer Cossisten zu verwerten? Hätte er auch nur gleichwertiges Eigenes zu bieten gehabt, er würde kein Fremdes „zusammengelesen" haben. Und das mag schließlich auch der Hauptgrund gewesen sein, daß die „Coß" von Adam Ries ungedruckt blieb.

kommen wie bei den andern Rechenbuchverfassern. Aber es erstreckt sich diese Übereinstimmung auch auf alle darunter begriffenen Einzelheiten, wie genaue Vergleichungen erwiesen haben. Und so darf das Ergebnis der bezüglichen Untersuchungen kurz und bündig lauten:

Adam Ries hat das Rechnen in keinem Stücke sachlich fortentwickelt.[23])

Damit ist nun schon entschieden, auf welchem Gebiete wir die wirklichen Verdienste von Adam Ries zu suchen haben. Nicht die Fortentwickelung der vorhandenen Stoffe, nicht die Auffindung neuer Stoffe ist es, was Adam Ries groß gemacht hat, sondern die Art und Weise der Darbietung der vorhandenen Stoffe, die methodische Behandlung dieser Stoffe. Adam Ries war kein großer Mathematiker, er war ein großer Methodiker seiner Zeit. Ja, wir behaupten: Adam Ries war der größte deutsche Rechenmethodiker des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts. Und fast möchte es scheinen, als ob das deutsche Volk dieses geahnt hätte. Denn wenn dasselbe alle Rechenmeister und Mathematiker jener Zeit vergißt, nur Adam Ries nicht, so ehrt es denselben unbewußt als Methodiker, als den Praeceptor Germaniae auf dem Gebiete des Rechnens.

Schon die Auswahl und Anordnung des Rechenstoffes, sofern wir darunter die einzelnen Aufgaben nach Form und Inhalt verstehen, verrät den mit viel Geschmack und Takt begabten Praktiker. Wie sehr Ries damit das Richtige für seine Zeit getroffen hatte, das bezeugt kein Geringerer als der größte deutsche Arithmetiker jener Zeit, Michael Stifel, in den schon erwähnten Worten: „Sollicher Exempeln wie ich yetzt oben hab gesetzt und gedichtet / wölt ich woll vil machen / aber sie möchten woll nicht so holdselig sein als Adams Riesen exempla. Dise haben mir sonderlich gefallen alle nach einander zu setzen und keins auszulassen.“

Ries unterscheidet sodann sehr scharf zwischen dem, was sich für Anfänger und Fortgeschrittene eignet. Hier begegnen wir der Befolgung einiger didaktischen Grundsätze, welche noch heutigen Tages Geltung haben: Vom Leichten zum Schweren! Vom Einfachen zum Zusammengesetzten! Vom Konkreten zum Abstrakten! Von der Anschauung zum Begriffe! —

In diesem Sinne genommen, erscheint auch die Aufeinanderfolge seiner drei Rechenbücher bedeutungsvoll. Das erste Rechenbuch enthält nur das anschauliche Linienrechnen, von dem Ries am Anfange seines dritten Rechenbuches („Rechenung nach der lenge“) sagt: „Ich habe befunden in vnderweisung der Jugent das alle weg / die so auff der linien anheben des Rechens fertiger vnd laufftiger werden / den̄ so sie mit den ziffern die Feder genant anfahen . . . hierumb hab ich bey mir beschlossen / die Rechnung auff den linien zum ersten zu setzen“ . . .[24]) Das zweite

23) Zu demselben Ergebnisse kommen: Rebhuhn (Päd. Zeit.) a. a. O. und Sterner (Bayerland) a. a. O.

24) Vergl. S. 31.

Rechenbuch bringt das an die Denkkraft des Schülers schon höhere Anforderungen stellende Federrechnen, das Zifferrechnen, also das schriftliche Rechnen im engern Sinne. Das dritte Rechenbuch, das Quartbuch, fügt die Praktika hinzu, das Rechnen mit Vorteilen, welches auf Abkürzungen, Ergänzungen, Übertragungen u. dgl. m. beruhte[25]) und die Beherrschung des jedesmaligen Normalverfahrens, überhaupt ein reiferes Verständnis und größere Fertigkeit voraussetzte.

Im vorigen liegt bereits, daß es Ries mit der Grundlegung seines Unterrichts sehr ernst nimmt. Er übereilt da nichts; sein Schüler muß in den Elementen zur vollen Klarheit gelangen, ehe er ihn weiterführt. Deshalb kehrt dieselbe Sache bei ihm auch oft in verschiedener Form wieder, und solche Punkte, die ihm als Hauptpunkte gelten, wie z. B. das Einsmaleins, läßt er mit aller Wucht auftreten. Er sorgt für Festigkeit und Haltbarkeit des Erlernten. Hierzu dient ihm besonders die fleißige Wiederholung praktisch wichtiger Rechenfälle. Darin entwickelt Ries ein ganz außerordentliches Geschick. Er versteht es, innerhalb des Neuen das Alte zu wiederholen, er kennt also bereits, was wir jetzt immanente Repetition nennen. So ist er seines Erfolges aber auch von vorn herein gewiß, und sein Selbstbewußtsein ist kein geringes. Mit Beziehung auf die Nürnberger Rechenschulen sagt er z. B.: „Vnd so sie alle fragstuck Im buchlein gewist vnd machn habn mugenn / Nach dem sie außgelerntt / begibt sich so ein kleine Zeit vorgehet / sie ir buchlein Zuhanden Nemen wenigk exempel machn ader rechn mugenn.“ [26])

So konnte sich Ries auch an Aufgaben wagen, die andere wohl bleiben ließen. Am Ende seiner Coß bemerkt er z. B.: „Vorfertigett Am Freytag Nach Judica im 1524 Jar, Vnd Zum ersten gelernett Heinrich von Elterleinß sohn eynem knaben bey eylf Jarnn.“ Dabei weiß er sich stets klar, meist auch kurz und bündig auszudrücken; sein Lehrton ist ein angenehmer, den Leser anmutender, gewinnender. Langweilig ist Ries in seinen Unterrichtsstunden wahrscheinlich niemals geworden.

Obwohl Ries da, wo es not thut, sehr ausführlich ist, so z. B. bei jeder Grundlegung, weiß er doch übrigens seinen Lehrstoff stets auf das rechte Maß zu beschränken und zwischen der Stoffmenge der einzelnen Kapitel das Gleichgewicht herzustellen. Dieses zielbewußte Maßhalten kennzeichnet den reifen Methodiker, denn andernfalls würden auch bei ihm, wie bei den meisten seiner Zeitgenossen, Auswüchse, Liebhabereien u. dgl. m. hervortreten. So heißt es aber z. B. im Quartbuche:[27]) „Wil es hiemit bleiben lassen / ich hab diese forteil vnd behendigkeit so

25) Blatt 106a heißt es: „Rechenung / mit forteil vnd behendigkeit die practica genandt durch Adam Riesen. Alhie in diesem Büchlein / die practica genandt / welche geschicht durch vorgleichung einer zal gen der andern / werden der meiste teil gebraucht volgende vier Spezies / als Summirn Subtrahirn / Multiplicirn / vnd Diuidirn / die lerne mit vleis also.“

26) Aus der „Widmung“ der Coß (Marienberger Handschrift).

27) Rechenung nach der lenge 2c. Blatt 182a.

in rechnung gebraucht werden / sampt andern exempeln auff das einfeltigst vnd klerlichst angezeigt es werden auch wol mehr fragen zu setzen gewest / hab die hiemit des dings nicht souil wurde vnderwegen gelassen / alle anhebenden wolln mit diesen gesatzten / ein genügen haben."

Man sagt gewöhnlich, Ries verfahre dogmatisch, er beginne mit der Regel und lasse zahlreiche Aufgaben folgen, um die Anwendung der Regel geläufig zu machen, von einer Begründung oder Ableitung der Regel wisse er nichts u. dgl. m.[28]) Dasselbe könnte man von vielen der heutigen Rechenbuchverfasser dann aber doch auch sagen, wenn man weiter nichts als ihre Rechenbücher für Schüler kennt. Gleichwohl fällt es niemand ein, dieses zu thun, anzunehmen, daß die in den Rechenbüchern vorkommenden Regeln und Gesetze den Schülern ohne alle Vermittelung dargeboten werden sollen. Warum soll da nun Ries durchaus das Fertige, was seine Bücher bringen, auch im Unterrichte als solches dargeboten haben? Es liegt doch viel näher, anzunehmen, daß er die Regeln seiner Bücher im mündlichen Verkehre mit seinen Schülern entwickelte, daß dieselben also auch bei ihm Unterrichtsergebnisse waren, welche in seine Bücher nur Aufnahme fanden, um spätere Wiederholungen zu erleichtern. Zu dieser Annahme berechtigen uns jedenfalls seine bereits erwähnten methodischen Grundsätze.

Als die Krone der Unterrichtsgrundsätze unseres Rechenmeisters möchten wir aber doch das hinstellen, was er am Ende seiner „Zum Leser" überschriebenen Einleitung zum Linienrechnen im „Quartbuche" sagt. Daselbst heißt es: „Wil dieselbe (d. h. die Linienrechnung) nach der leng erkleren / hiemit ein jeder andern Rechnung /, so in diesem Buch nachuolgent komen / nicht vberdrüssig werd zu lernen / Sondern die mit lust und frölickeit begreiffen müge."[29])

Das ist dasselbe, was dreihundert Jahre später Herbart, der philosophische Pädagog, als ein Hauptkennzeichen des „erziehenden Unterrichts" erachtet, der „frohe Fleiß". In der That, ein Streben, welches sich die höchsten Ziele steckt in einer Zeit, in welcher an eine Pädagogik im heutigen Sinne noch nicht entfernt zu denken war, in einer Zeit, in welcher eine oft ausgesucht harte Behandlung des Lernenden seitens des Lehrenden die Regel bildete.

Es möchte nach diesem noch zweierlei wissenswert erscheinen: Lebensgang und Schreibweise des Namens unseres Rechenmeisters. Denn was man da und dort über sein Leben findet, ist im ganzen eigentlich recht wenig. Was aber seinen Namen betrifft, so wird derselbe bis heute auf verschiedene Art geschrieben. Deshalb noch folgendes.

Über das Leben von Adam Ries könnte mehr vorliegen, wenn man nicht 30 Jahre hindurch versäumt hätte, das, was Berlet seiner-

---

28) Berlet, Neudruck 2c. a. a. O. S. 9.
29) Rechenung nach der lenge 2c. Blatt 1a.

zeit veröffentlichte,[30]) zu ergänzen und zu berichtigen. Schon die drei Rechenbücher würden manchen wertvollen Beitrag geboten haben, hätte man nur deren Aufgaben genauer studiert. Weiteres Material würden die noch übrigen Schriften von Ries geliefert haben. Auch hätte man in diesem und jenem älteren Buche gelegentliche Hinweise auf ihn, Briefe, Namenverzeichnisse u. dgl. m., welche Beachtung verdienen, finden müssen. Leider ist es nicht möglich, auf alles dieses hier näher einzugehen. Und so beschränken wir uns besser, indem wir uns vorbehalten, an anderer Stelle ausführlich auf den Gegenstand zurückzukommen,[31]) auf wenige kurze und sichere Angaben.

Ries wurde 1492 geboren.[32]) Zum erstenmale tritt er 1509 in Zwickau i. S. auf. 1522 ist er Rechenmeister in Erfurt. 1524 siedelt er nach Annaberg über. Hier ist er Bergbeamter, nämlich 1528 Rezeß- und 1530 Gegenschreiber. 1559 stirbt er.

Eigentümlich ist es unserm Rechenmeister mit seinem Namen ergangen. Jetzt spricht und schreibt man gewöhnlich Adam Riese. Doch nicht weniger als zwölf Formen seines Namens lassen sich nachweisen. Es sind folgende: Riese, Rise, Ryse, Rieße, Riße, Ryße, Ries, Ris, Rys, Rieß, Riß, Ryß. Berlet entschied sich auch neuerdings wieder für Riese. Dieselbe Form findet man auf der Gedenktafel über der Eingangsthür des Staffelsteiner Rathauses. Dagegen braucht Böhme die Form Ryse, und Sterner ist von Riese (Prinzipielle Darstellung ꝛc.) zu Rys (Bayerland) übergegangen. Bei Brockhaus und Meyer kommt Ries vor. Die übrigen Formen findet man auf verschiedenen Ausgaben des „Kleinen Rechenbuchs“, wie z. B. Rise bei Curtius (1629), oder in andern Büchern aus älterer Zeit, wie z. B. Rieße in Richters Chronik, Rieß bei Arnold u. s. w.[33]) Für welche Form hat man sich zu entscheiden?

Wir halten dafür, daß in jedem derartigen Falle maßgebend sein muß, wie sich ein gebildeter, schriftkundiger Mann selbst geschrieben hat. Unser Rechenmeister aber hat seinem Namen niemals ein „e“ angehängt, wenn er denselben im Nominative brauchte.[34]) Dadurch allein schon kommen sechs Formen in Wegfall, unter ihnen die übliche Form „Riese“. Doch auch von den noch übrigen sechs Formen sind weitere vier auszuschalten, denn unser Rechenmeister schrieb sich nur — Rieß und Ries.

---

30) Berlet, Neudrucke ꝛc. a. a. O.

31) Vergl. S. 24.

32) Gewöhnlich wird das Städtchen Staffelstein in Oberfranken als Geburtsort von Ries genannt. Ganz zweifellos ist diese Annahme indessen noch nicht. So, um nur eins zu erwähnen, erhebt auch das fast in der Mitte zwischen Annaberg und Zwickau liegende sächsische Gebirgsstädtchen Zwönitz Anspruch darauf, Ries' Vaterstadt zu sein.

33) Vergleiche hierzu die Litteraturangaben S. 24 f.

34) Das „e“ ist durch die Beugungsformen hinzugekommen: Ries — Riesens — Riesen — Riesen. Am häufigsten wurde der Name im Accusativ gebraucht, besonders in Buchtiteln.

Davon haben wir die letzte Form angenommen, weil ihr Träger im reifern Mannesalter zu ihr überging.[35])

Rückblick. Unter allen deutschen Mathematikern und Rechenmeistern des sechzehnten Jahrhunderts ist Adam Ries, der Annaberger Rechenmeister, der bekannteste. Er trat auf, als der Kampf zwischen der altrömischen und indisch-arabischen Rechenweise zur Entscheidung drängte. Durch seine Rechenbücher trug er mehr als irgend einer seiner Zeitgenossen zur Verbreitung der letztern im deutschen Volke bei. Ries gab 1518 ein Oktavbuch für Linienrechnen, 1522 ein ebensolches für Zifferrechnen in Druck. Sein bedeutendstes Werk ist „Rechenung nach der lenge". Dasselbe verbreitet sich über Linien- und Zifferrechnen ausführlich, wurde bereits 1524 vollendet, erschien aber erst 1550 als stattlicher Quartband. Außerdem besitzen wir von Ries noch eine Druckschrift, welche sich „Ein Gerechent Büchlein" nennt und zahlreiche Tabellen, darunter besonders eine Brotordnung, enthält. Dazu kommen noch mehrere Handschriften: ein aus vier Abteilungen bestehender Sammelband in der Marienberger Kirchen- und Schulbibliothek und die „Satzungstafel", eine Brotordnung für die Stadt Zwickau i. S. Den in der Marienberger Handschrift vorkommenden beiden Bearbeitungen der „Coß" kann eine größere Bedeutung nicht mehr beigelegt werden, seitdem sich herausgestellt hat, daß sie im wesentlichen nur Übersetzungen lateinischer Schriften sind.

Eine allseitige Würdigung der Verdienste, welche Adam Ries zukommen, zeigt zunächst, daß derselbe das Rechnen in keinem Stücke sachlich weitergebildet hat. Was er in seinen Schriften behandelt hat, das haben vor ihm schon andere behandelt. Weiter aber ergiebt sich, daß Adam Ries der bedeutendste deutsche Rechenmethodiker des 16. und 17. Jahrhunderts ist. Das zeigt sich schon in der Auswahl und Anordnung des Rechenstoffes. Mehr noch in der strengen Befolgung einer Reihe didaktischer Grundsätze, welche noch heute gelten, und in dem weisen Maßhalten bei Bestimmung der einzelnen Stoffmengen. Ganz besonders aber in dem bewußten Streben, seinen Unterricht so zu gestalten, daß „froher Fleiß" eine Frucht desselben werde.

Der Lebensgang von Adam Ries bedarf in vielen Stücken noch der Ergänzung und Berichtigung. Über die richtige Schreibweise seines Namens können aber keine Zweifel mehr bestehen, seitdem man weiß, daß er sich im reifern Mannesalter Adam Ries unterzeichnete.

§ 4.

Vom Regelrechnen zum Rechnen mit Einsicht und Begründung.

Litteratur.[1]) Adam, Geschichte 2c. Allgemeine deutsche Biographie 2c. Basedow, Überzeugende Methode der auf das bürgerliche Leben angewandten Arithmetik. 1763. Beutel, T. Arithmetica. 8. Aufl. Leipzig 1702. Biermann,

35) Die Widmung des „Gerechent Büchlein" im Jahre 1533 hat die Unterschrift: „E. E. Weißheit. Vndertheniger Burger Adam Ries."

1) Die in den vorhergehenden Paragraphen schon aufgeführten Schriften werden hier nur kurz angedeutet.

Leitfaden zu einem auf den Verstand wirkenden Unterricht im Rechnen für sich bildende Lehrer des Rechnens. Hannover 1792. Biermann, Anleitung zum Rechnen im Kopfe ohne allen Gebrauch von Schreibmaterialien. Hannover 1795. Busse, F. G. Gemeinverständliches Rechenbuch für Schulen. 4. Aufl. Leipzig 1808. (1. Aufl. 1786.) Busse, F. G. Anleitung zum Gebrauche eines gemeinverständlichen Rechenbuches &c. Leipzig 1786. Clausberg, Ch. Demonstrative Rechenkunst. 1732. Comenius, J. A. Große Unterrichtslehre (Didactica magna). Bearbeitet von J. Beeger und Fr. Zoubek. Leipzig 1864. Doppelmayr, Hist. Nachricht &c. Elend, B. Einleitung zur Arithmetischen Wissenschaft zum Gebrauch der Schulen. 1724. Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland. 1877. Heppe, Geschichte des deutschen Volksschulwesens. 1858—60. Hübsch, Arithmetica Portensis. 1748. Jänicke, E. Geschichte &c. Kästner, A. G. Geschichte &c. Kästner, Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie. Göttingen 1758. Lindner, G. A. Encyklopädisches Handbuch der Erziehungskunde. Wien und Leipzig 1884. Niemeyer, A. H. Grundsätze der Erziehung und des Unterrichts. Herausg. von W. Rein. Langensalza 1884. Overberg, Anweisung zum zweckmäßigen Schulunterricht für die Schullehrer im Fürstenthum Münster. Münster 1793. 8. Aufl. 1844. Paricius, G. H. Burgern &c. in Regensburg, Praxis Arithmetices, oder gründliche Anweisung, worinnen die im gemeinen Leben und Wesen anschicklich — und dienliche Rechenkunst &c. deutlich gezeigt wird &c. Regensburg 1706. Pescheck, Ch. Anfahender Rechenschüler. Zittau 1714. Pescheck, Ch. Allgemeine deutsche Rechenstunden. Zittau 1723. Pescheck, Ch. Arithmetischer Hauptschlüssel &c. Zittau 1741. Raumer, K. v. Geschichte &c. Bd. 2 u. 3. Reyher, Arithmetica. 1653. Rochow, F. E. v. Handbuch in katechetischer Form für Lehrer, die aufklären wollen und dürfen. Halle 1789. Schmid, K. A. Encyklopädie &c. 11 Bde. Sterner, M. Prinzipielle Darstellung &c. Treutlein, P. Das Rechnen &c. Unger, F. Die Methodik &c. Villaume, Methodisches Handbuch. 1790. Vormbaum, Evangelische Schulordnungen. 1860 bis 1864. Wolff, Ch. v. &c. Auszug aus den Anfangsgründen aller Mathematischen Wissenschaften zu bequemerem Gebrauche der Anfänger. Frankfurt und Leipzig 1759. Wolff, Ch. v. Vernünftige Gedanken zur nützlichen Erlernung der mathematischen Wissenschaften &c. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. v. Steinwehr. Halle 1747.

Wie das 16. Jahrhundert im allgemeinen zu den für die Entwickelungsgeschichte des menschlichen Geistes merkwürdigsten gehört, so thut sich dasselbe auch auf dem Gebiete des Rechnens in eigenartiger Weise hervor. „Am meisten charakteristisch, zumal für den Anfang, ist der Kampf zwischen der vorhandenen Rechenweise und der neu eindringenden Erfindung der Inder und Übung der Araber, das allmähliche Unterliegen der erstern und das Erstarken und Überhandnehmen der letztern, bis schließlich letztere allein das Feld behauptet; weiter in die Augen springend ist das rege Interesse, welches um die Mitte des Jahrhunderts die bedeutendsten mathematischen Köpfe für das der Masse des Volks neue Rechnen zeigen und welches sie in ausführlichen Darstellungen desselben bethätigen. Daß dem Interesse der Erfolg entsprach, ist bekannt: die neue Weise ist überall zur herrschenden geworden. Die Hauptarbeit hierin hat das 16. Jahrhundert geleistet; als dieses hinab gesunken war, hatte sich die Aufgabe der Arithmetik in eine der Pädagogik umgewandelt, es handelte sich nur noch um die Verbesserung in der Methode des Unterrichts.“ [2])

Diese Aufgabe hatten die drei folgenden Jahrhunderte zu lösen.

2) Treutlein a. a. O. S. 100.

Anfangs noch unsicher und tastend, weiterhin mit immer größerer Klarheit vordringend, führten die beiden nächsten Jahrhunderte bis hart an die Lösung heran. Das letzte Jahrhundert erst brachte dieselbe. Hieraus folgt zugleich, daß die beiden Jahrhunderte, welche uns jetzt beschäftigen sollen, im allgemeinen als Übergangszeit zu gelten haben.

Alles, was das 16. Jahrhundert für Deutschland gebracht hatte, schien im 17. Jahrhunderte der Vernichtung preisgegeben werden zu sollen. In der ersten Hälfte desselben wütete der entsetzliche große Krieg. Ganze Gegenden verödeten, Handel und Gewerbe verkümmerten, Not und Elend zogen allerorten ein, die hoffnungsreichen Anfänge wissenschaftlicher Bildung gingen zu Grunde. In der zweiten Hälfte des Jahrhunderts aber galt es, vorerst das leibliche Elend der verarmten Bewohner zu mildern; die Sorge für höhere Bedürfnisse mußte bis auf weiteres zurückgestellt werden. Daß darunter besonders die Schulen schwer zu leiden hatten, voran die Volksschulen, eine Schöpfung der Reformationszeit, ist bekannt. Und so kann es auch nicht Wunder nehmen, wenn auf dem Gebiete des Rechenunterrichts, dessen Entwickelung doch mit der Entwickelung des Schulwesens in enger Verbindung steht, zunächst alles zum Stillstande kam. Die Gelehrten, welche im vorigen Jahrhunderte so reges Interesse für denselben zeigten, ließen ihn ganz beiseite liegen. Seine Pflege blieb den Rechenmeistern, meist Autodidakten, Feldmessern, Geistlichen und sonstigen nichtgelehrten, zufälligen Liebhabern überlassen. Und wenn auch im Laufe des 16. Jahrhunderts gegen 300 Rechenbücher in Deutschland erschienen, darunter etwa 230 in deutscher Sprache, einen nennenswerten Fortschritt haben nur sehr wenige derselben aufzuweisen. Die besten Rechenbücher hielten sich noch an das, was Adam Ries gegeben hatte. Fast schien es, als wolle man sich nicht weiter in den Gegenstand vertiefen. Die deutlich hervortretende Tendenz fast aller Rechenbücher war, das Rechnen leicht, geschwind, mit Vorteil u. s. w. dem Schüler beizubringen. Lange Titel, unterwürfige Zueignungen, das ganz widerwärtige Bestreben, durch Schmeicheleien Gönner, besonders Beschützer gegen Neider und übelwollende Kritiker zu gewinnen, wurden üblich. Ad Zoilum! heißt es gewöhnlich.[3]) Harsdörffer (1651) wendet sich gegen „den spöttischen Meister Klügling:

Ich finde keine Zahl / auf meiner Rechnungsscheiben /
Dein $\left\{\begin{array}{c}\text{ab}\\ \hline \text{üb}\end{array}\right\}$erwitz und kunst genugsam zu beschreiben.“

Wendler (1667) beginnt seine Abwehr mit den Worten: „Hör, bleicher Neidhart, hör! was ich dir nun will sagen.“ Praktischer als beide fängt es vielleicht Wilhelm Henkenawer an, welcher 1618 einen sogenannten Faulenzer herausgab. Er giebt den „Mißgünnern“ den Bescheid:

„Sie wölln mit mir allbereit /
Herfürtretten wol auff den Plan /
Vnd mich ihr kunst auch sehen lahn“.

3) Sterner a. a. O. S. 269 f.

Als sachliche Weiterbildung des Rechnens im 17. Jahrhunderte sind die „Dezimalbrüche“ zu nennen. Allerdings waren dieselben schon seit 1585 bekannt. Ihr Erfinder war Simon Stevin von Brügge (1548—1620). Eingang und weitere Verwendung fanden sie in Deutschland aber erst jetzt. Neben ihnen sind noch anzuführen: Die abgekürzte Multiplikation, Erweiterungen der Wechsel- und Rentenrechnung, letztere namentlich mit Hilfe der Logarithmen, deren Erfindung durch Neper oder Napier (1550—1618) auch in das 17. Jahrhundert (1614) fällt.

Im übrigen blieb es bei den bisherigen Rechenstoffen, wenn auch da und dort noch einige Verbesserungen angebracht wurden. In der Numeration bürgerten sich die Namen Tonne und Million als kurze Bezeichnungen ein. Die Gliederung des Rechenstoffes innerhalb der Spezies wurde eine bestimmtere, nachdem man das Wesen der letztern genauer erkannt hatte. Duplieren und Medieren fielen weg. Das Einsmaleins wurde durch Additionsreihen gewonnen. Wendler[4]) lehrte 1667 das Multiplicieren, welches mit der höchsten Stelle des Multiplikators beginnt. Neben dem Aufwärtsdividieren, welches auch jetzt noch die gebräuchlichste Divisionsform war, brachte Wendler die folgende:

$$
\begin{array}{l}
4564 \,/\, \cancel{20830096} \,/\, 4564 \\
\qquad\;\; \cancel{2574}\,.\,. \\
\qquad\quad\;\; \cancel{2920}\,. \\
\qquad\qquad 1825
\end{array}
$$

Das ist, wie man sieht, unsere heutige abgekürzte Divisionsweise, dieselbe, welche man jetzt, sonderbar genug, auch „österreichische Divisionsmethode“ nennt. Unsere gewöhnliche Divisionsform (Abwärtsdividieren mit Aufschreiben der Teilprodukte und Reste) kommt 1646 bei Metius vor.[5])

Proben bestehen noch, doch ist man gegen die Neunerprobe mißtrauisch geworden, seitdem man erkannt hat, daß verschiedene Zahlen dieselbe Quersumme haben können. Das Linienrechnen verschwindet vollständig aus den Büchern. Das letzte Buch, worin es gelehrt wird, ist das Wendlersche (1667). In der Bruchrechnung treten auch einige Verbesserungen auf, die Multiplikation und Division leiden jedoch noch unter gewissen Unklarheiten. Fast gewinnt es den Anschein, als ob man des alten schriftlichen Regelbetriansatzes überdrüssig geworden sei, denn überall begegnet man Empfehlungen der „Welschen Praktik.“

Die sachlichen Gesichtspunkte, nach denen die praktischen Rechnungen geordnet werden, unterscheiden sich nur wenig von denen des vorigen Jahrhunderts. Doch ist die Mannigfaltigkeit der Gegenstände, welche in den einzelnen Rechenaufgaben auftreten, eine größere als vordem.

4) Wendler, Arithmetica practica; das ist die Kunst oder Wissenschaft recht ordentlich und künstlich nach der Zahl / Maß und Gewicht zu tractiren und zu rechnen ꝛc. (Regensburg 1667.)

5) Metius, Manuale Arithmeticae et Geometricae Practicae ꝛc. De tweede Editie ꝛc. Tot Francker, Anno 1646.

Von den Operationszeichen kommen + (plus, mehr) und ÷ (minus, weniger) fast überall vor, während man von den jetzt üblichen Multiplikations-, Divisions- und Gleichheitszeichen in Rechenbüchern für Anfänger noch nichts bemerkt.

Zur Verbreitung der „Dezimalbrüche" in Deutschland trug besonders Joh. Hartmann Beyer (1563—1625) bei.[6]) Er mag sogar unabhängig von Simon Stevin auf dieselben gekommen sein. Beyer schreibt: $\overset{\text{II}}{36}$ für 0,36; $\overset{\text{III}}{472}$ für 0,472; $\overset{\text{IV}}{37}$ für 0,0037 u. s. f. Andere damals vorkommende Schreibweisen sind: $0^{0}3'6''$ für 0,36 bei Metius; ·472 für 0,472 bei Wingate; 37(4 für 0,0037 bei Böckler; $0<36$ für 0,36 Wallis; 0.472 bei Bürgi. Das Dezimalkomma soll Kepler eingeführt haben.[7])

Des Rückganges der Schulen im 17. Jahrhunderte ist bereits gedacht worden. Mit ihr im Zusammenhange stand auch ein großer Mangel an geschickten und kenntnisreichen Lehrern. Lehrerbildungsanstalten gab es damals noch nicht. Also waren diejenigen, welche Lehrer werden wollten, auf sich selbst angewiesen. Am brauchbarsten erwiesen sich immer noch die zünftigen Rechenmeister, weil sie gewissen Anforderungen zu genügen hatten, bevor sie eine Stelle erhielten. Ihre Auffassung des Unterrichts war freilich nach wie vor eine handwerksmäßige. Weil man das Rechnen überall nur als einen Geschäftsvorteil betrachtete, weil man es nur um des alltäglichen Vorteils willen erlernte, boten sie es auch in diesem Sinne ihren Schülern dar.

Zur Aufmunterung der Rechner gab man zwischenhinein „Ergötzliche Aufgaben", zur Erhöhung der Annehmlichkeit des Lernens Reimregeln und Reimaufgaben. Auch erfand man allerlei Hilfsmittel, welche das Rechnen erleichtern oder gar ersetzen, also nicht wie heute nur veranschaulichen sollten. Zu ihnen gehören z. B. die Neperschen Rechenstäbe, mancherlei Multiplikationsmaschinen u. a. m. Auch gewaltige Einsmaleinstafeln entstanden, darunter die des Herwart von Hohenburg, welche sämtliche Produkte je zweier Zahlen von 2 bis 999 enthielten.

Wenn das nun aber alles auch auf das alte Regelrechnen, also auf ein mechanisches Verfahren hinweist, trotzdem darf behauptet werden, daß der Grund zu der spätern Ausgestaltung der Methodik des Rechenunterrichts mit im siebzehnten Jahrhunderte gelegt wurde. Denn was Bacon von Verulam, Locke, Ratich, besonders aber der große, seiner Zeit weit vorausgeeilte Comenius vollbrachten, das kam schließlich auch dem Rechenunterrichte zu statten. Sie forderten Naturgemäßheit für jeden Unterricht. Sie bestimmten: Der Unterricht dürfe sein Hauptziel nicht in der Aneignung nützlicher Kenntnisse, sondern in der Anregung

6) Joh. H. Beyer, Logistica decimalis, das ist Kunstrechnung mit den zehnteiligen Brüchen 2c. Frankfurt a. M. 1603.

7) Nach Sterner a. a. O. S. 302 und Unger a. a. O. S. 104.

der Geisteskräfte der Kinder suchen. Er müsse von der sinnlichen Anschauung ausgehen, alles Zusammenhängende beständig verknüpfen, die Worte nur in Verbindung mit Sachen geben u. dgl. m. Das alles beeinflußte auch die weitere Entwickelung des Rechenunterrichts. Ja, man darf sogar noch weiter gehen und behaupten, daß alles, was nachmals für das Rechnen aufgestellt wurde, sich bereits in der Didactica magna des Amos Comenius vorgezeichnet findet.

Das nachfolgende 18. Jahrhundert hat man das „pädagogische Jahrhundert" genannt. In seine zweite Hälfte fällt das „Zeitalter der Aufklärung". Zwei große Pädagogenschulen treten nacheinander in demselben auf, die Pietisten und Philanthropen. Jene, getrieben von der Liebe des Heilands, diese, das Weltbürgertum betonend, beide, in der Jugenderziehung das hauptsächlichste Mittel zur Erreichung ihrer Zwecke findend. Durch die Franckeschen Stiftungen zu Halle hat sich der Pietismus selbst das schönste Denkmal errichtet. Auch gehört die deutsche Realschule (Semler in Halle 1739) zu seinen Schöpfungen. Der Philanthropismus widmete seine Aufmerksamkeit der Methode des Unterrichts mit großem Erfolge. Durch ihn wurde das Unterrichten eine Kunst, und diesem Umstande besonders mit hat man die Gründung der vielen Lehrerseminare in Deutschland während der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts zu verdanken.

Das alles konnte natürlich nicht spurlos an der Gestaltung des Rechenunterrichts vorübergehen. Es steigerte sich das Interesse der Pädagogen auch für ihn mit dem Interesse für den Unterricht überhaupt. In den Schulen wurde demselben mehr Zeit als bisher zugebilligt, und besonders in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts begegnen wir einer Reihe trefflicher Rechenmethodiker in Deutschland.

Im allgemeinen darf man wohl sagen, daß während der ersten Hälfte des Jahrhunderts im Gegensatze zu früher die Entwickelung und Übung des Verstandes, die formalbildende Kraft des Rechnens, während der zweiten Hälfte neben dieser aber auch wieder das Können, die Rechenfertigkeit betont wird. So begnügte man sich auch nicht mehr mit der Einprägung und Anwendung der Rechenregeln, sondern forderte für jedes Thun den Beweis seiner Richtigkeit.

Daß jetzt mehr als früher für die Jugend geschrieben wurde, erklärt sich aus dem oben Gesagten. Sehr angenehm berühren hier die an die Jugend gerichteten Ermahnungen und herzlichen Wünsche. Auch sittliche Wirkungen des Rechenunterrichts wurden betont. Damit in Verbindung stand, daß man der Natur der Zahlen nachdachte, denn aus dieser, so meinte man, müßten sich Methode und Wirkungen des Rechenunterrichts klar erkennen lassen.

Die alten deutschen Rechenschulen wurden durch die neuen Realschulen mehr und mehr in den Schatten gestellt. Daneben nahm die Errichtung von Volksschulen einen guten Fortgang. Die Lehrpläne für deutsche Schulen schrieben als Rechenstoff die Spezies in ganzen und gebrochenen Zahlen und die Regeldetri vor. In der Ausführung derselben ging man freilich noch von der Ansicht aus, daß nicht alle Schüler imstande seien, den Stoff zu bewältigen. Es war also nicht der heutige Massen-, sondern ein Einzelunterricht, den man betrieb. In diesem Sinne heißt es z. B. in dem Lehrplane für die deutsche Schule der Franckeschen Stiftungen: „§ V. Zu der Arithmetica sind alle Kinder, die fertig lesen können, anzuführen. § VI. Weil es nicht angehet, wie man solches aus der Erfahrung hat, daß man in Arithmetica Klassen macht, indem die ingenia varia, und einer im Rechnen hurtiger ist als der andere, und also einer mit dem andern aufgehalten wird, so hat man es bisher auf andere Art versuchen müssen. Nemlich es wird ein gedruckt Rechenbuch gebraucht, darinnen mancherlei Aufgaben durch alle Species, Regulambetri, Practicam und andre Rechnungen zu finden, wozu man sonderlich gut befunden Tobiae Beutels Rechenbuch. Nach demselben soll der Rechenpräceptor die Arithmeticam lehren. § VII. Bei diesem Rechenbuch braucht der Präceptor keine Aufgaben zu dictiren, sondern ein jedes Kind kann solche aus dem Buche abschreiben und in der Stille elaboriren. Da unterdessen der Präceptor herumgehet und nachsiehet, was ein jegliches machet, und wo eins nicht fortkommen kann oder gefehlt hat, es ihm zeiget oder forthilft.“ 8)

Über die Rechenstoffe im besondern ist noch folgendes zu bemerken. Die neue Numeration fand jetzt überall Eingang; dabei ließ man die Bezeichnung Tonne zu gunsten von Million fallen. Das Zahllesen und Zahlschreiben wurde durch das Verständnis des Stellenwertes der Ziffern vorbereitet. Das Addieren war dem bisherigen völlig gleich. Das Subtrahieren aber faßte man als Wegnehmen und Unterschiedsuchen auf. Als Hauptgrundlage des Multiplizierens wurde nach wie vor das Einsmaleins betont, doch beschränkte man sich auf das kleine, indem man zeigte, wie das große daraus abzuleiten sei. Beim Dividieren tritt die heutige Form, das Abwärtsdividieren, schon häufiger auf. Sie wird mehrfach die „französische Art“ genannt. Rechenvorteile nach Art der italienischen Praktika waren noch beliebt. Das Rechnen mit benannten („benahmten“) Zahlen folgte dem Rechnen mit unbenannten („ledigen“) Zahlen als besondere Gruppe. 9)

Die Bruchlehre, welche immer noch als das schwierigste Kapitel des Rechnens galt, erscheint weiterentwickelt. Die „Dezimalbrüche“ treten häufiger auf. Dabei begegnen wir an einer Stelle einer Auffassung, welche auf die neuerdings von uns angenommene hinzudeuten scheint. Balthasar Elend 10) nämlich gebraucht 1724 den Ausdruck „Dezimalzahl“ anstatt „Dezimalbruch“, und was er hinzufügt, schließt nicht aus, daß ihm der Begriff „Systemzahl“ vorschwebte.

Die „Welsche Praktik“, welche bisher allen Versuchen, sie übersichtlich darzustellen, widerstanden hatte, wurde von einem der bedeutendsten

8) Vormbaum a. a. O. III, 21.
9) Vergl. z. B. Pescheck a. a. O. Hauptschlüssel S. 113.
10) Elend a. a. O.

Rechenpraktiker, Georg Heinrich Paricius,[11]) in neun Fälle zusammengefaßt. Der Anordnung der Textaufgaben nach sachlichen Gesichtspunkten wurde von vielen Autoren besondere Aufmerksamkeit gewidmet.

Wie das 16. Jahrhundert dem Dreisatze und das 17. Jahrhundert der Welschen Praktik, so gab auch das 18. Jahrhundert einer Regel vor allen andern den Vorzug. Das war der Reesische Ansatz. Er heißt so nach Kaspar Franz van Rees (geboren 1690), welcher die allgemeine Anwendbarkeit der Vereinigung mehrerer Dreisätze zu einem einzigen Ansatze zeigte. Für Deutschland war das eigentlich nichts Neues. Denn schon im 15. und 16. Jahrhunderte kannten deutsche Rechenbuchverfasser das Verfahren. Nur daß sie die Bezeichnungen „Vom Wechsel", „Vergleichung von Maß und Gewicht" u. a. dafür brauchten. Widmann nennt den Ansatz in seinem Buche 1489 Regula pagamenti und benutzt ihn zur Umrechnung von Münzen. Auch Adam Ries hat ihn, berechnet danach „Exempel der zwiefachen Detrie" und verwendet ihn bei Gewichtsvergleichungen. Trotzdem wurde der Ansatz, als er 1739 aus Holland nach Deutschland kam, als etwas Neues entgegengenommen und nun erst fleißig benutzt. Dabei trug sich noch das Sonderbare zu, daß manche Rechenbuchverfasser von dem Reesischen Ansatze den Kettensatz unterschieden, obwohl beide identische Formen sind.

Der Reesische Ansatz öffnete dem Mechanismus wieder Thür und Thor. Dem suchte Basedow (1723—1790), einer der bedeutendsten Philanthropen, vorzubeugen, indem er die einzelnen Glieder des Dividenden und Divisors durch logische Schlüsse finden lehrte. Zum Divisor gehört nach ihm ein Glied, wenn durch Verdoppelung desselben das Ergebnis auf die Hälfte herabgesetzt wird. Zum Dividenden gehört es, wenn eine Verdoppelung des Ergebnisses die Folge ist. Noch einen Schritt weiter ging Busse (1756—1835), wohl der geschickteste Rechenmethodiker des vorigen Jahrhunderts, indem er das Zurückgehen auf die Einheit betonte und den Bruchstrich anwandte.[12]) Die von Busse verbesserte Basedowsche Regel bildet daher auch den Übergang zu dem Bruchsatze des 19. Jahrhunderts.

Unter den Rechenbüchern des vorigen Jahrhunderts erlebten besonders diejenigen Clausbergs (1689—1751) und Peschecks (1676 bis 1747) viele Auflagen. Clausbergs „Demonstrative Rechenkunst"[13]) enthält das Ganze der kaufmännischen Arithmetik jener Zeit. Pescheck, den man wohl auch den Adam Ries des 18. Jahrhunderts genannt hat, ist der fleißigste Schriftsteller auf dem Gebiete des eigentlichen Schulrechnens.[14])

11) Paricius a. a. O.
12) Busse a. a. O. Anleitung 2c. 2. Teil S. 45.
13) Christlieb von Clausberg, ein getaufter Jude, schrieb: Licht und Recht der Kaufmannschaft . . . 1724—26. Demonstrative Rechenkunst 1732.
14) Christian Pescheck, geboren in Zittau (Sachsen), wirkte und starb als Gymnasiallehrer ebendaselbst.

Clausbergs Buch galt während des ganzen Jahrhunderts mit Recht als das vorzüglichste seiner Art. Wie es benutzt werden soll, sagt der Verfasser selbst: „Beginne mit den Exempeln, gehe dann zurück zu den allgemeinen Regeln, und willst du mehr als rechnen lernen, so siehe die Beweise und Gründe an.“ Anders halten wir es heute eben auch nicht. Pescheck hat mehr als 30 verschiedene Rechenbücher herausgegeben. Den meisten Anklang davon fanden: „Vorhof zur Rechenkunst (1708); Der anfahende Rechenschüler (1714); Allgemeine deutsche Rechenstunden (1723); Italiänische Rechenstunden (1724); Italiänische Praktika“. Sein „Arithmetischer Hauptschlüssel“, welcher 1741 erschien, ist das erste methodische Handbuch des Rechenunterrichts.[15]) Der innere Gehalt der Pescheckschen Schriften ist eigentlich kein großer. Den Bedürfnissen des gemeinen Volkes und der damaligen Lehrer hat aber niemand so wie er zu entsprechen gewußt.

Um die Verbesserung der Rechenmethode, genauer der Methode des mathematischen Unterrichts, erwarb sich besonders der berühmte Kanzler Wolff (1679—1754) an der Universität Halle große Verdienste. Seine Schriften beherrschten ein halbes Jahrhundert hindurch die deutschen Schulen. Dieselben entsprechen den niedrigsten wie den höchsten Bedürfnissen. Schon 1713 ließ er sich vernehmen:[16]) „Ich pflege die Mathematik aus zwei Ursachen zu recommandieren, einmal wegen der unvergleichlichen Ordnung, in welcher sie ihre Sachen gründlich ausführt, darnach wegen ihrer Lehren, welche im menschlichen Leben vielfältig genützt werden. Es ist aber nicht genug, daß man beim Lehren bloß die Wahrheit sagt, der Schüler muß auch begreifen, daß es Wahrheit ist. Der Nutzen der Mathematik fällt weg, wenn man die von den Alten gebrauchte Lehrart nicht einhält und ihre Lehren auf gemeine Art vorträgt, nach welcher sie mehr in das Gedächtnis als in den Verstand gefaßt werden. Zwar kann bei Anfängern nicht die volle Schärfe im Erklären und Beweisen in acht genommen werden; denn die Natur thut weder in den Seelen noch im Körper einen Sprung; gleichwohl muß der erste Unterricht in der Mathematik so vorgenommen werden, daß er eine Veränderung im Verstande bewirkt.“

Nach Wolffs Grundsätzen behandelten außer vielen andern das Rechnen: Elend, Merklein, Stigler, Barth und Spengler. Schon vor Wolff hatten sich zwei Männer, Johannes Christoph Sturm (1635—1703) und dessen Sohn, Leonhard Christoph Sturm (1669—1719), um die Reform der Methode der Mathematik verdient gemacht. Sie unterschieden, wie auch später Wolff, zwei Methoden: Synthesis und Analysis. Zu ihnen gesellte sich nun als Methodiker noch Abraham Gotthelf Kästner (1719—1800), der fruchtbarste mathematische Schriftsteller des ganzen Jahrhunderts. Kästner forderte für den Anfänger eine Verschmelzung der beiden Methoden, hielt also die analytisch-synthetische Methode für die am leichtesten zum Ziele führende.

15) Pescheck, M. Christian . . . Arithmetischer Hauptschlüssel ꝛc.
16) Wolff, Christian, Freyherr v., . . . Auszug ꝛc.

Auf solche Weise geschahe es nun, daß auch im Rechenunterrichte ein bisher ungekannter oder doch wenig beachteter Vorteil bald sehr gewürdigt wurde. Es war die formalbildende Kraft des Rechenunterrichts, welche man schließlich höher stellte als alles andere. Der oben erwähnte Clausberg war von der Bedeutung derselben überzeugt, wenn er schrieb:[17] „Dieser (der Verstand) empfindet nun ein groß Vergnügen, wenn er ein Ding aus dem Grunde verstehen lernt und begreifen kann, warum man durch diese Regeln ein solch Exempel auflösen könne, und wie man auf solche Regeln gekommen sei.“ Auch der treffliche Joh. Georg Gottl. Hübsch in Schulpforta schätzte in diesem Sinne die Rechenkunst: „Denn die Rechenkunst ist wie ein Schleif- oder Wetzstein, und man lernt distinkt, ordentlich und vorsichtig denken.“[18] Und wie diese beiden, so äußerten sich viele der damaligen Mathematiker und Rechenbuchverfasser. Die Hauptträger und -pfleger der Verbesserung der Methode aller Unterrichtsfächer, also auch des Rechnens, waren indessen doch die Philanthropen.

Zu den Philanthropen, welche sich um die Methode des Rechenunterrichts große Verdienste erwarben, gehören insbesondere Basedow, Trapp, Busse und Rochow. Von denselben rühren mehrere Forderungen her, welche noch heute anerkannt werden. Die wichtigsten derselben sind folgende: a) Wähle den Stoff mit Rücksicht auf die Schüler, d. h. beachte Alter, Geschlecht und künftigen Beruf derselben! b) Schreite stufenmäßig weiter! c) Gehe von der Anschauung aus!

Joh. Bernhard Basedow (1723—1790) forderte für eine wohleingerichtete Rechenschule drei Bücher: „eine demonstrative Anweisung, ein Aufgabenbuch zur Übung und ein System der Handlungswissenschaften, darin alle Kommerzsachen erklärt sind.“ In seinem Buche[19] trifft man auf folgende methodische Grundsätze: Passende Auswahl des Stoffes; Deutlichkeit im Unterrichte; langsames und stufenmäßiges Fortschreiten; öftere Wiederholung.

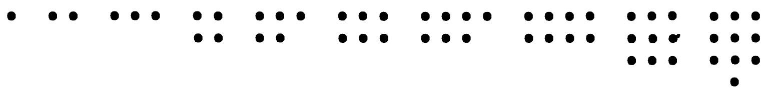
Er. Christian Trapp (1745—1818), welcher 1777 einen Teil des arithmetischen Unterrichts im Dessauer Philanthropin übernahm, betonte namentlich die Anschauung als Grundlage des Rechnens. Er sagt in seinem Buche „Versuch einer Pädagogik“ 1780 unter anderm: „Addieren und Subtrahieren kann man schon kleine Kinder an Nüssen u. s. w. lehren, ohne daß sie Zahlen kennen; bis zu einem gewissen Grade auch Multiplizieren und Dividieren. Um den Kindern von Einheiten, Zehnern rc. richtige Begriffe zu machen, verfertige man Käftchen: in dem Fach der Einheiten liegen die kleinsten Quadrätchen, jedes mit einem Punkt, auch liegen nicht mehr als neun Einheiten in diesem Fach; in dem Zehnerfach liegen größere Quadrate, jedes mit 10 Pünktchen u. s. w.“

17) Clausberg a. a. O., Vorrede.

18) Hübsch, Arithmetica Portensis, 1748. Der „Schleif- oder Wetzstein des Geistes“ ist nachmals durch Dinter zum geflügelten Worte in der Schullitteratur geworden.

19) Basedow, Überzeugende Methode rc.

Friedrich Gottlieb Busse (1756—1835), der Nachfolger Trapps, schrieb das beste methodische Handbuch seiner Zeit.[20]) Er fordert: Möglichst qualitätslose Anschauungsmittel, wie Punkte und Striche; abteilungsweise Behandlung der Zahlreihe (1—10, 1—100, 1—1000, 1—∞); Fertigkeit im Addieren und Subtrahieren, erreicht durch Reihenaufgaben; Vermeidung von Künsteleien u. a. m. Bekannt geworden ist Busse insbesondere durch seine „Zahlbilder“, das sind Punktgruppen. Er sagt: „Punkte sind unter allen Bildern, wodurch man anschauliche Begriffe von Zahlen erwecken kann, die einfachsten und eben deshalb auch die ratsamsten.“ Und so bildet er Punktgruppen bis zur Zahl 30, dann für 100 und 1000. Die zehn ersten Punktgruppen haben folgende Gestalt:



Außer den Punkten benutzt Busse noch zur Veranschaulichung der Zehner Tüten, der Hunderte Säckchen, der Tausende Kästchen. Doch nicht nur beim Zählen, auch beim Addieren und Subtrahieren verwendet Busse seine Anschauungsmittel. Die Produkte der Grundzahlen läßt er durch fortgesetzte Summierung finden.

Eberhard Freiherr von Rochow (1734—1804) führte seine methodischen Grundsätze in den Dorfschulen zu Reckan, Gettin und Krane aus. Danach begannen die Schüler im Rechnen mit dem Zählen sichtbarer Dinge, hierauf schrieb man ihnen Striche an die Tafel, die auch gezählt werden mußten. Konnten sie die Einer bis 100 zählen, so ging es an die Auffassung der Zehner. Darauf begann das Abwärtszählen von 100 bis 1 u. s. w. Weiter folgten Übungen im Addieren und Subtrahieren in der Reihe 2, 4, 6, 8 . . .; 1, 3, 5, 7 . . . Man zählte also die 2 zu und ab. Ebenso 3, 4 . . . Alles ohne Ziffern, aber mit Veranschaulichung. Kurz zusammengefaßt, findet man bei Rochow folgende Gesichtspunkte: a) Stufenweises Fortschreiten; b) Nebeneinander der Grundrechnungsarten; c) Entwickelung und Durcharbeitung des Einsmaleins; d) Aufgaben aus dem wirklichen Leben. Rochows Schulen waren weit und breit berühmt, und viele auswärtige Schulmänner kamen, um in ihnen zu lernen, wie man zu unterrichten habe, wie man durch gute Methoden gute Erfolge erziele. Dadurch aber trugen sie viel zur Verbreitung einer fortgeschrittenen Rechenmethode bei.

Neben den genannten Philanthropen sind es besonders noch drei Männer, welche sich um das Schulrechnen des 18. Jahrhunderts Verdienste erwarben: Villaume, Overberg und Niemeyer.

Peter Villaume (1746—1819), als Prediger der französischen Kolonie in Halberstadt zu den Philanthropen in enge Beziehungen getreten, sagt in einer Einladungsschrift 1780: „Die Rechenkunst ist ein vortreffliches Mittel, den Verstand zu bauen, zu berichtigen, ihm eine ge-

20) Busse, Anleitung ꝛc. 1786.

wisse Festigkeit zu geben, ihn vom Sinnlichen stufenweise zum Abstrakten zu heben. Sie ist eine praktische Logik. Meine Methode geht sehr von der gemeinen Lehrart ab, sie ist ganz eigen und meines Wissens ganz neu. Soviel kann ich versichern, daß sie leicht ist, daß wir nichts auf Glauben annehmen, nichts, nicht einmal das Einmaleins auswendig lernen, nichts Mechanisches brauchen, auch keine geometrische Demonstrationen führen, aber alles augenscheinlich, sogar die schwere Division, machen." Als Veranschaulichungsmittel benutzte Villaume Zahlpfennige, Bohnen und Stöckchen (Stäbchen). Diese mußten die Kinder nicht nur beim Zählen immer vor Augen haben, sondern auch bei den ersten Operationen mit den Zahlen. Großen Wert legte er darauf, die Aufgaben aus dem Anschauungskreise der Kinder zu nehmen. Da heißt es z. B.:[21]) „Allemal müssen die Rechnungen aus dem Zirkel der Kinder genommen werden: die Größe der Felder, die Länge eines Weges, die Menge des Futters fürs Vieh, die Maschen in einem Strumpfe, die Menge Kohlköpfe auf einem Felde gegebener Größe u. s. w. können die Rechnungen groß genug machen, um Übung zu geben." Auch fordert er: „Sie (die Schüler) müssen nicht eine Rechenkunst oder eine Rechenwissenschaft, sondern eine Rechenfertigkeit haben, die sie zeitlebens behalten und anwenden können." So gehört Villaume thatsächlich zu denen, welche dem neuern Rechenunterrichte kräftig vorarbeiteten. Sein Rechenunterricht zeichnete sich aus durch: anschauliche Grundlegung und praktische Richtung; Vereinfachung und Beschränkung des Lehrstoffes; sorgfältige Pflege des Kopfrechnens.[22])

Bernhard Overberg (1754—1826) leitete längere Zeit die Normalschule in Münster. Vom Rechnen sagt er:[23]) „Auf eine gute Methode kommt dabei alles an." Was er aber unter einer solchen versteht, kann man aus den Regeln, welche er giebt, entnehmen: „a) Haltet eure Schüler, wenn ihr sie zum Rechnen anführen wollet, nicht mit der Erklärung der Rechenkunst, mit den Einteilungen und Erklärungen der verschiedenen Zahlen und Rechnungsarten auf, sondern fanget gleich mit der Übung an, d. h. lehret sie zählen. b) Zeigt ihnen nicht gleich, wie sie bei der Auflösung des Exempels praktisch verfahren müssen, sondern lasset sie erst darüber nachsinnen; vielleicht verfallen sie selbst auf die eine oder andere Manier, sich zu helfen. Bringet sie zum Nachdenken, daß sie den Grund der Manier finden. c) Übet sie in solchen Exempeln, welche in ihre eigenen oder ihrer Eltern Umstände und Geschäfte einschlagen. d) Plaget sie nicht mit zu großen Exempeln. e) Gehet nicht eher weiter, als bis eure Schüler das Vorhergehende recht verstanden haben und hinlänglich darin geübt sind. f) Fanget das Rechnen im Kopfe mit ihnen an, ehe sie noch an der Tafel rechnen können, und setzet es auch bei der Übung an der Tafel noch beständig fort. g) Sorget dafür, daß ihr immer eine

21) Villaume, Praktisches Handbuch für Lehrer in Bürger-, Land- und Soldatenschulen. 1780.
22) Jänicke a. a. O. S. 51.
23) Overberg, Anweisung 2c.

Menge Dinge, die man zählen kann, bei der Hand habet und nehmet damit dasselbe vor, was sie im Kopfe oder an der Tafel thun sollen." Das sind Regeln, durch deren Befolgung auch heute noch gute Rechner herangebildet werden können. Overbergs Stufengang ist dabei dieser: 1. Auf- und Abzählen an sinnlichen Gegenständen bis 10, 15, 20, 100. 2. Die vier Grundrechnungsarten im Kopfe mit Aufgaben aus dem Anschauungskreise der Kinder. 3. Zahllesen und -schreiben (Numerieren). 4. Die vier Grundrechnungsarten an der Tafel. 5. Regeldetri. 6. Rechnen in gebrochenen Zahlen.

August Hermann Niemeyer (1754—1828), der bekannte Pädagog, Direktor der Franckeschen Stiftungen und spätere Kanzler der Universität Halle, äußert sich über den Rechenunterricht folgendermaßen[24]) „Bei der Methode im Rechnen kommt das meiste darauf an: a) das Abstrakte soviel als möglich konkret zu machen und auf wirkliche Fälle zurückzubringen; b) die Schüler zu üben, die Regeln selbst zu erfinden; c) mit Beförderung der mechanischen Fertigkeit immer das Nachdenken über Gründe der Regeln zu verbinden; d) nicht sowohl durch unendliche Zahlreihen und Exempel, wie sie fast nie vorkommen, zu ermüden, als auf das Rücksicht zu nehmen, wovon sich der sicherste Gebrauch im Leben erwarten läßt."

Es ist im vorigen schon mehrfach des „Kopfrechnens" gedacht worden. Über den Wert desselben herrscht heutzutage nur eine Ansicht. Im 16. und 17. Jahrhunderte aber kommt das Kopfrechnen noch nicht vor. Auch in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts begegnet man ihm so gut wie nicht. Gabriel Ternen, bekannt durch sein Buch „Der wohlinformierte Dorfschulmeister und Kinderlehrer" will zwar 1742 schon, daß die Knaben zu gewöhnen seien, auswendig, ohne Kreide und Feder zu rechnen. Doch erst der oben erwähnte Hübsch weist 1748 bestimmter auf die Vorteile des Kopfrechnens hin. Nach ihm ist es das allergeschwindeste und bequemste Rechnen, da es ohne Apparat, allerwegen und zu allen Zeiten, sogar im Finstern geschehen kann. Aber er läßt das Kopfrechnen an falscher Stelle auftreten, nämlich dem Tafelrechnen nachfolgen. Und so war es denn der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts beschieden, auch für das Kopfrechnen die richtigen Bahnen einzuschlagen. Der Philanthrop Busse betrieb das Kopfrechnen als eine dem Tafelrechnen parallele Übung. Besondere Schriften über das Kopfrechnen gaben 1790 Biermann und 1797 Köhler heraus.[25]) Der letztere ist wohl der erste Methodiker, welcher fordert, daß das Kopfrechnen dem Tafelrechnen parallel, doch voraus gehe, daß ihm also (wie es noch heute geschieht) die erste Stelle eingeräumt werde. Dabei schlägt er eine erziehliche Wirkung desselben hoch an: „Der Kopfrechner kann schlechterdings, so lange er rechnet, sich keine fremden Gedanken erlauben; giebt

24) Niemeyer, Leitfaden der Pädagogik und Didaktik. 1802.

25) Georg Heinrich Biermann, Anleitung 2c. Joh. Fried. Köhler, Anweisung zum Kopfrechnen in Verbindung mit der dazu erforderlichen Methode zum Gebrauche für Lehrer. 1797.

das nicht der Seele des Jünglings ein schönes Übergewicht über die Sinnlichkeit?"

Gegen das Ende des Jahrhunderts wurde das Kopfrechnen bereits in manchen Bestimmungen für Schulen gefordert, so z. B. in denen für die Landschulen von Halberstadt, das Schullehrerseminar in Breslau u. a. Derjenige, welcher an der Wende des Jahrhunderts den Stand des Kopfrechnens übersichtlich zusammenfaßt, ist der Pfarrer Magenau, der Herausgeber von: „Kleine Handbibliothek für deutsche Landschulmeister und ihre jüngern Gehülfen." [26]) Weiterhin mehren sich die Schriften über Kopfrechnen. Mit der Einführung des Kopfrechnens aber wurde die alte Methode, welche das Numerieren obenan stellte, mehr und mehr aufgegeben. Das Rechnen mit kleinen Zahlen erlangte größere Bedeutung. Die Veranschaulichung am Anfange des Rechnens galt als notwendig. Eine strengere Aufgabenfolge kam hinzu. Die Selbstthätigkeit der Schüler wurde mehr als zuvor angeregt. Man sorgte für gründliche Übung des Gelernten u. dgl. m. So erfüllte der deutsche Rechenunterricht gegen das Ende des Jahrhunderts schon viele der Forderungen, welche nachmals der Vater des neuern Volksschulunterrichts, Heinrich Pestalozzi, aufstellte. Es liegt nahe, daß dadurch die weitere Entwickelung des Rechenunterrichts in Deutschland nach dem Bekanntwerden der Pestalozzischen Ideen stark beeinflußt werden mußte.

Rückblick. Das 17. Jahrhundert hat, wenn man alle Thatsachen zusammenfaßt, die Entwickelung des Rechenunterrichts nur wenig gefördert. Die erste Hälfte desselben wird durch den 30jährigen Krieg beherrscht. Da ist alles im Niedergange begriffen. Die zweite Hälfte zeigt allerorten Anstrengungen, die Wunden des Krieges zu heilen. Das leibliche Elend ist so groß, daß man nicht dazu gelangt, die geistigen Bedürfnisse zu befriedigen. Deshalb liegt auch das Volksschulwesen schwer darnieder. Die Rechenlitteratur wird noch lange von Adam Ries beherrscht. Was weiterhin aber neu erscheint, zeigt durchweg die Tendenz, das Rechnen leicht, geschwind und mit allerlei Vorteilen zu lehren. Das muß natürlich zum Mechanismus führen. Dazu erdenkt man Hilfsmittel, welche dem Rechnen alle Schwierigkeiten nehmen, es womöglich ganz überflüssig machen sollen. Man bringt die Regeln und Aufgaben in Reime u. dgl. m. Immerhin fällt in diese leere Zeit die wichtige Erfindung der Logarithmen durch Neper (Napier) und die Verbreitung der Dezimalbrüche in Deutschland durch Beyer. Auch muß zugegeben werden, daß die Keime des spätern Aufschwunges des Schulunterrichts, sowie der Pädagogik überhaupt, im 17. Jahrhundert liegen. Denn in demselben leben Bacon von Verulam, Locke, Ratich und Amos Comenius.

Ungleich fruchtbarer für den Rechenunterricht gestaltet sich das 18. Jahrhundert, das man bekanntlich das pädagogische genannt hat. Sein Gepräge erhält es durch die Pädagogenschulen der Pietisten und Philanthropen. Auch fällt die Aufklärungsperiode in dasselbe. Überall

26) Sterner a. a. O. S. 387.

werden jetzt Schulen errichtet. Neu hinzu kommen die Realschulen und die Lehrerseminare. Schon in der ersten Hälfte des Jahrhunderts wird im Gegensatze zu früher die Entwickelung und Übung des Verstandes, die formalbildende Kraft des Rechnens, betont. Das geschieht auch weiterhin, doch nicht, ohne daß man dabei auch die Rechenfertigkeit gebührend berücksichtigt hätte. Das schriftliche Rechnen wird durch das Abwärtsdividieren, die von Busse verbesserte Basedowsche Regel, die häufigere Anwendung der Dezimalbrüche und die Ablehnung der sehr gekünstelten welschen Praktik gefördert. Großer Beliebtheit erfreute sich der Kettensatz oder die Reesische Regel.

Mehr als vordem wird bei Abfassung von Rechenbüchern die Jugend berücksichtigt. Der Unterricht widmet den Anfängern immer größere Aufmerksamkeit. Besonders die Philanthropen erwerben sich große Verdienste um die Verbesserung der Rechenmethode, nachdem durch einige der damaligen Gelehrten, insbesondere den Kanzler Wolff und den Mathematiker Kästner, die Grundlinien der Methodik der mathematischen Lehrfächer vorgezeichnet worden sind.

Die beliebtesten Rechenbücher des Jahrhunderts sind die von Clausberg und Pescheck. Ersterer schrieb für Kaufleute, letzterer war Vertreter des eigentlichen Schulrechnens. Pescheck ist auch Verfasser des ersten methodischen Handbuchs für den Rechenunterricht.

Als methodische Errungenschaften des Jahrhunderts stellen sich heraus: Stoffwahl mit Rücksicht auf die Schüler, Herbeiführung des Verständnisses, stufenmäßiges Fortschreiten und Anschaulichkeit. Als neue wertvolle Übung gesellt sich zum schriftlichen oder Tafelrechnen das Kopfrechnen.

Alles in allem war der Rechenunterricht in Deutschland am Ende des Jahrhunderts wohl vorbereitet, die Ideen des Volksschulreformators Pestalozzi aufzunehmen und weiter zu entwickeln.

§ 5.

Grundlegung des neuern Rechenunterrichts durch Johann Heinrich Pestalozzi.

Litteratur. Adam, W. Geschichte ꝛc. Beetz, K. O. Das Typenrechnen auf psychologischer Grundlage. 1. Teil. Halle 1889. Blochmann, H. Heinrich Pestalozzi, Züge aus dem Bilde seines Lebens und Wirkens ꝛc. Leipzig 1846. Christoffel, Pestalozzis Leben und Ansichten, aus seinen Schriften dargestellt. Zürich 1846. Dittes, F. Schule der Pädagogik. 2. Aufl. Leipzig und Wien 1878. Herbart, Über Pestalozzis neueste Schrift: Wie Gertrud ihre Kinder lehrt. 1802. Herbart, Pestalozzis Idee eines A B C der Anschauung. 1802. Hoffmeister, H. Comenius und Pestalozzi. Berlin 1877. Jänicke, E. Geschichte ꝛc. Just, Pestalozzis Unterrichtsmethode. (Jahrb. des Vereins f. wiss. Päd. Bd. XIV.) Langensalza 1882. Kaselitz, F. Wie muß sich die Methode des Rechenunterrichts gestalten ꝛc. Berlin 1867. Kehr, K. Pestalozzi, ein Mann des Volks. Leipzig 1879. Knilling, R. Zur Reform des Rechenunterrichts in den Volksschulen. München 1884—86. Krüsi, Pestalozzis Elementarbücher. Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse. 3 Hefte. Tübingen 1803—04. Leutz, Lehrbuch der Erziehung und des

Unterrichts. 3. Teil. Tauberbischofsheim 1883. Lindner, G. A. Encyklopädisches Handbuch der Erziehungskunde. Wien u. Leipzig 1884. Morf, H. Zur Biographie Heinrich Pestalozzis. Winterthur 1869. Pestalozzis sämtliche Werke. Ausgabe von Seyffarth. Berlin. Pestalozzi, Wie Gertrud ihre Kinder lehrt. Bearb. von A. Richter. Leipzig 1872. Raumer, K. v. Geschichte 2c. Bd. II. Rüefli, J. Pestalozzis Rechenmethodische Grundsätze im Lichte der Kritik. Bern 1890. Ruppert, Anwendung der Pestalozzischen Methode im mathem. Unterrichte. (Jahrb. des Vereins 2c. Bde. XI. XIII.) Langensalza 1879. 81. Schmid, K. A. Encyklopädie 2c. Bd. 5. (Artikel: Pestalozzi.) Gotha 1867. Seyffarth, L. W. Pestalozzi nach seinem Leben und seinen Schriften. Leipzig 1876. Sterner, M. Prinzipielle Darstellung 2c. v. Türk, Briefe aus Münchenbuchsee. Leipzig 1806. Unger, F. Die Methodik 2c. Vogel, A. Systematische Darstellung der Pädagogik Johann Heinrich Pestalozzis 2c. Hannover 1886. Wiget, Pestalozzi und Herbart. (Jahrb. des Vereins 2c. Bde. XXIII. XXIV.) Dresden 1891. 92. Wildermuth, Rechnen. (In Schmid, Encyklopädie 2c. Bd. 6.) Gotha 1867. Zeller, Rechenunterricht. (In Schmid, Pädagogisches Handbuch für Schule und Haus. Bd. 2.) Gotha 1879. — Hinweise auf die erste Auflage des vorliegenden Handbuches erfolgen unter H. I. —

Überblickt man das, was in Deutschland bis zum Jahre 1800, besonders aber in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts für den Rechenunterricht geschah, so möchte es fast den Anschein gewinnen, als ob alles im besten Zuge gewesen sei, auch ohne weitere Anregungen von außen das noch Fehlende zu erreichen. Allein man darf eins dabei nicht vergessen. Gerade um diese Zeit bestand ein großer Unterschied zwischen dem, was einzelne hervorragende Rechenmethodiker forderten und dem, was die überwiegende Mehrzahl der Schulen im Rechnen wirklich leistete. In den bessern Rechenbüchern war wohl mit dem abstrakten Formalismus und gedankenlosen Mechanismus schon tüchtig aufgeräumt worden, nicht aber in den Schulen. Auch war man noch nicht dahin gekommen, die Stellung und Aufgabe des Rechenunterrichts innerhalb der Reihe der Schulunterrichtsfächer aus seinem Wesen richtig abzuleiten. Deshalb nicht, weil die wahre Aufgabe des Schulunterrichts überhaupt noch nicht klar erkannt und ausgesprochen worden war. Und so bedurfte es allerdings noch eines Anstoßes, um aus den alten Gewohnheiten herauszukommen.

Ein solcher Anstoß erfolgte jetzt. Und da er sich kräftig genug erwies, so wurde der, von dem er ausging, beides zugleich, der Reformator der Volksschule und des Rechenunterrichts. Das Nähere darüber findet man in der oben angeführten Litteratur. Hier haben wir uns nur auf das, was den Rechenunterricht angeht, zu beziehen.

Als sich gegen das Ende des 18. Jahrhunderts auf allen Gebieten, namentlich aber den politischen und sozialen, große Wandlungen vollzogen, da trat auch für die Volksschule und damit für den Rechenunterricht eine entscheidende Wendung ein. Sie bedeutete nichts Geringeres als einen Bruch mit den veralteten Anschauungen, welche trotz einzelner vorzüglicher Rechenmethodiker in den Schulen bislang noch die Herrschaft behaupteten. Derjenige aber, der sie herbeiführte, war der große Reformator des Volksschulunterrichts, Johann Heinrich Pestalozzi, selbst. Und so ist es auch üblich geworden, die Geschichte des neuern Rechenunterrichts mit ihm zu beginnen.[1])

Wenn Pestalozzi am Ende des berühmten neunten Briefes in „Wie Gertrud ihre Kinder lehrt" den Satz aufstellt, „daß die Anschauung das absolute Fundament aller Erkenntnis sei, mit andern Worten, daß jede Erkenntnis von der Anschauung ausgehen und auf sie müsse zurückgeführt werden können", so will er ebendiesen Satz ganz besonders auch auf den Rechenunterricht bezogen wissen. Es galten ihm ja Wort, Form und Zahl als Quelle der „Mittel der Verdeutlichung aller unserer Anschauungserkenntnisse." Am Rechnen aber, also der Zahlenlehre, ließ sich, wie Jänicke bemerkt,[2]) die Strenge des Pestalozzischen Unterrichtsverfahrens am konsequentesten durchführen; am Rechnen konnte die formale Bildungskraft, die Wirkung einer Geistesgymnastik am glänzendsten nachgewiesen werden. Und so ist es Pestalozzi gewesen, der das Rechnen auf den lebensfrischen Boden der Anschauung verpflanzte und zu einem geistbildenden Unterrichtsfache der Volksschule umgestaltete. Freilich muß man zwischen dem, was Pestalozzi anstrebte, und dem, was er thatsächlich erreichte, unterscheiden. Während das Angestrebte, Pestalozzis Ideal, noch heute für den Volksschul-Rechenunterricht maßgebend ist, hat die Art und Weise, wie es erreicht werden sollte, Pestalozzis Unterrichtsverfahren, sich als eine methodische Verirrung erwiesen, die ihren Urheber nicht überlebte. Deshalb: Pestalozzi ist durch das, was er wollte, und nicht durch das, was er erreichte, zum Reformator des Volksschul-Rechenunterrichts geworden![3])

Was aber wollte Pestalozzi? Er selbst sagt darüber am Anfange des achten Briefes von „Wie Gertrud ihre Kinder lehrt" folgendes: „Ich habe mich äußerst bemüht, die Rechenkunst in der Anschauung des Kindes zum hellsten Resultate dieser Gesetze[4]) zu machen, und nicht nur die Elemente derselben im menschlichen Geiste allgemein zu der Einfachheit zurückzudrängen, in der sie in der wirklichen Anschauung der Natur selbst erscheinen, sondern auch ihren Fortschritt in allen ihren Abwechslungen genau und lückenlos an diese Einfachheit der Anfangspunkte anzuketten — überzeugt, daß selbst die äußersten Grenzen dieser Kunst nur insoweit Mittel einer wahren Erleuchtung, das ist, Mittel zu deutlichen Begriffen und reinen Einsichten zu gelangen, sein können, als dieselben im menschlichen Geiste sich in eben der Stufenfolge entwickeln, in der sie in der Natur selbst von den ersten Anfangspunkten ausgehen."

Man hat diesen Worten wiederholt — und gewiß nicht ohne Grund — zum Vorwurfe gemacht, daß sie schwer verständlich seien. Durchdenkt

1) H. I, S. 1.
2) A. a. O. S. 63.
3) Kehr a. a. O.
4) Es ist vorher von den „unwandelbaren Gesetzen des physischen Mechanismus" die Rede.

man sie jedoch in ihrem Zusammenhange mit andern Auslassungen Pestalozzis, so findet man unschwer heraus, daß es der Reformator zunächst auf eine gründliche Vereinfachung des Rechenunterrichts abgesehen hatte. Er wollte eine Behandlung, welche den von ihm aufgestellten Unterrichtszweck, deutliche Begriffe, sicher stellte. Aber auch eine Behandlung, welche das Rechnenlernen erleichterte. Die Erleichterung sollte, wie schon aus „Lienhard und Gertrud" hervorgeht, eine so große sein, daß alle Kinder des Volks, selbst die schwächstbefähigten, zur klaren Anschauung aller Zahlverhältnisse und zur Sicherheit im Rechnen gelangten.

Die Grundtriebfeder zu all diesen Bestrebungen war natürlich keine andere als die allbekannte: Pestalozzis Liebe zu den Kindern, zu dem künftigen Volke. „Ich wäre verzweifelt über das Elend des Volkes zu Grunde gegangen, wenn ich nicht Schulmann geworden wäre!" ruft er einmal aus. Und „Alles für Andere, für sich Nichts!" steht unter seinem Bildnisse auf dem Denkmale am Schulhause zu Birr. So erteilt Pestalozzi auch in „Lienhard und Gertrud" einem Baumwollenweber den Auftrag, den Bauern begreiflich zu machen, daß sie sich freikaufen könnten, wenn sie so und so viel zurücklegten, und daß überhaupt die Rechenkunst geeignet sei, das Volk zu befähigen, wohlhabender und gesitteter zu werden. Dabei heißt es: „Der Ammann, der Untervogt, der Kaufmann, der Gutsherr, der Landeigentümer — alle rechnen ihnen falsch, und das Volk wird dadurch zuerst gedrückt, dann ahnt es den Betrug und wird mißtrauisch und boshaft; nun betrügt es wieder und stiehlt zur Vergeltung, wo es weiß und kann. Ich kann aber nicht im ganzen Lande lauter geübte Rechner zu Dorfschulmeistern machen; ich mußte also das ganze Rechnungswesen so vereinfachen, daß die Mutter oder der Schullehrer nur nötig haben, mein Buch unermüdet vorzusprechen und von den Kindern ebenso oft nachsprechen zu lassen, um diese mit der Zeit zur hellsten und klarsten Einsicht in die schwierigsten Rechnungen zu bringen."

Die Vereinfachung des Rechenunterrichts, das ist das nächste, was Pestalozzi anstrebt, soll nun hauptsächlich dadurch erreicht werden, daß das Rechnen in der Anschauung eine feste Grundlage erhält. Die Anschauung gilt Pestalozzi, wie oben bereits erwähnt wurde, als das „absolute Fundament aller Erkenntnis". Die Natur selbst hatte ihn darauf geführt, wie er im ersten Briefe von „Wie Gertrud ihre Kinder lehrt" mitteilt. Für den Rechenunterricht aber leitet er die Notwendigkeit, die Anschauung zum Ausgangspunkte aller Erkenntnis zu machen, noch besonders aus dem Umstande ab, daß die Zahlbezeichnungen (Zahlnamen, Ziffern) nur Verkürzungsmittel[5]) des Zählens seien.

5) Im achten Briefe heißt es: „Sie (die Rechenkunst) entspringt ganz aus der einfachen Zusammensetzung und Trennung mehrerer Einheiten. Ihre Grundform ist, wie schon gesagt, wesentlich diese: Eins und Eins ist Zwei, und Eins von Zwei bleibt Eins. Auch ist jede Zahl, wie sie immer lautet, an sich selbst nichts anders, als ein Verkürzungsmittel dieser wesentlichen Urform alles Zählens." Hier verwechselt Pestalozzi offenbar die Namen, Zahl und Zahlbezeichnung. Daß die letztere nur gemeint sein kann, ergiebt sich aus dem Zusammenhange. Die Zahlbe-

Die Zahlnamen entbehren nach seiner Auffassung solange des Inhaltes, als sich der Schüler bei denselben nicht des sinnlichen Hintergrundes, d. i. der einzelnen zugehörigen Einheiten, klar bewußt ist. Daher muß der Rechenunterricht (namentlich im Anfange) streng darauf achten, daß die Verkürzungen zunächst vermieden und der Zahlinhalt anschaulich auseinandergelegt werde. Mit andern Worten: nur durch die sinnlich wahrgenommenen getrennten Einheiten kann das Kind in den Besitz der Zahlen gelangen. Die bezüglichen Erörterungen finden sich im achten Briefe von „Wie Gelrud ihre Kinder lehrt" vor.[6] Dort heißt es: „Es ist aber wichtig, daß das Bewußtsein der Urform der Zahlenverhältnisse durch die Verkürzungsmittel der Rechenkunst selbst im menschlichen Geiste nicht geschwächt, sondern durch die Formen, in welchen diese Kunst gelehret wird, mit großer Sorgfalt tief in denselben eingeprägt und aller Fortschritt in dieser Kunst auf den fest erzielten Zweck des im menschlichen Geiste tief erhaltenen Bewußtseins der Realverhältnisse, die allem Rechnen zum Grunde liegen, gebaut werde. Würde dieses nicht geschehen, so würde selbst das erste Mittel, zu deutlichen Begriffen zu gelangen, zu einem Spielwerke unsers Gedächtnisses und unsrer Einbildungskraft erniedrigt und dadurch in seinem wesentlichen Zwecke kraftlos gemacht werden.

Es kann nicht anders sein; wenn wir z. B. bloß auswendig lernen: drei und vier ist sieben, und dann auf dieses Sieben bauen, als wenn wir wirklich wüßten, daß drei und vier sieben ist, so betrügen wir uns selbst; denn die innere Wahrheit dieses Siebens ist nicht in uns, indem wir uns des sinnlichen Hintergrundes, der ihr leeres Wort uns allein zur Wahrheit machen kann, nicht bewußt sind. Es ist in allen Fächern der menschlichen Erkenntnis die nämliche Sache."

Hierzu gesellt sich bei Pestalozzi noch ein wichtiges Zweites. Hat der Gegenstand des Rechnens, die Zahl, in der Anschauung ihre natürliche, also beste Grundlage erhalten, so ist die weitere Aufgabe der Rechenkunst die, in einer die Natur des menschlichen Geistes genau berücksichtigenden Stufenfolge den Hauptzweck alles Unterrichts, „deutliche Begriffe und reine Einsichten" zu erreichen. Dieses allerdings nicht in dem Sinne, als ob die Aneignung eines größern Vorrates von Kenntnissen Hauptsache sei, sondern so, daß man die Entwickelung der dem Menschen innewohnenden geistigen Kraft, die Hebung des geistigen Lebens an sich, als Hauptsache betrachtet. Denn nachdem eine derartige Kraftbildung stattgefunden hat, ist der Mensch gewiß imstande, sich alles dasjenige anzueignen, was der von ihm erwählte besondere Lebensberuf noch fordert. Mit andern Worten: „Formale Bildung" ist das dem Rechenunterrichte durch Pestalozzi gesteckte Hauptziel. Wie ernst das aber gemeint ist, geht aus folgenden, der Einleitung zum achten Briefe in „Wie Gertrud ihre Kinder lehrt" entlehnten Worten hervor:

---

zeichnung „zwei" ist ein kurzer Ausdruck (Verkürzungsmittel) für „eins und eins ist zwei" 2c.

6) Richter, Wie 2c. S. 151 f.

„Schall und Form[7]) führen den Keim des Irrtums und der Täuschung sehr oft und auf verschiedene Weise in sich selbst. Die Zahl niemals; sie allein führt zu untrüglichen Resultaten; und wenn die Meßkunst den nämlichen Anspruch macht, so kann sie denselben nur durch die Handbietung der Rechenkunst und durch ihre Vereinigung mit ihr behaupten, das heißt, sie ist darum untrüglich, weil sie rechnet.

So wie nun dasjenige Unterrichtsmittel, das den Zweck des Unterrichts — die deutlichen Begriffe — am sichersten erzielt, als das wichtigste dieser Mittel angesehen werden muß, so ist offenbar, daß dieses Unterrichtsmittel auch allgemein und mit der vorzüglichsten Sorgfalt und Kunst zu betreiben, und daß es für die Erreichung des letzten Zwecks des Unterrichts höchst wichtig ist, daß auch dieses Unterrichtsmittel in Formen gebracht werde, welche alle Vorteile benutzen, die eine tiefe Psychologie und die umfassendste Kenntnis der unwandelbaren Gesetze des physischen Mechanismus,[8]) dem Unterrichte allgemein gewähren können."

Es kann nach diesen Worten nicht zweifelhaft sein: Pestalozzi erachtete den Rechenunterricht nicht nur als ein vorzügliches, sondern als das vorzüglichste Mittel, die Geisteskräfte des Kindes zu entwickeln und zu üben. Wenn aber solche Kraftbildung bei ihm als Hauptzweck des Schulunterrichts überhaupt galt, so mußte folgerichtig der Rechenunterricht vor allen andern Fächern in den Dienst derselben gestellt werden. Damit ist durchaus nicht gesagt, daß die Bedürfnisse des praktischen Lebens von Pestalozzi übersehen worden wären. Aber die für letzteres erforderliche Rechenfertigkeit, das war seine Ansicht, müsse sich von selbst einstellen, sobald der Hauptzweck des Unterrichts, die formale Bildung, erreicht sei.

Fassen wir das, was Pestalozzi wollte, noch einmal kurz zusammen, so finden wir, daß allen seinen Bestrebungen die bestimmte Absicht zu Grunde lag, den Rechenunterricht zu vereinfachen und zu vertiefen. Im Verfolge dessen erhielt der Rechenunterricht durch ihn eine feste Grundlage, die Anschauung, und ein klares Ziel, die formale Bildung.

Es ist schon oben betont worden, daß Pestalozzi durch das, was er wollte, zum Reformator des Rechenunterrichts wurde, nicht durch sein Lehrverfahren, das sich bald als eine methodische Verirrung herausstellte, und heute nur noch ein historisches Interesse für sich in Anspruch nehmen kann. Da nun in der Verurteilung des Pestalozzischen Lehrverfahrens heute alle Rechenmethodiker übereinstimmen, so wäre es eigentlich nicht nötig, hier auf dasselbe einzugehen. Um aber keine bloße Behauptung aufgestellt zu haben, sollen noch diejenigen Andeutungen über dasselbe folgen, welche jene Verurteilung als eine berechtigte erkennen lassen.

7) Die beiden ersten der drei Elementarmittel Pestalozzis, wobei für das gebräuchlichere „Wort" hier nur „Schall" gesetzt ist.

8) Vergleiche hierüber den fünften Brief von „Wie Gertrud ihre Kinder lehrt".

Wenn von Pestalozzis Lehrverfahren im Rechenunterrichte die Rede ist, hat man wohl zu unterscheiden zwischen seinen ersten Versuchen in Stanz und Burgdorf, welche er selbst nur ein „Pulsgreifen der Kunst“ nennt, und dem spätern, in Gemeinschaft mit Krüsi und Buß verbesserten Verfahren. Über die ersten Versuche berichtet Ramsauer, der sich selbst unter den Schülern befand, daß je zwei Schüler eine Papptafel erhielten, auf welcher sich Punkte innerhalb viereckiger Felder befanden. Diese Punkte wurden gezählt, addiert, multipliziert und dividiert. Pestalozzi fragte dabei nicht, sondern ließ der Reihe nach vor- und nachsprechen. Auch gab es keine Aufgaben und Wiederholungen. Diese Versuche bildeten aber nur die Grundlage des verbesserten Verfahrens, wie es von Krüsi 1803 in den drei Heften: „Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse“ dargestellt worden ist.

Aus den Vorreden zu den beiden ersten Heften dieser „Anschauungslehre“, welche Pestalozzi wahrscheinlich selbst geschrieben hat,[9]) geht hervor, daß die Übungen derselben einen Einführungskursus voraussetzen, den die Mutter des Kindes übernehmen soll. Dieser Kursus hat nicht nur die ersten Zahlanschauungen zu vermitteln, sondern auch das Kind zu befähigen, den Abstraktionsprozeß zu vollziehen, der (nach Pestalozzis Ansicht) zur reinen (abstrakten, weil von der Art der Gegenstände unabhängigen) Zahl führt. Pestalozzi denkt sich die Sache so: „Wenn die Mutter dem Kinde Erbsen, Blätter, Steinchen, Hölzchen, oder was es ist, zum Zählen auf den Tisch legt, so muß sie, indem sie auf einen dieser Gegenstände hinweist, ihm nicht sagen, das ist Eins, sondern das ist ein Hölzchen, das ist ein Steinchen, und hinwiederum, wenn sie auf zwei solche Gegenstände hinweist, muß sie nicht sagen: das ist 2 mal 1 oder 2, sondern das ist zwei mal ein Steinchen, 1 Blatt oder 2 Steinchen — 2 Blätter u. s. w. Wenn nun die Mutter also das Kind verschiedene Gegenstände, als z. B. Erbsen, Steinchen u. s. w. als eins, zwei, drei u. s. w. erkennen und benennen lehrt, so bleiben bei der Art, wie sie selbige dem Kinde zeigt und vorspricht, die Wörter eins, zwei, drei immer unverändert stehen, hingegen die Wörter: Erbsen, Steinchen, Hölzchen u. s. w. verwechseln sich allemal mit der Abwechslung des Gegenstandes, den sie ihrem Kinde als eins, zwei, drei u. s. w. in die Augen fallen macht, und durch dieses fortdauernde Bleiben des einen, sowie durch das fortdauernde Abändern des andern, sondert sich dann im Geiste des Kindes der Abstraktionsbegriff der Zahl, das ist, das bestimmte Bewußtsein der Verhältnisse von mehr oder minder, unabhängend von den Gegenständen, die als mehr oder minder dem Kinde vor die Augen gestellt werden.“[10])

Nun erst darf das Kind zu den eigentlichen „Kunst- und Schulmitteln der Anschauung“ geführt werden. Zu diesen gehört aber in erster

9) Die Vorrede des ersten Heftes ist ohne Unterschrift, während die Vorrede des zweiten Heftes die Unterschrift hat: Burgdorf im Heumonat 1803. Pestalozzi.

10) Zweites Heft, Vorrede S. III. f.

Linie die sogenannte Einheitstabelle, eine Tafel, auf welcher in 10mal 10 Rechtecken die Zahlen von 1 bis 10 durch Striche dargestellt sind. Jedes Rechteck der ersten Reihe enthält einen Strich, jedes Rechteck der zweiten Reihe zwei Striche u. s. w. bis zur 10. Reihe mit je zehn Strichen in jedem Rechtecke.

An der Einheitstabelle wurden die acht Übungen des ersten Heftes, welches 175 Seiten stark ist, durchgearbeitet. Das geschah in der Weise, daß der Lehrer auf bestimmte Zahlen oder Zahlreihen zeigte, dabei fragte und vorsprach, während die Schüler anschauten, taktmäßig im Chore nachsprachen und auflösten. Die Fragen, Sätze u. s. w. waren nach dem „Prinzip der Lückenlosigkeit" bis in die kleinsten Einzelheiten vorgeschrieben, sodaß jede Übung deren mehr als 2000 enthielt. Außerdem führte das „Anschauungsprinzip", an welchem streng festgehalten wurde, auch hier zu großen Weitschweifigkeiten. Denn nach demselben mußte jede Zahl auf ihre Einheiten zurückgeführt werden. Es hieß also bei der fünften Reihe nicht 1, sondern einmal der 5. Teil von 5; nicht 2, sondern 2mal der 5. Teil von 5 u. s. w. — oder 3mal der 4. Teil von 4 und 5mal der 6. Teil von 6 sind zusammen 8mal der 7. Teil von 7 u. s. w.

In ganz ähnlicher Weise, also auch unter Festhaltung des Anschauungsprinzips und des Prinzips der Lückenlosigkeit, werden nach drei andern „Kunst- und Schulmitteln der Anschauung", den „Bruchtabellen", die Bruchzahlen behandelt. Die eine dieser Tabellen ist eine Strichtabelle, die beiden andern sind Quadrattabellen. Die Strichtabelle zeigt 36 parallele, gleichlange, aber verschieden eingeteilte Linienpaare. Jede Quadrattabelle enthält 100 gleichgroße Quadrate, in zehn Reihen angeordnet. Während aber bei der ersten Quadrattabelle die erste wagerechte Reihe nur ungeteilte, die zweite durch eine senkrechte Linie halbierte, die dritte durch zwei senkrechte Linien gedrittelte u. s. w. Quadrate enthält, sind die Quadrate der zweiten Quadrattabelle außerdem noch durch wagerechte Linien in 2, 3 u. s. f. gleiche Teile geteilt. Auf diese Weise ließen sich alle Bruchzahlen mit den Nennern 2 bis 10, dazu auch die Produkte derselben, veranschaulichen. Pestalozzi aber sagte mit Beziehung auf diese Quadrattabellen: „Wenn mein Leben einen Wert hat, so besteht er darin, daß ich das Quadrat zum Fundamente einer Anschauung erhebe, die das Volk nie hatte." [11])

Die Übungen, welche nach diesen Tabellen vorzunehmen waren, hatte der Lehrer dem zweiten und dritten Hefte der Krüsischen „Anschauungslehre" zu entlehnen. Das zweite Heft aber war 251 Seiten stark, und es erforderte die Erledigung der dritten Übung desselben allein über 17000 Sätze. Ähnlich verhielt es sich mit den Übungen des 287 Seiten starken dritten Heftes. Man bekommt eine Vorstellung von der maßlosen, unabsehbaren Ausdehnung dieser Übungen und ihrer Wirkungen auf Lehrer und Schüler, wenn man bedenkt, daß die tausend und aber tausend Sätze

11) Wie Gertrud ꝛc. a. a. O. 6. Brief.

sich lediglich auf reine (unbenannte) Zahlen bezogen, von den Quadrattabellen abgelesen und solange nachgesprochen werden mußten, bis die Kinder zur „unbedingten Fertigkeit“ darin gelangt waren. Und wie erst bei den zusammengesetztern Aufgaben! Türk teilt uns in seinen berühmten „Briefen aus München-Buchsee“ eine Probe davon mit. Es wurde z. B. die Frage gestellt: $6\frac{3}{5}$ sind 3mal der 4te Teil von wievielmal 5 Ganzen und $\frac{3}{4}$ von einem Ganzen? Die kurze Antwort darauf lautete: Von 1mal 5 und $\frac{3}{4}$ Ganzen und 61mal dem 115. Teile von $5\frac{3}{4}$ Ganzen. Die Auflösung aber, welche von den Kindern gefordert wurde, war diese: Ein Ganzes hat $\frac{5}{5}$; 6 Ganze haben 6mal $\frac{5}{5}$; 6mal $\frac{5}{5}$ sind $\frac{30}{5}$; $\frac{30}{5}$ und $\frac{3}{5}$ sind $\frac{33}{5}$; $\frac{33}{5}$ sind 3mal $\frac{11}{5}$; dreimal $\frac{11}{5}$ sind 3mal der 4te Teil von 4mal $\frac{11}{5}$; 4mal $\frac{11}{5}$ sind $\frac{44}{5}$. 5tel und 4tel kommen in 20stel zusammen (oder: wenn ich ein Quadrat durch 4 senkrechte Linien in 5, durch 3 wagerechte Linien in 4 gleiche Teile teile, so entstehen 20 kleine Rechtecke, deren jedes $\frac{1}{20}$ des ganzen Quadrats ausmacht); $\frac{1}{5}$ hat $\frac{4}{20}$; $\frac{44}{5}$ haben $\frac{176}{20}$; ein Ganzes hat $\frac{4}{4}$; 5 Ganze und $\frac{3}{4}$ haben $\frac{23}{4}$; $\frac{1}{4}$ hat $\frac{5}{20}$; $\frac{23}{4}$ haben $\frac{115}{20}$; $\frac{115}{20}$ sind in $\frac{176}{20}$ (oder in der Zahl, wovon 6 Ganze und $\frac{3}{5}$ dreimal der 4. Teil sind) 1 und $\frac{61}{115}$-mal enthalten (oder sind von dieser Zahl 1mal 1 Teil und 61mal der 115te Teil).[12])

Diese Andeutungen dürften genügen, um zu verstehen, weshalb man das auf dem Grundsatze des lückenlosen Fortschreitens beruhende Pestalozzische Lehrverfahren bald wieder fallen ließ. Was man nicht fallen ließ, das war das Anschauungsprinzip und der formale Bildungszweck.

Aus den vorstehenden Darlegungen erhellt, daß der Rechenunterricht Pestalozzi besonders dreierlei zu verdanken hat: Eine Grundlage (Anschauung), ein Ziel (formale Bildung) und ein Lehrverfahren (lückenloses Fortschreiten).[13]) So wertvoll dieses alles aber auch sein mag, es würde Pestalozzi trotzdem nicht gelungen sein, die allgemeine Aufmerksamkeit auf seine rechenmethodischen Bestrebungen zu lenken und denselben bis heute zu erhalten. Denn vieles von dem, was er forderte, hatten unabhängig von ihm früher schon deutsche Rechenmethodiker geboten. Was Pestalozzi als Rechenmethodiker groß gemacht hat, ist vielmehr das, was wir oben andeuteten: er hat den Rechenunterricht vom pädagogischen Standpunkte aus reformiert. Er hat ihn im Zusammenhange mit den übrigen Unterrichtsfächern pädagogisch gewürdigt, ihm eine Stellung gegeben und eine Aufgabe überwiesen, wie keiner der zahlreichen Rechenmethodiker vorher. Der Pädagog also, nicht der Mathematiker, stand an der Wiege des heutigen

12) Jänicke a. a. O. S. 70.

13) Es sind das die bekannten drei Grundpfeiler der Pestalozzischen Didaktik überhaupt. Näheres darüber findet man in jeder Darstellung der Pädagogik Pestalozzis. (Vergl. Litt.) Bei Pestalozzi treten sie zuerst in „Wie Gertrud ihre Kinder lehrt“ im Zusammenhange auf. Im Lehrverfahren erscheint das „lückenlose Fortschreiten“ selbstverständlich nur als Hauptprinzip, nicht als alleiniges Prinzip.

Rechenunterrichts. Das ist zugleich eine Thatsache, welche sich diejenigen merken möchten, die in der Einseitigkeit ihres Fachlehrertums mit Geringschätzung auf allgemein-pädagogische Bestrebungen und Forderungen herabblicken, es wohl gar als Anmaßung betrachten, wenn Pädagogen das einzelne Unterrichtsfach in den Dienst des Ganzen stellen wollen.[14])

Pestalozzi stellte den Unterricht durchaus in den Dienst der Erziehung. Derselbe sollte erziehender Unterricht werden. Als Zweck der Erziehung aber galt ihm die Menschlichkeit. Unter dieser verstand er, nach seinen eigenen Worten, die Erhebung der Menschennatur aus der sinnlichen Selbstsucht ihres tierischen Daseins zu dem Umfange der Segnungen, zu denen die Menschheit sich durch die harmonische Bildung des Herzens, des Geistes und der Kunst zu erheben vermag.[15]) Pestalozzi wollte sittlich-religiöse Menschen bilden, Menschen, wie sie sein sollen; es schwebte ihm ein „Idealmensch" vor, dem er seinen Zögling entgegenzuführen gedachte. Dazu aber sollte neben manchem andern besonders auch der Unterricht mithelfen. Dieser sollte den Menschen mit „psychologischer Kunst" und nach den „Gesetzen des physischen Mechanismus" von vollendeten sinnlichen Anschauungen zu deutlichen Begriffen führen. Er sollte vergeistigen, klare Einsichten bereitstellen, über das Nichtige und Vergängliche erheben, die „Grundkräfte des menschlichen Geistes entfalten", welche die Handlungen des Menschen bestimmen und ausführen helfen. Als „Grundkräfte" aber galten ihm die Kräfte des „Kennens (Geisteskraft), Könnens (Kunstkraft) und Wollens (Herzenskraft)." Deshalb unterschied er auch eine intellektuelle, technische (oder physische) und sittlich-religiöse Bildung. Die „Menschlichkeit" war die höhere Einheit derselben, das Ziel des Unterrichts.

Hatte Pestalozzi auf diese Weise dem Unterrichte ein höheres Ziel als andere vor ihm gesteckt, so sollte nun auch jedes einzelne Unterrichtsfach an seinem Teile zur Erreichung dieses Zieles mit beitragen. Und so erhielt jedes Unterrichtsfach seine besondere Aufgabe und seine bestimmte Stellung im Unterrichtsganzen, im Lehrplane. Daß Pestalozzi aber vom Rechenunterrichte sehr viel erwartete, daß ihm das Rechnen (weil es zu untrüglichen Resultaten führt) zur Bildung der Geisteskräfte am geeignetsten erschien, gleichsam als „Universalbildungsmittel" oder „Mittelpunkt des gesamten Unterrichts", wissen wir bereits. So waren es also die mit der Pädagogik Pestalozzis eng verknüpfte Aufgabe und die daraus folgende Stellung des Rechenunterrichts, welche die allgemeine Aufmerksamkeit immer wieder auf den letztern lenkten. Durch Pestalozzi wurde die „Idee des erziehenden Unterrichts", welche Comenius zwar schon vorgeschwebt hatte, die jedoch in den Kriegswirren wieder verloren gegangen war, neu belebt. Der Rechenunterricht aber

14) Dieser Einseitigkeit begegnet man jetzt leider auch bei manchen Rezensenten, denen der Zufall zum Schaden für die Entwickelung der Methodik des Volksschul-Rechenunterrichts das Wort an bevorzugter Stelle erteilte.

15) Lienhard und Gertrud. (Ausgabe von Seyffarth.) S. 66. 255.

sollte an der Verwirklichung dieser Idee in hervorragender Weise beteiligt werden.

Dieses und nichts anderes ist der Kern der Pestalozzischen Reformarbeit auf dem Gebiete des Rechnens. Seine rechenmethodischen Grundsätze sind nur die Schale dazu. Daß man sich mit letzterer aber zuerst und hauptsächlich beschäftigte, ist ganz natürlich. So hat man Pestalozzis rechenmethodische Grundsätze hin und her gewendet, ihnen zugestimmt oder sie verworfen. Fast planmäßig ist dieses geschehen. Mit dem Lehrverfahren fing man an, weil dieses zuerst in die Augen fiel. Dann kam das Ziel an die Reihe. Zuletzt rüttelte man an der Grundlage. So wurde man fertig mit der Schale. Fast wäre der Kern darüber verloren gegangen. Wer diesen wieder auffand, wird weiter unten zu zeigen sein.

§ 6.

Freunde und Gegner der rechenmethodischen Grundsätze Pestalozzis.

Litteratur. Beetz, Das Typenrechnen. 1. Teil. Halle 1889. Bräutigam, Methodik des Rechenunterrichts auf den ersten Stufen mit Hilfe von Tillichs Rechenkasten. Wien 1878. Dittes, Schule 2c. Göpfert, Der Rechenunterricht in den drei ersten Schuljahren. Eisenach 1877. Graser, J. B. Divinität oder das Prinzip der einzigen wahren Menschenerziehung. Baireuth 1813. Graser, J. B. Die Elementarschule fürs Leben. Hof 1821. (Beide Werke im Auszuge in: Wieck, H. Johann Baptist Graser. — Die Klassiker der Pädagogik. Bd. XIII. — Langensalza 1891.) Hoffmann, C. D. F. Die Pestalozzische Zahlenlehre und die Schmidschen Elemente der Zahl nach ihrem arithmetischen und formalen Werthe dargestellt und mit einander verglichen . . . Stuttgart 1810. Hoffmann, C. D. F. Lehrbuch der Arithmetik für Schüler und zum Selbstunterrichte. Stuttgart 1815. Jänicke, Geschichte 2c. Kawerau, P. F. Th. Leitfaden für den Unterricht im Rechnen nach Pestalozzischen Grundsätzen. 2 Bde. Bunzlau 1818. Knilling, R. Zur Reform 2c. Krüsi, (Pestalozzis) Anschauungslehre 2c. Leutz, Lehrbuch 2c. Lindner, Encykl. Handbuch 2c. Niemeyer, A. H. Grundsätze der Erziehung und des Unterrichts. 3 Bde. Herausg. von Rein. (Insbesondere Bd. 2 u. 3.) Langensalza 1884. Passavant, C. W. Darstellung und Prüfung der Pestalozzischen Methode nach Beobachtungen in Burgdorf. Lemgo 1804. Pöhlmann, D. J. P. Kurzer Unterricht der zusammengesetzten Rechnungsarten. Erlangen 1808. Pöhlmann, D. J. P. Praktische Anweisung in der Rechenkunst. 3 Bde. Erlangen (Joh. Jac. Palm) 1807. Raumer, K. v. Geschichte 2c. Rebs, M. C. G. Praktische Anleitung zum Rechnen nach Pestalozzis Lehrart. Zeitz 1813. Schmid, Joseph. Die Elemente der Zahl als Fundament der Algebra nach Pestalozzischen Grundsätzen. Heidelberg 1810. Schmid, K. A. Encyklopädie 2c. Schneyer, Der erste Rechenunterricht mit Benutzung des Baukastens und der Netztafel. 2 Hfte. Coburg 1879. Stephani, H. Ausführliche Anweisung zum Rechenunterrichte in Volksschulen nach der bildenden Methode. Nürnberg 1815—17. Sterner, M. Prinzipielle Darstellung 2c. Tillich, E. Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik oder Anleitung zur Rechenkunst für Jedermann. Leipzig 1806. Türk, K. Ch. W. v. Über Pestalozzi und seine Elementarbildungsmethode. 2 Teile 1806. — Leitfaden zur zweckmäßigen Behandlung des Unterrichts im Rechnen. Berlin 1817. Unger, F. Die Methodik 2c. Wildermuth, K. Rechnen 2c. Zerrenner, C. Chr. G. Methodenbuch für Volksschullehrer. (2. Aufl.) Magdeburg 1816.

Zunächst sind mehrere hervorragende „Träger und Pfleger Pestalozzischer Rechenideen“, wie sich Jänicke ausdrückt,[1]) zu nennen.

1) Jänicke a. a. O. S. 78.

Dieselben hielten fest an des Meisters Formal- und Anschauungsprinzip, nur genügten ihnen die einförmigen und ermüdenden tabellarischen Übungen desselben auf die Dauer nicht. Daher sannen sie auf neue Mittel und Wege, die reformatorischen Ideen ihres Meisters zu verwirklichen. So namentlich Pöhlmann (1802), Tillich (1806), Joseph Schmid (1810), Rebs (1813), von Türk (1816), Kawerau (1818).

Alle diese Pestalozzianer, so selbständig jeder derselben auch gearbeitet haben mag, haben mit Pestalozzi, wie gesagt, die entschiedene Betonung des Anschauungsprinzips und des formalen Bildungszweckes, dazu (wegen der allseitigen Erfassung und Ausbeutung der Zahl) die nebensächliche Behandlung der Ziffer gemein.

D. J. P. Pöhlmann, der an erster Stelle genannte, von dem drei verschiedene Rechenwerke vorliegen, ist besonders durch seine Stäbe, welche die Bruchzahlen veranschaulichen sollen, bekannt geworden. Er stand wegen seines Geschickes, die Lehrstoffe elementar zu behandeln, bei allen Pestalozzianern in hohem Ansehen. Neben dem mündlichen vernachlässigte er auch das schriftliche Rechnen nicht.

Der bedeutendste Pestalozzianer auf dem Gebiete des Rechnens ist aber jedenfalls Dr. Ernst Tillich, Professor und Mitvorsteher einer Erziehungs- und Lehranstalt zu Dessau. Derselbe schrieb im Jahre 1806 sein „Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik oder Anleitung zur Rechenkunst für Jedermann", über das er am Anfange der Vorrede sagt:[2] „Dieses Handbuch, welches anspruchslos in die Reihe verschwisterter Werke tritt, hat sich zum Ziele gesetzt, denkend rechnen und rechnend denken zu lehren". Das ist ganz im Sinne Pestalozzis. Denn bei diesem heißt es:[3] „Sie (die Kinder) lernen freylich durch diese Uebungen rechnen, aber mehr als rechnen lernen sie durch dieselben, Denken, und auch das Rechnen sollen sie durch dieselben nur denkend lernen."[4] Tillich zeigt sich in seinen Ausführungen durchaus selbständig. Insbesondere betont er gegenüber Pestalozzi, daß es bei größern Zahlen nicht mehr möglich sei, sich jeder Einheit derselben bewußt zu werden. So heißt es z. B. „Pestalozzis Elementarbücher stellen die Zahl als Folge empirischer Wahrnehmungen dar, während sie hier (in Tillichs Buche) als Akte rein innerer Anschauung aufgefaßt werden. Dort ist überall von Zahlengröße, nicht von Zahlenordnung die Rede; hier ist durchaus alles auf die Ordnung gebaut. Die Zahlen von 1 bis 10 werden Normen für Ordnung, für Rubriken, keineswegs für die äußere Darstellung der wahrgenommenen Vielheit, die nach meiner Überzeugung nur durch Ordnung in uns entsteht und nur darauf sich stützt. Indem wir z. B. 85 aussprechen, so schwebt uns keineswegs jede

2) Tillich a. a. O. S. III.

3) Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse. (Elementarbücher.) Teil 3. S. VII.

4) Tillichs Wort haben sich bekanntlich mehrere der neuern Rechenmethodiker, so besonders auch Hentschel, angeeignet. Letzterer verwendete es gewissermaßen als Kennspruch in der Vorrede zu seinem Hauptwerke, dem „Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen." Leipzig 1842.

Einheit vor, sondern vielmehr die Zahl der Zig (Zehner) und der Einer; noch auffallender ist dies bei Hunderten und Tausenden der Fall, die nur insofern Sinn für uns haben, als wir die Rubriken uns mit Klarheit vorstellen; der Einheiten sich bewußt zu werden, ist schlechterdings unmöglich. Meine Methode lehrt von der ersten Ordnung (Zahlraum 1—10) alle möglichen Verhältnisse kennen und dadurch eine Norm bilden, nach welcher alle übrigen Zahlen behandelt werden. Es geht recht eigentlich von den Anschauungen zu Intuitionen (von äußern zu innern Anschauungen)."

Bei keinem der vorhergehenden Methodiker, auch bei Pestalozzi nicht, wird so wie hier die Wichtigkeit der Behandlung der Zahlen von 1 bis 10 betont. Die allseitige Behandlung des ersten Zehners gilt Tillich als Grundlage alles Rechnens. Eingehend verbreitet er sich darüber im dritten Teile seines Buches, der „Methodenlehre", worunter er die ausführliche Darlegung der Stufenfolge von arithmetischen Übungen und Beschreibung des methodischen Verfahrens versteht. Dort heißt es:[5])

„Die Zahlen gehen alle nur von 1 bis 10; denn alle diese Zahlen übertreffende Zahlen sind nichts weiter, als weitere Anwendung; folglich wird man auch, genau genommen, durchaus nur mit diesen wenigen Ziffern zu rechnen haben. Daß diesem also sey, zeigt eine kurze, aber genauere Ansicht der Zahl, und die Art und Weise, wie der Arithmetiker mit ihr umgeht. So ist 17 nichts anderes, als der Inhalt der ersten Ordnung und 7 Einer, und 20 ist nichts anderes, als die Zahl 2 angewendet auf eine höhere Ordnung; so wie hinwiederum 200 nichts anderes ist, als die in eine höhere Ordnung gebrachte 20, und 2000 die noch um eine Stufe erhöhete 200. So wie hier die 2 ein Stammbaum unendlich großer Summen seyn kann, so ist es auch eine jede der übrigen einfachen Zahlen. So wie ich also die 2 behandeln kann, so werde ich auch mit zwei Hundert, und nicht anders bei zwei Tausend u. s. f. verfahren.

Das Verfahren mit den einfachen Zahlen wird daher durchaus die Basis seyn, nach welcher die zusammengesetzten behandelt werden. Da die zusammengesetzten Zahlen nur die weitere Anwendung der einfachen sind, so werden auch alle Verhältnisse derselben nur die weitere Anwendung der Verhältnisse einfacher Zahlen seyn. Aus dem Letzteren geht hinwiederum hervor, daß auch alle Regeln für noch so große Zahlenverhältnisse nur die weitere Anwendung derjenigen Regeln seyn müssen, die für einfache Zahlen gelten. Wenn dies ist, so wird folgende allgemeine Regel des Verfahrens gelten:

Man lehre den Schüler vorerst alle Regeln, sowie alle Verhältnisse an einfachen Zahlen finden, ehe man zur Anwendung auf größere Summen übergeht.

---

5) Tillich a. a. O. S. 278 f.

Dadurch erleichtert man sich zugleich selbst die Übersicht, sowie die ganze Arbeit. Es ist also vergeblich, und führt auf Abwege, wenn man nach der gewöhnlichen Reihenfolge, oder nach der Ordnung der vier Species, geht. Es ist nicht der richtige Weg, zuerst eine Reihe von Zahlen aussprechen, dann eine eben so große Reihe addieren, subtrahieren u. s. f. zu lehren, weil die Anwendung einer Regel nicht eher gemacht werden kann, als sie begriffen ist, und zu Begreifung derselben eine vollständige Übersicht des Ganzen in seinem Zusammenhange erfordert wird. . . Wir werden unendlich viel mehr mit den einfachen Zahlen zu thun haben, als man bisher damit sich abzugeben für nötig fand, und werden daher uns auch hüten, früher die einfachen Zahlenelemente zu verlassen, bis wir sie in ihrem engen Zusammenhange und Umfange verstanden."

So hat sich Tillich durch die eingehende Behandlung des ersten Zehners, besonders aber dadurch, daß er diese zur Grundlage des ganzen spätern Rechnens machte, ein bleibendes Verdienst um die weitere Gestaltung des Rechenunterrichts erworben.

Tillichs Buch zerfällt in drei Teile. Der erste Teil bringt die „Anleitung zum natürlichen oder Kopfrechnen nach combinatorischen Grundsätzen." Der zweite Teil enthält die „Anleitung zum schriftlichen Rechnen." Im dritten Teile folgt die bereits erwähnte „Methodenlehre."

Die Übungen, welche Tillich innerhalb der Zahlreihe 1 bis 10 vornehmen läßt, erstrecken sich auf Zählen, auf die möglichen Zusammensetzungen jeder einzelnen Zahl, auf Addition, Subtraktion und Multiplikation. Die Division, welche Tillich für zu schwer hält, folgt erst später. Das Zählen geschieht an Sinnendingen (Concretis);[6]) auch sämtliche Rechenoperationen werden zunächst immer an solchen vorgenommen.

Bemerkenswert ist auch, daß Tillich als Grundübung das Zählen betrachtet und zwar das Zählen gleichartiger Dinge. Er beginnt mit: a) 1, 2; 2, 1; 1, 2, 3; 3, 2, 1 u. s. f. bis 10. b) 2, 4; 4, 2; 2, 4, 6; 6, 4, 2 u. s. f. Es ist ihm dabei nicht gleichgiltig, was für Gegenstände gezählt werden. Am zweckmäßigsten erweisen sich ihm solche, die nicht durch besondere Eigenschaften zerstreuen. Über die Stufenfolge der arithmetischen Übungen aber sagt er im allgemeinen:[7])

„Wir unterscheiden zwei Hauptübungen, deren eine sich mit der Zahl in Concreto, wie wir es nannten, die andere mit der abstracten beschäftigt. So lange ich nämlich die Zahl noch an Gegenständen nachweisen kann, so lange ich sie noch als Einzelheiten zu einander geselle, um nach diesen die Regeln des Verfahrens zu abstrahieren, so lange behandele ich die Zahl noch immer concret. Ein jedes Zusammenzählen einfacher oder mehrfacher Zahlen, ein jedes Abziehen von einer gegebenen Summe,

6) Als Hauptlehrmittel benutzte Tillich Würfel. Der einzelne Würfel vertrat die Eins, die feste Verbindung zweier Würfel die Zwei u. s. w. Vergleiche weiter unten: Der Tillichsche Rechenkasten.

7) Tillich a. a. O. S. 282 f.

ein jedes Vergleichen der einen Zahl mit der andern, ist eine Auffassung des Concreten. Sobald aber nur die Regel auf Größen angewendet wird, sodaß dann nichts mehr darauf ankommt, ob die Zahl mehr oder weniger gelte, ob ihr Wert größer oder kleiner sey, so müssen wir sie abstract nennen. . .

Wir beginnen natürlich unser Zählen mit den Concretis. Daran lernen wir eigentlich die Zahl behandeln. Wir müssen hier eine jede Zahl nachweisen, müssen ein jedes Verhältniß erst sehen, ehe wir es einsehen lernen."

Nach diesem beschreibt Tillich sein Lehrmittel, von ihm „Versinnlichungsmittel" genannt. Von demselben erwartet er sehr viel, wenn es in rechter Weise gebraucht wird. Dann folgt die Angabe der Übungen mit Begründung. Durch das alles hat Tillich die methodischen Grundsätze Pestalozzis nicht nur aufgenommen, sondern dessen Verfahren verbessert, und nicht nur verbessert, sondern selbständig weiter geführt. „Tillichs Werk ist eine im großen Stile angelegte Methodik des Rechenunterrichts, wie sie die Vorzeit nicht aufzuweisen hat. Pestalozzi will in den Elementarbüchern keine tiefern Untersuchungen geben, weil sie nicht in das Gebiet des anwendenden Lehrers fallen; Tillich dagegen will dem denkenden Lehrer etwas übrig lassen."[8])

Tillichs Leistungen wurden von seinen Zeitgenossen, besonders auch den Volksschullehrern, im ganzen wenig beachtet. Sie hatten für die meisten derselben wohl ein zu wissenschaftliches Gepräge. Dagegen ist man in den beiden letzten Jahrzehnten auf dieselben wieder zurückgekommen, wie die verdienstlichen Arbeiten von Göpfert[9]), Bräutigam[10]) und Schneyer,[11]) hervorgegangen aus der Praxis des Stoyschen akademisch-pädagogischen Seminars zu Jena, beweisen.

Unter den noch übrigen der oben genannten Rechenmethodiker ist keiner, dessen Bedeutung derjenigen Tillichs gleichkäme. Das geht schon daraus hervor, daß sie alle, der eine mehr, der andere weniger, Tillichs Überlegenheit anerkennen, indem sie dessen Arbeiten den ihrigen zu Grunde legen. Das tritt gleich bei Joseph Schmid, welcher 1810 „Die Elemente der Zahl als Fundament der Algebra nach Pestalozzischen Grundsätzen" herausgab, zu Tage. Deshalb bemerkt auch Lindner, der Herausgeber der 2. Auflage von Tillichs Lehrbuch: „Hält man Schmids Werk dem Lehrbuche von Tillich gegenüber, so muß jeder schon bei einem oberflächlichen Durchgehen des Buches gestehen, daß Schmids Bearbeitung ganz unnötig war; was um so mehr einleuchtend wird, wenn man beide Lehrbücher genau vergleicht. Tillichs Lehrbuch enthält alles das, was Schmid vorbringt, in einer weit besser geordneten Stufenfolge, in einem einfacheren, echt wissenschaftlichen Gewande. Schmid hat in seinen Elementen der Zahl nichts Neues aufgestellt; denn

8) Sterner a. a. O. S. 432.
9) Göpfert a. a. O.
10) Bräutigam a. a. O.
11) Schneyer a. a. O.

Tillich hat uns dies alles weit früher, weit besser, wissenschaftlicher, pädagogischer bearbeitet gegeben."

Gleichwohl machte Schmids Buch seiner Zeit ungleich größeres Aufsehen als dasjenige Tillichs. Das kam daher, daß Schmid in Ifferten als Lehrer wirkte, Ifferten aber, wie Wildermuth treffend bemerkt, damals „als eine Art pädagogischer Prophetenschule angesehen wurde, von wo aus jedes gesprochene oder geschriebene Wort wie ein Orakel in die Schulwelt hinausdrang".[12]) So spricht denn auch Schmid im Vollbewußtsein seiner bevorzugten Stellung: „Ich gebe für diesmal nur soviel, als in der Zahl vollendet da ist, um der Menschheit auch das geben zu können, was in algebraischer Beziehung vollendet ist. Die Wahrheit, das Bessermachen und -können des einzelnen Menschen gehört der Menschheit." Wie Tillich, so dehnt auch Schmid die Übungen nur auf kleine Zahlreihen aus, auf 1 bis 20 und 1 bis 100. Striche, welche der Rechenschüler selbst auf die Tafel zeichnen muß, sind sein Veranschaulichungsmittel; manches stellt er auch auf beigegebenen Tabellen selbst dar. Indessen hört die Veranschaulichung auf, sobald „die Zahl und ihre Verhältnisse sich zur geistigen Anschauung und durch diese zu Gedanken erheben." Dann wird von der Ziffer Gebrauch gemacht, freilich ohne jemals (ganz wie Pestalozzi) zu einem eigentlich schriftlichen Rechnen zu gelangen. In seinem später abgefaßten Lehrgange für das elementare Rechnen, welcher im 14. Bande von Pestalozzis sämtlichen Schriften erschien, sagt Schmid: „In seinem 6. oder 7. Jahre kann das Kind bis auf 10 oder 20 allerdings richtig und auf Anschauung und Erfahrung gegründet zählen, und so ist es imstande, dieses auch bis auf 100 fortzusetzen, ohne jedoch eine gründliche Anschauung von den Zahlenverhältnissen zu haben, die 20 oder 30 übersteigen. Deswegen wird die Zahlenlehre mit kleinen (niederen) Zahlen, die unter erschöpfenden Gesichtspunkten alle ihre Verhältnisse darzustellen geeignet sind, angefangen. Auf dieser Stufe ist dem Schüler die Ausdehnung der Zahl bis auf 10 für diesen Endzweck hinreichend." Die Bruchzahlen veranschaulichte Schmid an 10 geteilten Linien bis zu den Zehnteln; auch benutzte er diese Linien, um das Erweitern und Heben, sowie das Gleichnamigmachen verständlich zu machen.

Noch größern Anklang als Schmids Schriften fand aber ein auf graues Löschpapier gedrucktes Werkchen des Zeitzer Kantors M. C. G. Rebs, welches sich „Praktische Anleitung zum Rechnen nach Pestalozzis Lehrart" nannte und „für Schullehrer, Seminaristen und alle, die diese Methode näher kennen lernen wollen" bestimmt war. Was dieses Büchlein für damalige Zeit (es erschien 1813) besonders wertvoll machte, das war die beigefügte Aufgabensammlung. Obgleich Rebs ganz auf Pestalozzischem Boden steht, vermeidet er doch die einseitigen, ermüdenden Reihen desselben, gruppiert seine Übungen gewöhnlich um einzelne Zahlen, die der Schüler bald als Ganze, bald als

12) Wildermuth a. a. O. S. 775.

Teile anderer Ganzen aufzufassen hat, und läßt es schließlich auch an praktischen Aufgaben nicht fehlen. Es darf daher wohl von Rebs behauptet werden, daß er sich um die weitere Ausgestaltung des Rechenunterrichts nicht sowohl nach den Worten, als vielmehr im Geiste Pestalozzis namentlich in Mitteldeutschland verdient gemacht hat.

Sehr wertvoll für die Ausbildung der Methodik des Rechenunterrichts ist das, was der preußische Regierungs- und Schulrat von Türk zu Potsdam, der Verfasser der „Briefe aus München-Buchsee“, in seiner 1816 in Berlin erschienenen Schrift: „Leitfaden zur zweckmäßigen Behandlung des Unterrichtes im Rechnen für Landschulen und für die Elementarschulen in den Städten“ dargeboten hat. Er sagt: „Mir erscheint die Fertigkeit im Rechnen durchaus nur als Nebensache, die überdem nie fehlen wird, wenn die Hauptsache gehörig besorgt worden ist. Hauptsache aber ist die Übung im Denken, die Entwickelung und Stärkung des Denkvermögens.“ Hiernach könnte es scheinen, als ob er Pestalozzis Bestrebungen kritiklos zu den seinigen gemacht habe; indessen fügt er später noch ausdrücklich hinzu: „Die jungen Leute sollen rechnen lernen, weil sie im gemeinen Leben eines geringern oder größern Grades von Fertigkeit im Rechnen bedürfen.“ Damit aber giebt er zu erkennen, daß er die bestimmte Absicht hat, über dem formalen Zwecke den materialen nicht zu vernachlässigen. Auch hat Türk, wie sein Buch zeigt, die Bedürfnisse der Volksschule unter allen Verbreitern der Pestalozzischen Ideen am richtigsten erfaßt. Er scheidet alles Unwesentliche und Entbehrliche aus, befleißigt sich einer einfachen, klaren und bestimmten Ausdrucksweise und hält dabei einen streng methodischen Gang ein. Den Rechenstoff führt er in fünf Abschnitten vor: 1) Rechnen ohne Ziffern, Zahlreihen 1 bis 10 und 1 bis 20; 2) Rechnen mit Ziffern; 3) die vier Spezies mit benannten Zahlen; 4) Bruchrechnung, mündlich und schriftlich; 5) Verhältnisrechnungen (Regeldetri). Ein Nachtrag bringt dann noch die verschiedenen Fälle der Zinsrechnung. Als Veranschaulichungsmittel dienen ihm Striche, geteilte Linien und regelmäßige Flächen. Als besonders gut durchgeführt darf der Abschnitt über die Bruchrechnung noch heute gelten. Bemerkenswert ist auch, daß er im fünften Abschnitte die Aufgaben nicht sowohl nach ihrer Form, als vielmehr nach ihrem Inhalte anordnet, denn man findet da der Reihe nach: Verhältnisse der Anzahl, der Geschwindigkeiten, der Kräfte, des Gewichts, der Eigenschwere, der Mischungen, Entfernungen, des Flächen- und Körperinhaltes u. s. w. Wenn man in neuester Zeit immermehr darauf dringt, die einzelnen Rechenübungen auf bestimmte Sachgebiete zu beziehen, um dem die Gedanken zerstreuenden und das Interesse lähmenden bunten Sach-Allerlei in unsern Rechenbüchern ein Ende zu bereiten, so kann Türks Versuch nur an Bedeutung gewinnen.

Als letzter unmittelbarer Pestalozzianer ist Kawerau, Oberlehrer am Schullehrerseminar zu Bunzlau, später Direktor ebendaselbst, zuletzt Regierungs- und Schulrat in Cöslin, genannt worden. Derselbe, ein Schüler Pestalozzis in Ifferten, schrieb 1818 den „Leitfaden für den

Unterricht im Rechnen nach Pestalozzischen Grundsätzen" in 2 Bänden und widmete ihn seinem Lehrer, „Herrn Heinrich Pestalozzi". Diesem Leitfaden liegt folgender Stufengang zu Grunde: 1) ganze Zahlen ohne Zehnerordnung im Kopfe; 2) Kopfrechnen nach der Zehnerordnung; 3) Zifferrechnen in ganzen Zahlen; 4) Bruchrechnen: a. im Kopfe, b. in Ziffern; 5) angewandtes Rechnen, bei dessen einzelnen Abschnitten das Kopfrechnen dem Zifferrechnen vorangehen soll. Er ist zunächst für Seminaristen geschrieben, damit dieselben auch nach ihrem Austritte aus dem Seminare des kundigen Führers nicht entbehrten. So mag es wohl kommen, daß er oft über die einfachen Verhältnisse der Volksschule hinausgreift und nicht selten recht breit wird. Der Leitfaden wird aber für immer in der Geschichte des Rechenunterrichts eine hervorragende Stellung einnehmen, weil er, wie Jänicke treffend bemerkt, den Anbruch der neuen Phase der Geschichte des Rechenunterrichts signalisiert.[13]) Nicht die ausgetretenen Gleise der endlos scheinenden geisttötenden Reihen, nicht die steifen Formen der Rechnungen und des sprachlichen Ausdruckes, nicht die einseitige Betonung des formalen Zweckes findet man darin, wohl aber eine Behandlungsweise, welche bei aller Strenge des Verfahrens dem Schüler doch möglichst freie Bewegung gestattet, zunächst dessen Interesse zu gewinnen sucht, dabei die Bedürfnisse des praktischen Lebens wohl beachtet und schließlich überall, nachdem alles wohlverstanden worden ist, Selbstthätigkeit und Selbständigkeit herbeizuführen ernstlich bestrebt ist. Daß man es mit einem gewiegten Methodiker zu thun hat, deutet der im Leitfaden eingehaltene Lehrgang an, wenn schon die scharfe Trennung von Kopf- und Zifferrechnen, von reinem und angewandtem Rechnen befremdet. Ähnlich wie bei Türk, findet man auch bei Kawerau eine bemerkenswerte Einteilung des angewandten Rechnens nach den zu berechnenden Gegenständen, also nach Sachgebieten. Er versteht unter angewandtem Rechnen überhaupt nur die Berechnung der Zahlverhältnisse wirklicher Dinge, ist also ein entschiedener Gegner aller „gemachten" Aufgaben.

„Mit Kawerau schließt die Reihe der unmittelbaren Pestalozzianer und zugleich derjenigen Schulmänner, welche die strengere Pestalozzische Schule repräsentieren, ihren Formalismus vertraten und die Methode Pestalozzis auch in Äußerlichkeiten festhielten. Als eine selbständig forschende, originale Persönlichkeit erscheint in ihrer Reihe Tillich, welcher sie alle an gründlicher, scharfer und wissenschaftlicher Auffassung unseres Gegenstandes überragt."[14])

Rechnet man vom ersten Erscheinen des Tillichschen Rechenwerkes bis zur Herausgabe von Kaweraus Leitfaden, so erhält man einen Zeitraum von 12 Jahren, in welchem der Volksschul-Rechenunterricht eine solche Fülle gewichtiger Anregungen erhielt, wie niemals vordem und nachdem. Es kann daher auch nicht Wunder nehmen, wenn dieselben

13) Jänicke a. a. O. S. 88.
14) Sterner a. a. O. S. 437.

unter den zumeist Beteiligten, den deutschen Lehrern, eine lebhafte Bewegung hervorriefen, aus der schließlich zwei große Parteien, die Anhänger des Pestalozzischen und Nicht-Pestalozzischen Rechnens, hervorgingen, die in ihren Forderungen in Bezug auf Lehrziel und Lehrgang des Volksschulrechnens einander schroff gegenüberstanden.

Als Gegner der rechenmethodischen Grundsätze Pestalozzis treten noch bei Lebzeiten des letztern auf: Hoffmann (1815), Stephani (1815), Graser (1817), Dinter (1806), K. Ch. G. Zerrenner (1814), Niemeyer u. a. Schon die Freunde des Pestalozzischen Rechenunterrichts waren nicht mit allem, was Pestalozzi gegeben hatte, einverstanden gewesen. Aber sie beschränkten ihre Ausstellungen wesentlich auf das Lehrverfahren. Ziel und Grundlage, das Formalprinzip und Anschauungsprinzip, ließen sie, wie gesagt, unangetastet. Die ersten Gegner griffen außer dem Lehrverfahren auch das Formalprinzip an. Anfangs nur als einfache Kritik erscheinend, stellte sich diese Gegnerschaft doch mehr und mehr als entschiedene Reaktion gegen das Lehrverfahren und Formalprinzip Pestalozzis heraus.

Der Pfarrer M. C. D. F. Hoffmann zu Weilimdorf ohnweit Stuttgart ist jedenfalls derjenige Rechenmethodiker, bei dem die Wandlung zum ersten Male deutlich in die Erscheinung tritt. Derselbe hatte sich schon 1810 als gründlicher Kenner des Pestalozzischen Lehrverfahrens erwiesen, indem er eine eingehende Beurteilung der Pestalozzischen Anschauungslehre und der Schmidschen Elemente der Zahl schrieb.[15]) Nach dieser wäre es eine sehr einseitige Auffassung, wenn die Arithmetik lediglich formalen Bildungszwecken dienen sollte; sie müsse auch die Bedürfnisse des Lebens berücksichtigen, denn dadurch erst lerne der Schüler wirklich rechnen. Ja, Hoffmann erwartet nicht einmal viel von Pestalozzis Rechenunterricht für die Übung der Denkkraft. Denn er sagt: „So vorteilhaft aber nun selbst diese mechanische Methode für die Sicherheit im Rechnen ist, so . . . ist sie doch keine Übung der Denkkraft, außer für die allereinfachsten logischen Gesetze, welche sie unaufhörlich übt; aber eben deswegen ist sie doch nur ein logischer Mechanismus.“ [16]) In diesem Sinne schrieb er nun sein „Lehrbuch der Arithmetik für Schüler und zum Selbstunterrichte.“ Dasselbe zeichnet sich auch sonst vorteilhaft aus. Es vermeidet z. B. die namentlich bei Schmid vorkommenden „sprachlichen Verschrobenheiten und Dunkelheiten, hohen und hohlen Redensarten“. Als ein ganz besonderer Vorzug desselben (gegenüber Pestalozzi, Schmid 2c.) aber hat besonders der Umstand, daß den Übungen im Kopfrechnen stets solche im Zifferrechnen, und zwar in erschöpfender Ausdehnung, folgen, zu gelten.

Sehr hohe Begriffe von seinen Leistungen als Rechenmethodiker hatte jedenfalls Dr. Heinrich Stephani, der bekanntlich um den Leseunterricht verdiente bayerische Kreis-, Schul- und Kirchenrat. Pestalozzis

15) Hoffmann, a. a. O.
16) Hoffmann, a. a. O. S. 87 f.

Ruhm verursachte ihm offenbar Beschwerden. Und so wollte er der Welt zeigen, daß er ebensoviel und noch mehr leisten könne als jener. Also schrieb er seine „Ausführliche Anweisung zum Rechenunterrichte in Volksschulen nach der bildenden Methode", welche 1815 in Nürnberg erschien. Indessen sollte sich bald zeigen, daß dieselbe in ihren wesentlichen Teilen nicht über Pestalozzi hinaus ging. Das Neue aber, was sie brachte, fand man, wenn nicht lächerlich, so doch wertlos oder entbehrlich. Stephani meinte namentlich, durch Hinzufügung einer neuen Spezies, die er „Ponderieren" nannte, dem „bisherigen alten Systeme der Rechenkunst seine Vollendung zu geben, und ihm dadurch ewige Haltbarkeit bei dem jetzigen Revolutionsdrange unseres Zeitalters zu sichern." Auch hoffte er ganz bestimmt: „Durch diese neue Spezies wird der Mechanismus beim Rechnen völlig vernichtet, der sichere Grund zu einer selbstthätigen Handlungsweise dabei gelegt und die Rechenkunst zu einem leichten Spiel des jugendlichen Geistes erhoben." Dieses „Ponderieren" war aber nichts weiter als die „Grundübung des Ermessenlernens, wie viele Einheiten jede Zahl in sich enthält", es beschäftigte sich also mit Zerlegung der Zahlen in Summanden und Faktoren. Gewiß handelte es sich dabei um eine sehr zweckmäßige Übung, und Stephani erwarb sich Dank, daß er mit Nachdruck auf dieselbe verwies; aber diese Übung war weder neu, noch verdiente sie zu einer besondern Spezies erhoben zu werden. Noch weniger Glück hatte Stephani mit gewissen Abweichungen vom Herkömmlichen und allerhand eigentümlichen Bezeichnungen. Wir begreifen das, wenn wir vernehmen, daß er den Namen „Teilzahl" an Stelle von „Bruch" wie folgt begründete: „Weil dieser Ausdruck nicht bloß verständlicher ist, sondern weil wir es für unschicklich finden, ein Wort in den Schulen zu gebrauchen, welches zur Bezeichnung eines Leibesschadens verwendet wird, von dem man nicht gern öffentlich spricht."

Mit Pestalozzi erblickt Stephani im Rechnen das beste Mittel zur Ausbildung der Denkkraft, weshalb man ihn ja auch in Bayern den Begründer des „Denkrechnens" genannt hat. Dem Pestalozzischen Lehrverfahren aber macht er zum Vorwurfe, daß es den Rechenunterricht zu einer geisttötenden Gedächtnisübung herabgewürdigt habe. Die ganze Reformarbeit Pestalozzis erscheint ihm mehr als eine Revolution, durch welche ein neues Unterrichtssystem geschaffen wurde, das einerseits viel zu gelehrt für Volksschulen ist, anderseits aber nur als gesteigerter Mechanismus erscheint. Als das allein Richtige gilt ihm die Verbesserung und Vollendung des Vorhandenen.

Stephanis Rechenunterricht zerfällt in drei Kurse: „Zahlenrechnen", d. h. Kopfrechnen, ohne Gebrauch der Ziffern; „Zifferrechnen", d. h. Tafelrechnen, jenem ganz entsprechend, doch auch mit größern Zahlen; „die bürgerliche Rechenkunst", d. h. Anwendung der erlangten Fertigkeit auf die im bürgerlichen Leben vorkommenden Aufgaben. Hauptsächlich im dritten Kursus tritt der Gegensatz zum Pestalozzischen Formalprinzip deutlich hervor. Hier bietet Stephani eine solche Fülle guter, angewandter Aufgaben aus dem Geschäftsverkehr, der Geographie, Geschichte ꝛc., daß man wohl behaupten darf, er berücksichtige die thatsächlichen Lebensverhältnisse in bester Weise. Dadurch aber, daß er den Rechenunterricht als einen Teil des Gesamtunterrichts auffaßt und das Gleichgewicht zwischen ihm und den übrigen Unterrichtsfächern betont, besonders auch durch die Forderung, daß der Rechenunterricht den Sachunterricht zu berücksichtigen habe, erweist er sich als ein so trefflicher Pädagog, daß man seine Schwächen gern übersieht.

Viel bedeutender als Stephani, dabei viel entschiedener als dieser, ist der zweite oben genannte bayerische Schulmann, Dr. Johann Baptist Graser. Bekannt wurde derselbe in Lehrerkreisen namentlich als Begründer der sogenannten Schreiblesemethode. Er ist aber auch einer der ersten deutschen Pädagogen, welche eine wissenschaftliche Darstellung der Erziehung und des Unterrichts versuchten. Und eben dadurch geriet er in Gegensatz zu Pestalozzi. Den drei Pestalozzischen Elementarmitteln Zahl, Form und Sprache stellt Graser die drei Bildungsmittelpunkte Natur, Mensch und Gott gegenüber. Als Endziel der Erziehung gilt ihm die Divinität des Menschen. Darunter versteht er nichts einseitig Religiöses, sondern die „gesamte Fülle der sittlichen Gesinnung und Handlungsweise“ des Menschen. Was Gott in seiner Welt ist, das soll der Mensch in allen Verhältnissen seines Lebens sein. Zunächst soll der Mensch für das Leben in der Familie, in der Gemeinde, im Staate und in der Kirche erzogen werden. Mittel und Wege dazu sind: Regierung, Zucht und Unterricht. An Stelle der seitherigen Schule, welche eine einseitige Lernschule ist, soll die Schule als Erziehungsanstalt treten. Als solche ist sie nun auch Unterrichtsanstalt. Der Unterricht ist also ein Mittel der Erziehung. Derselbe muß sich hinsichtlich der Gegenstände nach den sich erweiternden Lebensverhältnissen richten. Aller Unterricht muß vom Leben ausgehen und auf dasselbe wieder zurückführen.[17])

Wie das aber gemeint ist, zeigt Graser in seiner Elementarschule fürs Leben. Dieselbe besteht aus drei Teilen: Grundlage, Steigerung und Vollendung.[18]) Die „Grundlage“ hat „das Lebensverhältnis einer Familie“ zum Gegenstande. Die „Steigerung“ befaßt sich mit dem „Lebensverhältnis einer Gemeinde, eines Gerichts- (Regierungs-)bezirks und einer Provinz“. Die „Vollendung“ bezieht sich auf „das Leben im Staate“. Auf jeder Stufe werden die einzelnen Unterrichtsfächer behandelt. Darunter auch das Rechnen.

Über den Elementarunterricht im Rechnen überhaupt äußert sich Graser:[19]) „Nach dem allgemeinen Grundsatze des Lebensunterrichts muß auch das Rechnen nur für das Leben gelehrt werden; das heißt, das Rechnen darf, außer in Gymnasialschulen und in polytechnischen, nie eine bloße formale Übung in Zahlverhältnissen sein, sondern die Übung

17) Divinität a. a. O.
18) Elementarschule fürs Leben ꝛc. a. a. O.
19) Wieck a. a. O. Bd. 2, S. 29 f.

muß stets an einen Lebensgegenstand gekettet sein und muß, wenn sie auch an sich verstärkt und in Zwischenräumen formal betrieben werden sollte, doch immer wieder durch Beispiele ihre Beziehung und Anwendung auf die praktischen Lebensverhältnisse erhalten. Eine bloß formale Übung des Denkvermögens ist von bedeutendem, aber eine bloß formale Übung im Rechnen ist für Elementarschüler von sehr geringem Nutzen. Der Beweis liegt schon in der Erfahrung. Kinder, Knaben und Mädchen, welche durch Übung im Rechnen [20]) die fertigsten Rechenmeister geworden waren, finden sich bei etwas verwickelten Aufgaben in den herkömmlichen Lebensverhältnissen in Verlegenheit, und ihre Freiheit tritt dann erst wieder hervor, wenn ihnen die anzuwendenden Rechnungsformen vorgezeichnet oder angedeutet werden. . . Der mathematische Denker ist der konsequenteste. Doch auch dieser Vorteil wird im geringen Maße erzielt, wenn die Rechenübung nicht stets praktisch wird, und zwar nicht bloß aus dem Grunde, weil sie schnell sich wieder verliert, sondern eben weil aus Mangel an Anwendung aufs praktische Leben die Übung der Denkkraft vernachlässigt wird."

Schließlich leitet Graser für seinen Rechenunterricht folgende Regeln ab: [21])

„a) Das Rechnen muß zwar nach dem richtigen formalen Gange begonnen und fortgesetzt werden, vom Zusammengesetzten der Einheiten zu Vielheiten, zum Abziehen und Teilen der Vielheiten u. s. w. fortschreiten; allein es muß die Übung stets an einem Stoffe aus dem Leben vorgenommen, oder wenn eine formale Übung eine Zeit lang dazwischen tritt, wieder auf das Leben bezogen werden.

b) Der Stoff des Unterrichts muß in dem Gebiete des gesamten Unterrichts aufgesucht werden. Bohnen, Marken oder Striche auf einer Tafel sind daher unnütze Mittel (nur Spielereien) des ersten Unterrichts.

c) Es muß der Grund zu allen Rechnungsarten dadurch gelegt werden, daß erstens nur das Gleichartige behandelt, und zweitens ein Typus alles Rechnens, welcher in der Zahl von 1 bis 10 liegt, angenommen wird. . .

d) Die Hauptrechenkunst muß im Kopfe sein; denn diese ist die nützlichste nicht nur an und für sich, sondern auch aus dem Grunde, weil sie das innere Anschauungsvermögen mehr übt und, wenn es gehörig betrieben wird, das Denkvermögen zugleich mit in Anspruch nimmt. Es muß eben darum der Schüler vom Anschauen des zu berechnenden Gegenstandes so bald als möglich abgezogen und zur innern Anschauung gewöhnt werden.

e) Das Kopfrechnen muß so weit getrieben werden, bis das Anschreiben der Zahlen, ihrer großen Vielheit wegen, dringendes Bedürfnis wird."

Zweierlei erscheint bedeutungsvoll in Grasers rechenmethodischen

---

20) In der Weise Pestalozzis, meint Graser hier.
21) Wieck a. a. O. Bd. 2, S. 30 f.

Bestrebungen. Wie Pestalozzi faßt er den Rechenunterricht als ein Mittel der Erziehung auf. Während aber Pestalozzi als Ziel die formale Bildung aufstellt, betont Graser die Bildung fürs Leben, die materiale Bildung. Niemand vor ihm hat dieses mit solcher Entschiedenheit gethan wie er. Und so darf er wohl als der Hauptvertreter des Materialprinzips gelten.[22])

Gustav Friedrich Dinter (1760 bis 1831), der bekannte sächsische Dorfpfarrer und Seminardirektor, spätere Schul- und Konsistorialrat zu Königsberg in Preußen, forderte eigentlich noch früher als Graser, schon 1806, in seinen „Vorzüglichsten Regeln der Pädagogik, Methodik und Schulmeisterklugheit", daß das Rechnen „teils als Bildungsmittel der Kraft, teils als Fertigkeit fürs Leben" angesehen werde. Also genügte auch ihm das Pestalozzische Verfahren, welches einseitig die Kraftbildung betonte, nicht. Bemerkenswert ist besonders, was er hinsichtlich des Rechenstoffes sagt: „Was über die Rechnungen des alltäglichen Lebens, der Haushaltung, der Ökonomie hinausgeht, gehört nicht in die öffentliche Bürger- und Landschule, sondern in Privatstunden". Nach diesen Grundsätzen schrieb er dann selbst eine „Anweisung zum Rechnen" für sächsische Dorfschulen und preußische Schulen, dazu auch „Rechenaufgaben". Einer seiner Schüler, Bauriegel, nennt ihn ausdrücklich einen „großen Rechenmeister".

K. Ch. G. Zerrenner gehört zu den Gegnern des Pestalozzischen Formalprinzips, insofern er sich eng an Stephani anschließt. In seinem „Methodenbuche" bezeichnet er das Rechnen als einen notwendigen Teil des Volksschulunterrichts, nicht nur, weil es die Geisteskräfte übt, sondern auch, „weil wir die Rechenkunst fast in allen Verhältnissen des Lebens höchst nötig gebrauchen".[23]) Deshalb fordert er auch weiter unten: „Der Lehrer muß seine Schüler mit den wichtigsten Münzen, Maßen und Gewichten bekannt machen und sie darin üben, sie gegenseitig auf einander zu reduzieren . . . und sehe dahin, daß die Aufgaben so viel als möglich wirkliche oder mögliche Fälle und, wo es angeht, aus der Sphäre der Jugend enthalten. . . . Der Lehrer lasse die Gelegenheit, welche sich ihm hier darbietet, die Kinder mit den wahren, oder doch gewöhnlichen Preisen der Dinge bekannt zu machen, nicht außer acht. . ."

Einen ähnlichen Standpunkt nimmt A. H. Niemeyer ein. Er verkennt nicht den Wert des Rechnens als formales Bildungsmittel, doch kann „die einseitige formelle Bildung, zu weit getrieben, der Bereicherung mit nicht minder wichtigen und zum Teil unentbehrlichen Sachkenntnissen, sowie auch selbst der harmonischen Entwickelung der Seelenkräfte sehr nachteilig werden". Auch wird „der Einfluß für Verstandesbildung durch Mathematik auf die Bildung der ganzen Denk- und Urteilskraft gewiß oft zu hoch angeschlagen". Diese Bemerkungen „schienen notwendig in einer Zeitperiode, wo auch hierin der Übertreibungen so viele sind,

22) Vergl. hierüber auch Beetz a. a. O. S. 63 f.
23) Zerrenner a. a. O. S. 332. 368.

und wo offenbar der jugendliche Geist in einzelnen Instituten leiden muß. . ." 24)

So erwuchs denn dem einseitigen Pestalozzischen Formalismus in dem lebensvollen Materialismus ein berechtigtes Gegengewicht. „Hiermit sind aber auch gleichzeitig die nötigen Vorbedingungen einer Weiterentwickelung gesetzt, die in diesem Falle eine innige Verschmelzung der Gegensätze anstreben wird." 25) In Süddeutschland besonders behauptete das Materialprinzip seine Herrschaft ziemlich lange. Die Ausgleichsversuche gingen daher zumeist auch von Nord- und Mitteldeutschland aus.

§ 7.

Ausgleich der Gegensätze und Ausbau des Rechenunterrichts durch Harnisch, Diesterweg und Hentschel.

Litteratur. Adam, Geschichte 2c. Beetz, Das Typenrechnen 2c. Denzel, B. G. Einleitung in die Erziehungs- und Unterrichts-Lehre für Volksschullehrer. 3 Bde. Dritte Aufl. Stuttgart 1825 f. (Daraus: „Der Zahl-Unterricht" im 2. u. 3. Bde.) Diesterweg-Heuser, Methodisches Handbuch für den Gesammtunterricht im Rechnen. 2 Teile. Elberfeld 1829 und 1830. (Sechste Auflage 1864 von E. Langenberg umgearbeitet.) Dazu das Praktische Rechenbuch, ebenfalls von E. Langenberg neubearbeitet. Gütersloh 1877. Diesterweg, Wegweiser für deutsche Lehrer. 1. Aufl. Essen 1835. (2. Aufl. 1837, 5. Aufl. 1873--77.) Diesterweg, Über den Unterricht in der Zahlenlehre. Rhein. Blätter. Neue Folge XIII. Bd. Frankfurt a. M. 1836. (Auch in: E. Langenberg, Adolph Diesterwegs Ausgewählte Schriften. 1. Bd. Frankfurt a. M. 1877.) Harnisch, Leitfaden für den Rechenunterricht. (Im „Schulrath an der Oder".) Breslau 1814. Harnisch, Mein Lebensmorgen; zur Geschichte der Jahre 1787—1822. Herausg. von Schmieder. Berlin 1865. Heer, J. Methodisches Lehrbuch des Denkrechnens, sowohl im Kopf, als mit Ziffern, für Volksschulen. 3 Teile. Zürich 1836 f. Hentschel, E. Hundert Rechenaufgaben, elementarisch gelöst. Zum Gebrauche in Volksschulen und zur Selbstunterweisung für angehende Lehrer. Weißenfels 1837. Hentschel, Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen. Verfaßt mit gleichmäßiger Berücksichtigung des Kopf- und Zifferrechnens. Leipzig 1842. (14. Auflage bearbeitet von Költzsch 1891.) — Verschiedene Übungsbücher. (Siehe Text.) Jänicke, Geschichte 2c. Knilling, Zur Reform 2c. Kopf, Anweisung zum Rechnen nach naturgemäßen Grundsätzen; ein Leitfaden für jedermann, der das Rechnen mit Einsicht und Bewußtsein lernen und lehren will. Frankfurt a. d. O. 1822. Krancke, F. Lehrbuch des gemeinen Rechnens. 2 Teile. Hannover 1819—21. Ausführliche Anleitung zu einem zweckmäßigen Unterricht im Rechnen, vorzüglich zum Elementarunterricht. 1824. Theoretisch-praktische Anleitung zum Kopfrechnen; zum Selbstunterricht für jedermann, insbesondere für Lehrer. 2 Teile. 1828. Dazu mehrere Übungsbücher. Lüben, Pädagogischer Jahresbericht. Jahrg. 1 ff. Leipzig 1842 ff. Mücke, Anweisung im Rechnen. Breslau 1817. Schmid, K. A. Encyklopädie 2c. Scholz, Ch. G. Faßliche Anweisung zum gründlichen Kopf- und Zifferrechnen (Mit Vorwort von Harnisch.) Halle 1824. Dazu je 3 Schülerhefte für Kopf- und Tafelrechnen. Von der vierten Auflage ab heißt das Werk: Praktischer Rechenlehrer, oder methodische Anweisung im Rechnen. 1836. Stern, W. Lehrgang des Rechenunterrichts nach geistbildenden Grundsätzen nebst einem Aufgabenbüchlein. Karlsruhe 1832. Sterner, M. Prinzipielle Darstellung 2c. Stubba, Anweisung für den Rechenunterricht in Schulen und Schullehrer-Seminarien. 3. Aufl. Bunzlau 1864. Die gemeinen Brüche. Anweisung 2c. Bunzlau 1837. Sammlung

24) Niemeyer a. a. O. Bd. 2, S. 98.
25) Beetz a. a. O. S. 65.

algebraischer Aufgaben, verbunden mit einer Anleitung zur Auflösung derselben durch Verstandsschlüsse. Sorau und Bunzlau 1836. Unger, E. S. Leitfaden für den Unterricht im Kopfrechnen als Grundlage eines zweckmäßigen Unterrichts im Rechnen überhaupt. Für Lehrer an Volksschulen, sowie für diejenigen, die sich selbst unterrichten wollen. Nach einer eigentümlichen Methode bearbeitet. 2. Aufl. Erfurt 1851. (1. Aufl. 1841.) Unger, F. Methodik &c.

Die strengen Pestalozzianer forderten als Lehrziel: Kraftbildung an der abstrakten Zahl; die Nichtpestalozzianer stellten obenan: Ausbildung fürs Leben an konkreten Fällen. Der strittigen Punkte betreffs des Lehrganges gab es daneben noch viele, allen voran der eine, ob das reine von dem angewandten Rechnen zu trennen sei oder nicht. Weitere strittige Punkte waren: Die Anschauungsmittel und ihre Verwertung im Unterrichte; die einzuhaltenden Rechenstufen (Zahlreihen 1—10, 1—20, 1—100 u. s. w.); die erste Einführung und weitere Verwendung der Ziffern; das Verhältnis zwischen Kopf- und Tafelrechnen; Beginn und Ausdehnung des Bruchrechnens u. dgl. m. Nicht mit Unrecht ist daher dieser Zeitraum, der sich bis in die zwanziger Jahre hinein erstreckt, die „Sturm- und Drangperiode“ in der Geschichte des Rechenunterrichts genannt worden.

Vergebens bemühte sich der verdienstvolle Mitbearbeiter des Tillichschen Rechenwerkes, Lindner, einen Ausgleich der hart aufeinander treffenden Gegensätze herbeizuführen, indem er eine Durchdringung der gegenüberstehenden Ansichten in Vorschlag brachte. Da er nicht zeigte, wie eine solche zu bewerkstelligen sei, kam sie auch nicht zustande. Und so war es denn dem (in der Geschichte der neuern Pädagogik überhaupt eine ehrenvolle Stellung einnehmenden) Weißenfelser Seminardirektor, Dr. Wilhelm Harnisch, vorbehalten, der Methodik des Rechenunterrichts diejenigen Bahnen anzuweisen, welche sie in vielen Stücken bis auf den heutigen Tag nicht wieder verlassen hat.

Harnisch kann als der Führer der damaligen „preußisch-pestalozzischen Schule“ gelten. Sein Verhältnis zu den strengen Pestalozzianern, welches uns hier besonders interessieren muß, erhellt wohl am besten aus Harnisch' eigenen Worten. In seiner nachgelassenen Schrift „Mein Lebensmorgen“, heißt es:[1]) „Auf die Frage: ob ich ein Pestalozzianer sei, kann ich mit einem ebenso entschiedenen Ja, als mit einem ebenso entschiedenen Nein antworten. Ich antworte nein, sobald man meint, ein Pestalozzianer sei der, welcher Niedererſche Philosopheme vergöttert, Pestalozzische Zahlen- und Maßverhältnisse oder Joseph Schmidsche Linienzusammenstellungen lange angebetet und das Heil der Zukunft von Pestalozzischen Formen und Formeln erwartet hat. Ich antworte ja, wenn man unter einem Pestalozzianer einen Schulmann versteht, der weder im Gedächtniswerk, noch in gegenstandslosen Verstandesübungen, sondern in allseitiger Ausbildung des ganzen Menschen das Ziel der Pestalozzischen Bestrebungen und in der Liebe das Mittel findet, um sie zu erreichen.“

1) Harnisch, a. a. O. S. 211.

Einen besondern Anteil an der von ihm eingeschlagenen Richtung räumt Harnisch dem Tillichschen Rechenbuche, das er schon als Student kennen lernte und weiterhin als Hauslehrer benutzte, ein. Ja er ist sogar der Meinung, daß durch Tillich die Gefahr, ein einseitiger Pestalozzianer zu werden, von ihm abgewendet wurde. So kann es füglich auch nicht überraschen, wenn trotz aller gewollten Selbständigkeit sein 1814 erschienener „Leitfaden bei dem Rechenunterrichte" viele Anklänge an Tillich aufweist. Aber Harnisch geht schon insofern über Tillich hinaus, als er die Bedürfnisse der deutschen Volksschule schärfer als dieser ins Auge faßt und den Mathematiker überall dem Pädagogen unterordnet. So ist er es schließlich auch gewesen, der eine Reihe bis auf den heutigen Tag giltiger Sätze nicht allein aussprach, sondern auch praktisch durchprobte. Als solche Sätze bezeichnet Jänicke[2]) insbesondere: „a) Auch das Rechnen hat die harmonische Ausbildung aller geistigen Kräfte und zugleich der Geschicklichkeit für das Leben als Ziel. b) Der Schüler soll mit Einsicht und Bewußtsein rechnen, soweit es seine Kraft gestattet, und zugleich Fertigkeit, Schnelligkeit und Sicherheit im Rechnen besitzen. c) Tafelrechnen und Kopfrechnen sind in gegenseitiger Verbindung und Unterstützung zu lehren. d) Die Brüche müssen möglichst früh auftreten, und alle Spielereien mit denselben sind zu vermeiden. e) Der Stufengang im Rechnen richtet sich überhaupt nach der Zehnerordnung. f) Reines und angewandtes Rechnen darf nie getrennt werden. g) Die Kräfte, die beim Rechnen in Anspruch genommen werden müssen, sind Anschauung und Gedächtnis; das Kind muß die Zahlen und ihre Veränderungen an sinnlichen Gegenständen wirklich sehen und das Angeschaute im Gedächtnis bewahren. h) Die Schüler dürfen nicht zu lange am Sinnlichen gefesselt werden. i) Die Schüler müssen stets in vollständigem Satze antworten. k) Sie sollen veranlaßt werden, selbst Aufgaben zu stellen. l) Die angewandten Aufgaben müssen ihren Stoff vorherrschend dem rechnenden Leben entlehnen."

Harnisch hatte zunächst den Gymnasiallehrer Mücke veranlaßt, nach seinem Leitfaden ein vollständiges Rechenbuch auszuarbeiten. Als ihm aber später diese Ausführung nicht mehr genügte, trat er mit dem Rektor Chr. Scholz in Neiße, den er als besonders geeignet erachtete, seinen Anforderungen an ein Rechenbuch zu entsprechen, in Verbindung. Darauf erschien 1824 das berühmte Scholzsche Rechenbuch,[3]) eine in der That bahnbrechende Arbeit, die überall großen Anklang fand, viele Auflagen erlebte und mehrfach verbessert bis in die neueste Zeit sich behauptete. Seit seiner vierten Auflage (1836) führt das Buch den Titel: „Praktischer Rechenlehrer, oder methodische Anweisung im Rechnen." Zu seiner Vervollkommnung trugen namentlich die Ausstellungen, welche Diesterweg und E. Hentschel zu machen hatten und welche Scholz gewissenhaft prüfte und benutzte, viel bei. Auch Harnisch legte noch einmal mit

2) a. a. O. S. 93 f.
3) Scholz a. a. O.

Hand an, indem er einen zweiten übersichtlichen Lehrgang für den Rechenunterricht aufstellte, „um dem Kindes- und Berufsleben (noch) besser zu genügen." Abschließend bemerkt Jänicke:[4]) „Aus Harnisch erster Aussaat, befruchtet von Pestalozzis Ideen, erwuchs hundertfältige Frucht, und noch heute steht die rationelle Rechenmethode auf dem von ihm aufgestellten unanfechtbaren Prinzip: den Rechenstoff in eine Reihe organisch zusammenhängender und seinem eigenen Wesen entsprechender Übungen zu zerlegen, die mit den Entwickelungsstufen des kindlichen Geistes gleichen Schritt halten und so dem Schüler nicht nur eine naturgemäß fortschreitende Verstandesübung, sondern auch die für das spätere Leben notwendige Kenntnis und Fertigkeit im Zahlenwesen gewähren."

War so durch Harnisch die von Pestalozzi ausgegangene mächtige Anregung für Deutschland in ruhigere Bahnen geleitet worden, so stellten sich nun auch bald die rechten Baumeister ein, den weitern Ausbau der Methodik des neuern Volksschulrechnens zu übernehmen. Was Scholz für Schlesien war, das wurde Krancke für Hannover, Diesterweg für die Rheinlande, Denzel für Württemberg und Nassau, Stephani für Bayern, Stern für Baden. Unter den Genannten ragt besonders Diesterweg hervor. In seinem „Wegweiser für deutsche Lehrer," welcher 1835 zum ersten Male erschien, hat er in dem Abschnitte „Der Unterricht in der Zahlenlehre" einen Beitrag zur Methodik des Rechenunterrichts geliefert, der eine solche Fülle des Wertvollen und bis heute noch Maßgebenden enthält, daß es richtig erscheint, hier etwas mehr davon zu geben.

Diesterweg sagt:[5]) „Fassen wir die mehreren Gegenständen der äußern oder innern Welt gemeinsamen Merkmale zu einer Gesamtvorstellung zusammen, so bilden wir selbstthätig die denselben zukommende höhere oder übergeordnete, allgemeine Vorstellung, einen Begriff. Nehmen wir aber an einem Gegenstande ein Merkmal auf, welches auch im Begriff sein kann, und beobachten, ob dasselbe mehreren und wievielen Gegenständen zukomme, so bilden wir die Vorstellung von der Zahl dieser Dinge. Diese Thätigkeit unseres Geistes heißt zählen. Bei der Begriffsbildung suchen wir daher die Einheit, unter der die Gegenstände, die unter demselben stehen, zu fassen sind; bei der Zahlbildung dagegen setzen wir eine Einheit und suchen die Mehrheit. Dort steigen wir von der gegebenen Vielheit zur Einheit auf; hier bestimmen wir die Mehrheit der Einheiten, welchen dasselbe Merkmal, das als Grundeinheit gilt, zukommt.

Das Zählen der Dinge besteht daher in der Angabe, wieviele Dinge einer Art vorhanden sind, oder in gewöhnlichem Sprachausdruck: Zählen heißt die Menge der gleichartigen Dinge einer Art angeben. . . . Ein jedes Ding bildet für sich eine Einheit. Diese Vorstellung der Einheit entsteht aber nur im Verhältnis zu einer Mehrheit oder Vielheit. Einheit und Mehrheit werden immer zusammengedacht, oder stehen in not-

4) a. a. O. S. 95.
5) Wegweiser, Aufl. von 1838, Bd. 2. S. 147 ff.

wendiger Beziehung zu einander. Die eine Vorstellung ist nicht ohne die andere; mit der einen ist die andere gesetzt oder gegeben.

1. Da die Zahl die Vorstellung von der Mehrheit gleichartiger oder als gleichartig gedachter Dinge ist, sodaß sie durch die Wiederholung der Einheit entsteht, so setzt also jede Zahlvorstellung die Vorstellung der Einheit voraus, und sie selbst ist in der Zeit entstanden, ohne jedoch selbst eine Zeitvorstellung zu sein. Sie entsteht durch ein allmähliches Nacheinandersetzen derselben Einheit, aber sie ist nicht dieses reine Nacheinander, welches die Zeit ist. So mannigfach die Merkmale der Dinge sind, so mannigfach sind die Einheiten, unter die sie gestellt werden. Diese Einheiten sind konkrete Merkmale, weil sie an den einzelnen Dingen haften, oder von ihnen abstrahierte Merkmale, also immer doch konkret-abstrakt, niemals rein-abstrakt. Diese Merkmale geben den Namen der Zahl her, z. B. zehn Bäume = zehnmal ein Baum; zehn organisierte Dinge = zehnmal ein organisiertes Ding 2c. Abstrahiert man aber auch von diesem Namen, so bleibt die abstrakte Vorstellung der Eins übrig. Die Eins ist (abgesehen davon, daß auch die Ziffer 1 wohl die Eins heißt) daher die abstrakte Eins.

2. Diese Bemerkungen führen uns auf die Arten der Zahlvorstellungen, Zahlgrößen oder Zahlen schlechthin. Wie sie von der sinnlichen, äußern oder innern, Anschauung aufgefaßt werden, sind sie konkrete Zahlen, z. B. zwei Blumen, Münzen, Dinge 2c., auch benannte oder angewandte genannt. Nehmen wir ihnen diese Namen und beziehen sie auf die abstrakte Eins, so sind es abstrakte Zahlgrößen, auch reine Zahlen genannt. Beide gehören, da die Menge der Einheiten gedacht wird, zu den bestimmten Zahlen. Unbestimmt sind sie, wenn man eine unbestimmte Menge von Einheiten, eine Mehrheit oder Vielheit, gleichviel welche, denkt. Solche heißen auch allgemeine, die andern besondere Zahlgrößen. . . .

3. So vielfach die Zahlen, so vielfach ist auch die Zahlenlehre oder Arithmetik. Beschäftigt sie sich mit allgemeinen Zahlgrößen, so nennt man sie allgemeine Zahlenlehre oder allgemeine Arithmetik. Die besondere Zahlenlehre hat es mit bestimmten, reinen oder angewandten Zahlen zu thun. Man nennt diese auch die praktische Zahlenlehre. Rechnen heißt aus gegebenen Zahlgrößen — durch dieselben und ihr Verhältnis — andere finden. Das Rechnen geschieht also sowohl in der allgemeinen als in der besondern Zahlenlehre. Beide sind entweder theoretischer oder praktischer Art und Natur. In der Theorie erzielt man die Einsicht der Gesetze und Regeln, in der Praxis die Fertigkeit der Anwendung dieser Gesetze und Regeln. Beide werden am besten überall mit einander verbunden. Bloße Praxis ohne klare Einsicht der Gründe ist Routine. Keine Theorie ist nur abstrakt und ohne direkten praktischen Gewinn. Unter Rechenkunst versteht man die Praxis.

4. Das Rechnen geschieht im Geiste. Man hat es mit den Vorstellungen von der Menge gleichartiger Dinge zu thun, also überall mit Vorstellungen. Das Rechnen ist daher ein geistiger Akt, und zwar eine

Erzeugung neuer Zahlvorstellungen aus gegebenen. Es geschieht nicht durch Einfälle, sondern durch gewolltes, absichtliches Denken. Dieses Rechnen in der bloßen Vorstellung, ohne den Gebrauch äußerer Mittel oder Zeichen, heißt das Kopfrechnen. Gebraucht man aber zugleich diese, namentlich Ziffern, so nennt man das Rechnen Zifferrechnen oder Tafelrechnen.[6]) Beides soll Denkrechnen sein. Es giebt also dem Wesen nach nur eine Art des Rechnens. . . . Die Ziffer ist ein Zahlzeichen. Ein reines Ziffer- oder Zahlzeichenrechnen giebt es nicht. Überall hat man es mit den Zahlvorstellungen zu thun. Das Zifferrechnen geschieht um der bequemen schriftlichen Darstellung willen, und um dem Gedächtnis zu Hilfe zu kommen. . . . Wie der Buchstabe nichts ist ohne das Wort, das Wort nichts ohne den Begriff, so ist die Ziffer nichts ohne das Zahlwort und die Zahlvorstellung Alle Aufgaben werden durch Denken, nicht durch Ziffern gelöst. Der Möglichkeit und dem innern Denkprozeß nach können alle ohne Zeichen gelöst werden. Ein materieller Unterschied, sodaß eine gewisse Art von Aufgaben im Kopfe, eine andere Art schriftlich gelöst würde, findet nicht statt. In vielen Fällen ist es aber ein formeller, d. h im Kopfe, ohne Zeichen, finden Auflösungen statt, die beim Gebrauche der Ziffern nicht vorkommen. Überhaupt ist der ganze Unterschied im allgemeinen ein subjektiver. Was der Eine noch im Kopfe vermag, dazu bedarf der Andere schon der Zeichen. . . . Ein Kind zum bewußtlosen Rechnen, zum Spiel mit toten Ziffern abrichten, heißt, es entmenschlichen, seinen Geist fesseln oder töten. Es ist ein intellektueller Totschlag. . . . Der Kopfrechner denkt an gar keine Zeichen, sondern an Zahlen; der Zifferrechner denkt auch an die Zahlen, die er mit Zeichen darstellt. Es ist gleichviel, ob man diese hinschreibt oder nicht hinschreibt, aber sich vorstellt. Letzteres ist kein Kopfrechnen, sondern ein After-Kopfrechnen, eine Verzerrung, ein Mißbrauch, eine Selbstfesselung. Menschen, die zuerst oder ausschließlich nur mit Ziffern rechnen lernten, bewegen sich in diesen Fesseln. . . .

5. Es giebt im ganzen und großen nur eine Rechenmethode, welches diejenige ist, die zugleich der Natur des zu entwickelnden Geistes, namentlich der durch den Rechenstoff zu bildenden theoretischen Anlagen und praktischen Vermögen, und dem Wesen des Materials entspricht. Ganz verwerflich ist daher die Meinung derer, welche nur subjektive Unterschiede in den Methoden anerkennen wollen, daß sich die eine Methode für jene, die andere für diese Lehrer- oder Schülerindividualität eigne, von einer, als der besten und darum allein guten, nicht die Rede sein könne. Wäre diese Ansicht begründet, so würde sich jede Methodologie in Nichts auflösen und jeder einzelne das Recht haben, auf seine Weise sich eine Anschauung von seiner oder des Schülers Individualität zu bilden und eine Methode ad libitum zu wählen. Das kann aber die Meinung derer, welche die Menschennatur als die eine und gleiche und ihre Entwickelungsgesetze als dieselben erkannt haben, in jedem Unterrichts-

6) Diesterweg, Über den Unterricht a. a. O.

stoffe eine Eigentümlichkeit auffinden, nicht sein. Darum darf die Wahl der Methode im allgemeinen dem Belieben der Lehrer nicht überlassen werden. . . . Hauptgrundsatz für den elementarischen Rechenunterricht, wie für jeden Zweig des Elementarunterrichts, ist die Anschaulichkeit. Er besagt nicht nur, daß die ersten Zahlvorstellungen aus sinnlicher (innerer, durch äußere Mittel veranlaßter) Anschauung gewonnen, sondern daß alle Operationen auf ursprünglich rein anschauliche Erkenntnis zurückgeführt werden sollen, und er verwirft alle an die Spitze gestellten allgemeinen Begriffe, alles Regelwerk, jede positive Vorschrift, alles Gegebene und Positive. . . . Der Schüler soll zuerst nur Einzelheiten, Spezielles, kennen, beurteilen und behandeln lernen; er soll die Operationen unter Leitung selbst finden und sich zu dem Allgemeinen, wo und wie es not thut, hinaufschwingen, damit er im Gebiete der Regeln und Begriffe überall auf dem festen Boden der Anschauung stehe. Denn die Einsicht in die Gesetze der Zahl hängt, wie alle wahre Bildung, nicht von den Gedanken und Einsichten ab, die Andere in sich erzeugt haben, sondern von denen, die in uns entstanden sind. . . . Wir verbinden überall mit der Einsicht die Übung, wenn dieser Ausdruck paßt, mit der Theorie die Praxis; beide sind gar nicht von einander getrennt, sondern gehen ineinander auf; der mündlichen Übung folgt überall die schriftliche, oder das Zifferrechnen dem Kopfrechnen, beides bewegt sich in unzertrennlicher Einheit vorwärts. . . . Ferner verweilen wir bei den Elementen jeder Übung am längsten, nicht eher weiter gehend, bis die Grundlage, auf welcher weiter gebaut werden soll, nicht nur durchaus begriffen, sondern auch zur Übung und Fertigkeit gebracht ist, damit bei dem darauf Gebauten die Unterlage als ein völlig freies Eigentum des Geistes in dem untern Gedankenlaufe behandelt werden könne. Jeder Sprung, jede Übereilung bei den Elementen verdirbt und verzerrt den nachfolgenden Unterricht und bringt Schwanken und Unlust hervor. . . . Mit der Vorstellung wird das Wort geboren, wenn nicht das laut und hörbar ausgesprochene, doch das innerlich gedachte, innerlich ausgesprochene und innerlich gehörte. Solange der Schüler daher seine Operationen nicht mündlich darlegen kann, solange sind die Nebel des Geistes nicht verschwunden. . . .

6. Aus der bisherigen Darstellung erhellt auf unzweideutige Weise, welche Zwecke durch den Unterricht in der Zahlenlehre angestrebt werden: a) Geistesbildung; b) Bildung fürs praktische Leben. Die Geistesbildung hat ihren selbständigen Wert in sich; sie gilt um ihrer selbst willen. Sich auszubilden ist der höhere Zweck des Lebens. Die Art der Ausbildung durch die Zahlenlehre geht aus der Natur des Gegenstandes hervor. Zuerst wird durch sie das innere Anschauungsvermögen bethätigt, und durch dasselbe die wiederholende Einbildungskraft, das Zahlgedächtnis, das Kombinationsvermögen und der Verstand im weitern Sinne des Wortes. . . . Natürlich erreicht man die angedeuteten Vorteile nur durch die rechte Methode; durch sie aber auch sicher. . . .

7. Die Lehrmittel, deren wir zu unserm Vorhaben bedürfen, sind:

a) Veranschaulichungsmittel. . . . b) Bücher, sowohl für den Lehrer als für den Schüler. Der Lehrer bedarf eines Leitfadens, an den er sich hält, wenn er nicht einen bessern, als die bereits vorhandenen, selbst schreiben kann. . . .

8. Wann soll der Unterricht in der Zahlenlehre beginnen? Wir antworten: gleich mit dem Eintritte des Kindes in die Schule, auf der untersten Stufe, und er soll durch alle Stufen und Klassen einer vollständig organisierten Elementarschule fortgeführt werden. . . . Die Mathematik in mehr oder weniger strenger Form ist besonders eine Geistesgymnastik für den Knaben und künftigen Mann. Auf allgemein-logische Demonstrationen lege man es bei Mädchen nicht an! Ihr Sinn ist ihrer Natur nach mehr auf das Unmittelbare, Konkrete, denn auf das Allgemeine und Abstrakte gerichtet. . . .

9. Wie weit soll jede Elementarschule es im Rechnen bringen, oder welches ist das Rechen-Minimum? . . . Unsere Antwort ist kurz diese: Jedes Kind soll im Rechnen so weit kommen, daß es mit Leichtigkeit, mündlich und schriftlich, Aufgaben auflöst, wie das gewöhnliche Leben sie bringt. . . . Der Unterricht in der Zahlenlehre soll den Geist bilden und eine fürs Leben unentbehrliche Fertigkeit mitteilen. Die formale Bildung kann aber eben so gut an kleinen Zahlen und einfachen Verhältnissen, denn an großen und verwickelten Aufgaben erreicht werden. Natürlich ist es preiswürdig, wenn man in dieser Beziehung, ohne Beeinträchtigung anderer wichtiger Unterrichtsgegenstände, viel leistet; aber einer sehr großen Steigerung der Fertigkeiten bedarf es nicht. . . . Wenn daher nach der aufgestellten Forderung ein Elementarschüler bei dem Austritte aus der Schule sogenannte Regeldetri-Aufgaben mit Einsicht auflösen kann, einfache Berechnungen über Waren und ihre Preise, Zinsen u. dgl., so kann man mit den Leistungen der Schule in betreff des Rechnens zufrieden sein. . . . Die vollständigste Klarheit des Schülers in allen Operationen, die er vollzieht, ist das erste, unbedingt notwendige Erfordernis. Fertigkeit bringt auch das Leben; aber die versäumte Einsicht selten.

10. Regeln für den methodischen Gang und die Hauptstufen des Rechenunterrichts. . . . Diese werden gefunden durch Anwendung der allgemeinen Unterrichtsgesetze auf den im Rechenunterrichte zu behandelnden Stoff, d. h. die Zahl und unser (dekadisches) Zahlsystem. Für alle Stufen stellen wir folgende Regeln auf: a) die Entwickelung der Sache, die richtige Erkenntnis, die Klarheit der Auffassung ist überall das Erste, Nächste; die Übung und Anwendung überall das Zweite. b) Gemäß dem Prinzip des Elementarunterrichts wird die richtige Auffassung immer auf dem Wege der Anschauung, der äußern und innern, gewonnen. c) Aus der richtigen Auffassung einzelner Beispiele findet der Schüler die Regel, das Gesetz, das durch vollkommen richtigen (präzisen) Ausdruck dargestellt wird. d) Auf jeder folgenden Stufe wird zuerst das Neue rein für sich betrachtet; dann wird es mit dem Vorhergehenden in Verbindung gebracht, sodaß sich die Übung des Frühern auf allen Stufen wiederholt

(kombinatorisch). e) Auf jeder Stufe wird solange verweilt, bis der Schüler Fertigkeit in der Anwendung gewonnen hat. . . f) Allenthalben wird das Rechnen mit reinen Zahlen mit dem angewandten Rechnen verbunden. . . . g) Der Gebrauch der Ziffer folgt unmittelbar auf die Übung mit reinen Zahlvorstellungen. Erst mündlich, ohne sichtbare Zeichen; dann schriftlich. Beides, also alles, ist Denkrechnen. h) Die Einübung des Zehnergesetzes ist überall entschieden die Hauptsache. . . . Fertige Kopfrechner sind nur auf diesem Wege zu bilden. i) Die angewandten Aufgaben haben vorzüglich die im Lande üblichen Münz-, Maß- und Gewichtssysteme zu berücksichtigen. An den Grenzen fremder Länder oder in Handelsstädten u. s. w. zieht man auch das Fremde heran. k) Auf vollständig genauen, deutlichen mündlichen Ausdruck wird überall ein entscheidender Wert gelegt. Es kommt nicht nur darauf an, daß die Schüler das richtige Resultat finden, sondern sie müssen auch den Gang der Entwickelung in reinem, geläufigem Deutsch darstellen können. . . . l) Auf allen Stufen leite man den Schüler an, selbst solche Aufgaben zu bilden, welche dahin gehören. . . . m) Will man den Wetteifer beleben, so geschieht es am Schlusse einer Stufe. . . . aber man fordere von Kindern nicht mehr, als Kinder leisten können! . . .

Nun folgen die Hauptstufen des Rechenunterrichts im allgemeinen: a) Behandlung des Zahlraumes von eins bis zehn. — Alle sogenannten vier Spezies kommen hier zur Anwendung. Hier gilt das „multum, nicht multa“. Ein kleines Ganze nach allen Seiten, in jeder Beziehung kennen, ist viel wichtiger, als vielerlei in einer Beziehung. b) Der Zahlraum von zehn bis zwanzig. — Einen Haltpunkt bei zwanzig machen, ist richtiger, als gleich von zehn bis hundert fortschreiten, weil die (merkwürdige) Art, unsere Zahlen zu benennen, innerhalb dieses zweiten Raumes sichtbar wird und das Zehnergesetz hier schriftlich zuerst auftritt. c) Der Zahlraum von zwanzig bis hundert. — Auch hier kann und soll man nicht nur die Addition und Subtraktion, sondern auch die Multiplikation und Division üben. d) Der Zahlraum von hundert bis tausend. e) Der Zahlraum von tausend bis hundert tausend und höher hinauf. — Millionen, Billionen u. s. w. nur beispielsweise zur Anerkennung des allgemeinen Gesetzes, durch alle vier Spezies hindurch. f) Ausführliche Anwendung der vier Spezies auf größere angewandte Aufgaben. — Das sogenannte Resolvieren und Reduzieren in weiterem Kreise, als es früher vorkam, mit gemischten Aufgaben. g) Die Bruchrechnung in reinen und angewandten Zahlen. h) Praktische Aufgaben aus den sogenannten Rechnungsarten: Regeldetri (einfache und zusammengesetzte, gerade und umgekehrte), Zins-, Rabatt- und andere Rechnungen. . . .

11. Welches sind die Thätigkeiten des Lehrers und der Schüler bei allen Aufgaben im allgemeinen? . . . Wir nehmen den gewöhnlichen Fall an, daß der Schüler die Aufgabe nicht sogleich lösen könne. Denn zum Lernen dessen, was er noch nicht kann, ist er in der Schule. Was ist nun das Erste, das der Lehrer zu thun hat, nämlich der entwickelnde,

durch Fragen die Aufmerksamkeit des Schülers lenkende und ihn zum Finden des Weges veranlassende Lehrer? Natürlich ist das Erste dies, daß der Lehrer sich still die Frage vorlegt, welches die Ursachen sein mögen, warum der Schüler — vorausgesetzt, daß die Aufgabe dem Standpunkte desselben angemessen ist — dieselbe nicht von selbst auflösen kann. Dieser Ursachen können wesentlich zwei sein: a) der Schüler versteht die Aufgabe, ihrem Sachgehalte nach, nicht; b) er kann die Beziehungen der gesuchten Größe aus den gegebenen nicht auffinden. Daraus erwächst dem Lehrer ein zwiefaches Geschäft: zuerst leitet er den Schüler zum sachlichen Verständnis der Aufgabe, und dann lehrt er ihn die Beziehungen erkennen. . . . Zusammenfassend das Bisherige, besteht die Thätigkeit des Lehrers bei Auflösung der arithmetischen Aufgaben in der sachlichen oder logisch-grammatischen und in der arithmetischen Zergliederung, und die Thätigkeit des Schülers in der Auflösung und in der Ausrechnung. Dieses Vierfache findet sich in der Regel in jeder angewandten Aufgabe aus dem praktischen Leben. Es bildet daher die Einheit in der unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher Beziehungen, welche sowohl in der Vielgestaltigkeit menschlicher Dinge, als in dem Reichtum mathematischer Verhältnisse ihren Grund hat. . . ."

Diesterweg selbst gab in Verbindung mit P. Heuser schon vor Erscheinen des Wegweisers heraus: „Methodisches Handbuch für den Gesammtunterricht im Rechnen; als Leitfaden beim Rechenunterricht und zur Selbstbelehrung." Elberfeld 1829 und 1830. (Die sechste Auflage, von E. Langenberg verbessert und umgearbeitet, 1864). Demselben schlossen sich drei Aufgabenhefte für Schüler an: „Praktisches Rechenbuch für Elementar- und höhere Bürgerschulen" — die zahlreiche Auflagen erlebt haben und neuerdings, ebenfalls von E. Langenberg, den veränderten Verhältnissen entsprechend umgearbeitet worden sind. Wie alle Diesterwegschen Arbeiten, so zeichnen sich auch diese durch Sachkenntnis, Klarheit, Bestimmtheit und feine Psychologie aus. E. Langenberg aber hat es verstanden, dieselben den neuern Forderungen anzupassen.

Es würde zu weit führen, wollten wir die Leistungen aller übrigen obengenannten Rechenmethodiker in ebenso ausführlicher Weise behandeln, wie diejenigen Diesterwegs. Es ist dies aber auch gar nicht nötig. Diesterweg hat thatsächlich alles methodisch Wertvolle und Notwendige, was bei den übrigen, nur mit andern Worten, wenn überhaupt, vorkommt, kurz und bündig zusammengefaßt. Etwas wesentlich Neues bringt also keiner derselben mehr.[7]) Nicht übergangen werden darf aber derjenige Methodiker, welcher auf den Rechenunterricht bis in die neueste Zeit großen Einfluß ausgeübt hat und voraussichtlich auch weiterhin noch aus-

7) Solche, die auf die nähere Bekanntschaft mit den übrigen Rechenmethodikern nicht gern verzichten, verweisen wir auf Jänicke a. a. O. S. 96 ff. Auch bei Sterner a. a. O. S. 461 ff. findet man eingehendere Mitteilungen. Selbstverständlich werden die eigenen Werke dieser Methodiker (vergl. die Litteratur) die allerbeste Auskunft geben.

üben wird, Ernst Hentschel, der langjährige Weißenfelser Erste Seminarlehrer. Hat derselbe doch den Ehrennamen „Vater des neuern Volksrechnens“ erhalten, und stehen doch seine Rechenwerke noch heute in hohem Ansehen.

Was Hentschels Entwickelungsgang betrifft, so ist bekannt, daß derselbe gleichzeitig mit Stubba, dem ebenfalls tüchtigen Rechenmethodiker, und Lüben unter Harnisch von 1822 ab in Weißenfels als Seminarlehrer thätig war. Schon 1824 lenkte er durch seine das Scholzsche Rechenbuch betreffenden sachlichen Ausstellungen die Aufmerksamkeit der Fachgenossen auf sich. Als Schriftsteller aber trat er selbständig erst 1837 mit seinen „Hundert Rechenaufgaben, elementarisch gelöst“ hervor. Dieselben fanden großen Beifall, so namentlich auch bei Diesterweg, bei dem durch seine Schriften über den Rechenunterricht rühmlichst bekannten Erfurter Professor Unger, nicht minder bei Grube, Goltzsch u. a. Namentlich aber hat das 1842 zum ersten Male erschienene „Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen“ (die vierzehnte Auflage, von A. Kölzsch, Hentschels Nachfolger in Weißenfels, besorgt, erschien 1891) Hentschels Ruhm begründet und gesichert.

Hentschel leitet die Vorrede zur ersten Auflage seines Lehrbuchs mit den Worten ein: „Das gegenwärtige Lehrbuch schließt sich in Absicht seines Zweckes den Rechenwerken von Kawerau, Rendschmidt, Scholz, Diesterweg, Kopf, Krancke, Stern, Heer u. a. an. Der Schüler soll denkend rechnen und rechnend denken lernen, das ist das eine; er soll neben der Einsicht auch diejenige Fertigkeit gewinnen, welche das Leben verlangt, das ist das andere. Jenes fordert Lückenlosigkeit, Anschaulichkeit und Reichhaltigkeit des Unterrichts; die Fertigkeit aber ist nur durch vielfache, unausgesetzte Übung zu erreichen. Ich habe diese Bedingungen überall im Auge zu behalten gesucht. Wie weit ich dabei meinen Vorgängern treu geblieben, wo und wie ich von ihnen abgewichen bin, das werden Umsichtige leicht finden.“ [8])

Schon von den „hundert Rechenaufgaben“ sagte Diesterweg: „Sämtliche Aufgaben sind gut gewählt und bildend aufgelöst; meist durch Reduktion auf die Einheit. Sie können als Muster aufgestellt werden“. [9]) Nachdem aber die zweite Auflage des „Lehrbuches“ erschienen war, da ließ er sich vernehmen: „Von einem Manne, der so, d. h. in der Weise bekannt ist, wie Herr Hentschel, erwartet man nichts Gewöhnliches. Er kann nichts Schlechtes liefern, denn er kennt die bisher besten Rechenbücher, hat eine ungeheure Praxis und ist Methodiker. Den meisten Lehrern kann man daher den Rat geben, sich seiner Führung unbedingt zu überlassen; von Anfängern ist es zu fordern“. In ähnlicher Weise urteilen andere kompetente Zeitgenossen über Hentschels „Lehrbuch“. So insbesondere auch der langjährige Mitarbeiter an Lübens „Päda-

8) Hentschel a. a. O. S. III.
9) Diesterweg, Wegweiser ꝛc. S. 182.

gogischem Jahresbericht", der mit der Rechenmethodik und Rechenlitteratur gründlich vertraute Bartholomäi.

Nicht minder großen Beifall fanden Hentschels übrige mit dem „Lehrbuche" in Verbindung stehende Gaben: „Rechenfibel". — „Aufgaben zum Zifferrechnen". — „Rechenbuch für die abschließende Volksschule". — „Aufgaben zum Kopfrechnen". — „Aufgaben über Dezimalbrüche". — Von denselben haben namentlich die beiden ersten eine stattliche Reihe von Auflagen erlebt.

Was die Stellung Hentschels in der Geschichte des Rechenunterrichts anlangt, so dürfte ein neuerer Rezensent seiner „Aufgaben zum Kopfrechnen" freilich etwas zu weit gehen, wenn er sagt: „Hentschel nimmt in der Geschichte des Rechenunterrichts eine epochemachende Stellung ein, die ihm Scholz, Stubba, Grube u. a. nicht streitig machen konnten. Die für ein rationelles, elementares, vor allem formalbildendes Rechnen von Pestalozzi gegebenen Prinzipien, die Diesterweg und Heuser[10]) in ihrem Rechenbuche zur Anwendung brachten, fanden im Hentschelschen Lehrbuche zuerst ihre volle systematische Ausgestaltung".[11]) Doch stimmt damit überein, was Jänicke abschließend über Hentschels Bedeutung schreibt: „Nach der historischen Entwickelung des Rechenunterrichts muß Hentschel als der hervorragendste Vertreter der gegenwärtigen rationellen, formell und praktisch bildenden Methode betrachtet werden. In ihm gipfeln alle Bestrebungen zur vollendeten Ausbildung und volkstümlichen Gestaltung derselben".[12])

§ 8.

Das Rechnen im Dienste der sittlichen Bildung. Herbart und Grube.

Litteratur. Adam, W. Geschichte 2c. Bartholomäi, F. Besprechung von Grubes Leitfaden. (Im Päd. Jahresberichte, Bd. 7). Leipzig 1853. Bartholomäi, F. Zehn Vorlesungen über Philosophie der Mathematik. Jena 1860. Beetz, K. O. Das Typenrechnen auf psychologischer Grundlage. 1. Teil. Theoretische Darstellung. Halle a. d. S. 1889. Dittes, F. Schule der Pädagogik. 2. Aufl. Leipzig und Wien 1878. Grube, A. W. Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode. Ein methodischer Beitrag zum erziehenden Unterricht. 6. Aufl. Berlin 1881. (Erste Auflage mit dem Titelzusatze: Ein pädagogischer Versuch zur Lösung der Frage: „Wie wirkt der Unterricht auf sittliche Bildung?" Berlin 1842; 2. Aufl. 1852; 3. Aufl. 1856; 4. Aufl. 1865; 5. Aufl. 1873.) Grube, A. W. Der Elementar- und Volksschulunterricht. Erfurt und Leipzig 1851. Hartmann-Ruhsam, Rechenbuch für Stadt- und Landschulen. Ausgabe A. Heft 1. (Dazu Lehrerheft.) Frankfurt a. M. und Leipzig 1892. Herbart, J. F. Sämmtliche Werke herausgegeben von G. Hartenstein. Zweiter Abdruck. Hamburg und Leipzig 1883—92. Herbart, J. F. Pädagogische Schriften. Mit Herbarts Biographie herausgegeben von F. Bartholomäi. 2 Bde. (In H. Beyers Bibliothek der pädagogischen Klassiker.) 3. Aufl. Langensalza 1883. Herbart, J. F. Pädagogische Schriften. In chronologischer Reihen-

10) Es dürfte hier einzuschalten sein: unter steter Rücksichtnahme auf die Bedürfnisse des praktischen Lebens.

11) Nostiz, Deutsche Schule, Januarheft 1877. 12) Jänicke a. a. O. S. 111.

folge herausgegeben, mit Einleitung, Anmerkungen und comparativem Register versehen von O. Willmann. 2 Bde. Leipzig 1873. Jänicke, E. Geschichte &c. Kallas, Methodik des elementaren Rechenunterrichts, prinzipiell-systematisch dargestellt. (Gekrönte Preisschrift.) Mitau 1889. Kaselitz, F. Wie muß sich die Methode des Rechenunterrichts gestalten, damit einerseits den Forderungen des praktischen Lebens in genügender Weise Rechnung getragen wird, und anderseits der Rechenunterricht erziehliche Einflüsse übt und sittliche Bildung wirkt? Berlin 1867. Kaselitz, F. Hilfs- und Übungsbüchlein für den ersten Rechenunterricht. Nach neuen anerkannten methodischen Grundsätzen bearbeitet. Berlin 1868. Kaselitz, F. Wegweiser für den Rechenunterricht in deutschen Schulen. Berlin 1878. Knilling, R. Zur Reform des Rechenunterrichts &c. Räther, Theorie und Praxis des Rechenunterrichts. 1. Teil. Breslau 1891. Rein, Pickel und Scheller, Das erste Schuljahr. 3. Aufl. Dresden 1885. Sterner, M. Prinzipielle Darstellung &c. Tanck, W. Das Rechnen auf der Unterstufe nebst Beitrag zur Frage nach der Entstehung der Zahlbegriffe. Meldorf 1884. Unger, F. Die Methodik &c. Wildermuth, K. Rechnen. (In Schmids Encyklopädie &c.) Ziller, T. Allgemeine Philosophische Ethik. Langensalza 1880. Ziller, T. Grundlegung zur Lehre vom erziehenden Unterricht. 2. Aufl. herausg. von Vogt. Leipzig 1883. Ziller, T. Vorlesungen über allgemeine Pädagogik. 2. Aufl. herausg. von Just. Leipzig 1884.

Nach dem am Schlusse des vorigen Paragraphen Gesagten liegt die Annahme nahe, es gehe die Methodik des Rechenunterrichts in allen wesentlichen Stücken ihrer Vollendung entgegen, habe dieselbe in einigen derselben wohl schon erreicht. In dieser Annahme wird man noch bestärkt durch eine Reihe beachtenswerter Äußerungen.

So sagt z. B. Jänicke an späterer Stelle: „In der Hauptsache muß die Methode des Schulrechnens gegenwärtig als abgeschlossen betrachtet werden. Es ist die Methode, welche den unwandelbaren Gesetzen der Entwickelung des menschlichen Geistes, wie dem Wesen des Lehrstoffs vollständig angemessen ist, welche durch die formelle Bildung zugleich vollen Gewinn für das Leben erzielt, bei welcher also die Zahl und ihre Gesetze den Mittelpunkt bilden, um welchen die sachlichen Verhältnisse sich ordnen. Weder das praktische, noch das geistbildende Element darf überwiegen; nur in der gleichmäßigen Betonung und der gegenseitigen Einschließung, Durchdringung und Förderung beider Prinzipien liegt die goldene Mittelstraße eines rationellen Rechenunterrichts. Sein Ziel ist: Durch Übung der geistigen Kraft Bildung fürs Leben“.[1])

Auch Dittes scheint derselben Meinung zu sein, wenn er schreibt: „Epochemachend wurde das 1829 erschienene Werk von Diesterweg und Heuser: ‚Methodisches Handbuch für den Gesammtunterricht im Rechnen.‘ Dieses und die für den Schüler bestimmten Übungsbücher von denselben Verfassern sind vorbildlich für alle bessern Leistungen auf diesem Gebiete gewesen. Eine große Anzahl ausgezeichneter Methodiker (wir nennen Scholz, Stubba, Strehl, Grube und besonders Hentschel) haben in den letzten Jahrzehnten den Rechenunterricht derart gefördert, daß er jetzt wohl das bestbestellte Fach der Volksschule ist.“[2])

1) Jänicke a. a. O. S. 161.
2) Dittes a. a. O. S. 665.

Am allerbestimmtesten aber äußert sich ein neuerer Methodiker, Kallas, über den vorliegenden Fall: „Das Kapital- und Glanzfach der seminaristischen Pädagogik ist die Methodik des elementaren Rechnens. Während die Seminarien für die übrigen Fächer sich die treibenden Gedanken aus der Philosophie und den betreffenden Fachwissenschaften geben ließen, waren sie in der Rechenmethodik durchaus auf ihre eigene beobachtende Arbeit angewiesen ... Die ältere Schule Pestalozzis, wie sie in Joseph Schmid, Stephani, von Türk und Kawerau auftritt, hat Partielles nach den Grundsätzen des Meisters ausgebaut; die neuere begann ihre epochemachenden Arbeiten mit Diesterwegs und Heusers ‚Methodischem Handbuche für den Gesammtunterricht im Rechnen' und schloß sie mit Hentschel, der eben als der große Meister die Rechenmethodik zum Glanzfach der Seminarien erhoben hat. Denn alles, was noch nach Hentschel erschienen ist, wie das Rechenwerk von A. Lorey und C. Dorschel, das Rechenbuch von Kaselitz und Geyger, ferner die in den Ostseeprovinzen erschienenen Rechenbücher von Kellner, von Dohne u. a. legt Zeugnis dafür ab, daß die elementare Rechenmethodik nun schon zu einer einheitlichen empirischen Abrundung gelangt ist und auf dem eingeschlagenen Wege nicht mehr bedeutsam weiter zu fördern ist, als Hentschel sie gefördert hat." [3])

So bestimmt nun aber auch diese Meinungsäußerungen lauten mögen, beizupflichten vermögen wir ihnen trotzdem nicht. Aus folgenden Gründen.

Erstens konnte ein Abschluß in der Entwickelung des Rechenunterrichts schon deshalb nicht stattgefunden haben, weil das Rechnen dem Leben dienen soll, dieses sich aber in stetem Flusse befindet. Alle Bedürfnisse, die Bildungsverhältnisse, die Wissenschaften ändern sich mit der Zeit. Das giebt immer wieder Anlaß, auch im Rechnen fortzuschreiten.

Zweitens war das Vermächtnis Pestalozzis noch nicht erschöpft. Wohl ist es wahr, daß Harnisch und Diesterweg den Widerstreit, welcher zwischen dem materialen und formalen Rechnen herrschte, ausglichen. Auch hat Hentschel auf dieser Grundlage zweifellos Großes geleistet. Aber keiner von ihnen hat doch mehr gethan, als die damals zu lösende Aufgabe forderte. Auch standen alle noch auf Pestalozzischem Boden, insofern sie am Anschauungsprinzipe festhielten. Konnte da nicht ein Neuerer kommen und den Hebel gerade an der Stelle einsetzen, wo sie stehen geblieben waren, d. h. Pestalozzis Grundlage berichtigen, ergänzen oder — durch Aufstellung eines neuen Prinzips — ganz beseitigen wollen? Diese Möglichkeit war nicht ausgeschlossen. Und weiter: Konnte nicht der Zweck des Rechnens selbst wieder in Frage gestellt werden? Konnte nicht an Stelle der formal-materialen Bildung ein höheres Bildungsziel treten? [4]) Hatte nicht Pestalozzi selbst ein solches angedeutet, und konnte nicht einer kommen, der es wieder aufgriff, ausgestaltete und dadurch zugleich die Methode des Rechnens umgestaltete?

---

3) Kallas a. a. O. S. 1 f.
4) Beetz a. a. O. S. 67.

Auch diese Möglichkeit lag vor. So gab es also mancherlei, was sich noch ereignen konnte: Der Rechenunterricht konnte weiter entwickelt werden durch Abänderung oder Beseitigung des Pestalozzischen Anschauungsprinzips und durch Aufstellung eines höhern Bildungszieles. Ja, es lag sogar die Möglichkeit vor, Pestalozzis Formalprinzip völlig zu verneinen und eine Entwickelung des Rechenunterrichts lediglich nach dem Materialprinzipe anzustreben.

Das alles hat sich aber auch thatsächlich ereignet. Denn: 1. Es ist ein höheres Bildungsziel aufgestellt worden, welches zugleich die Pestalozzische Grundlage beeinflußte. 2. Man hat es unternommen, ohne das Formalprinzip auszukommen. 3. Man hat die Grundlage, das Anschauungsprinzip Pestalozzis, verneint. Gehen wir hier der ersten dieser drei Thatsachen, der Aufstellung des höhern Bildungszieles, nach.

Pestalozzi betonte die formale, seine Gegner forderten die materiale Bildung. Harnisch und Diesterweg führten den Ausgleich herbei und stellten den Rechenunterricht in den Dienst der formalen und materialen Bildung zugleich. Als vorzüglichste Leistung dieser Richtung besitzen wir das Lehrbuch des Rechenunterrichts von Hentschel. Aber schon Pestalozzi schwebte ein höheres Ziel vor. Wenn er es auch nicht klar und deutlich ausgesprochen hat, so strebte er doch dahin, seinen Unterricht zu einem „erziehenden“ zu machen. Und „erziehender Unterricht“ sollte namentlich auch sein Rechenunterricht sein.

Was Pestalozzi in dieser Weise anstrebte, haben wir oben den Kern seiner Reformarbeit auf dem Gebiete des Rechenunterrichts genannt.[5]) Über der Beschäftigung mit dem Äußern, der Schale, wäre derselbe seinen Jüngern fast verloren gegangen. Da rettete ihn zum erstenmale der „genialste der Erben des Meisters“, Johann Friedrich Herbart (1776—1841), indem er mit aller Schärfe und mit allem Nachdrucke als obersten Zweck der Bildung die „Charakterstärke der Sittlichkeit“ hinstellte. Denn um diesen Zweck zu erreichen, forderte er anstatt des gewöhnlichen den „erziehenden Unterricht“. Der gesamten Mathematik aber überwies er dabei eine sehr wichtige Rolle, wie sich aus seinen pädagogischen Schriften leicht nachweisen läßt.[6])

Sollte das Rechnen in den Dienst der „Idee des erziehenden Unterrichts“ treten, so mußte diese Idee selbst erst klar ausgesprochen werden. Bei Pestalozzi ist sie es noch nicht. Dieser ringt wohl danach, doch die Fülle seiner eigenen Gedanken ist so groß, daß er durch sie hindurch nicht zum Abschlusse gelangen kann. Sich aber mit den Gedanken anderer zu beschäftigen, dazu findet er nicht die nötige Zeit und Ruhe. So bildet denn Herbart eine der denkbar glücklichsten Ergänzungen Pestalozzis. Der Umstand aber, daß derselbe nicht nur ein großer Philosoph, sondern

5) Vergl. S. 62.

6) Herbarts Päd. Schriften (Ausgabe von Willmann) a. a. O. Herbarts Päd. Schriften (Ausgabe von Bartholomäi) a. a. O. Herbarts Sämmtliche Werke, Bd. X, a. a. O.

auch ein bedeutender Mathematiker war, kam ihm hier noch besonders zu statten.

Was Herbart unter „Charakterstärke der Sittlichkeit“, dem obersten Zwecke der Erziehung, und unter „erziehendem Unterrichte“, dem Hauptmittel der Schule zur Erreichung jener, überhaupt versteht, setzen wir hier als bekannt voraus. Auch auf den Begriff der „Vielseitigkeit des Interesses“, womit er das nächste Ziel des Unterrichts bezeichnet, wollen wir nicht näher eingehen[7]. Nur wie diese Begriffe in Rücksicht auf den Rechenunterricht zu nehmen sind, soll kurz erörtert werden.

Wie jeder Unterricht, so kann auch der Rechenunterricht zunächst nur auf den Gedankenkreis (Vorstellungskreis) einwirken. Doch in doppelter Weise. Er kann den Inhalt (Gedanken, Vorstellungen) desselben vermehren (Materialprinzip), und er kann ihn beweglicher machen (Formalprinzip). Geschieht solches nur um seiner selbst willen, so ist der Unterricht kein erziehender. Wird die Vermehrung und Beweglichkeit aber einem darüber hinausliegenden Zwecke dienstbar gemacht, so ist er es. Dieser Zweck muß selbstverständlich ein unter allen Umständen wertvoller sein. Herbart findet ihn in der „Charakterstärke der Sittlichkeit“. Das ist eine im Handeln, im Verkehre mit andern sich äußernde Bestimmtheit. Sie hat sich in der Bethätigung der durch den Unterricht gewonnenen sittlichen Einsicht, als ein mit der letztern übereinstimmendes, zur That antreibendes Wollen zu zeigen. Da aber jede Einsicht, auch die sittliche, erst durch ihre Klarheit und Bestimmtheit zu einer wertvollen, das Wollen begünstigenden wird, so ist dieses der eine Punkt, in dem der Rechenunterricht einsetzen kann und soll. Der andere ist in der Klarheit und Bestimmtheit der Objekte, auf welche die Handlungen gerichtet sind, zu suchen. Daß letztere wesentlich durch den Rechenunterricht gefördert werden können, liegt nahe.

Soviel über die Stellung Herbarts zu unserer Frage. Zweierlei ist dem nur noch hinzuzufügen. Erstens: Die mehrfach ausgesprochene Meinung, als sollten durch das neue höhere Ziel, sittliche Bildung, die alten Ziele, formale und materiale Bildung, ganz beseitigt werden, ist eine irrige. Denn nicht beseitigt, sondern in eine höhere Einheit zusammengefaßt werden sollen sie. Hat doch auch die sittliche Bildung eine formale und materiale Seite. Zweitens: Der Einwand, auch der Rechenunterricht eines Harnisch, Diesterweg, Hentschel u. a. sei geeignet, die sittliche Bildung zu fördern, ist ein hinfälliger. Denn nicht um etwas, das unter zufälligen günstigen Verhältnissen geschehen kann, handelt es sich in unserm Falle, sondern um die planmäßige Herbeiführung der zum Unterrichtszwecke erhobenen sittlichen Bildung innerhalb des Rechenunterrichts.

Hat Herbart hiernach nun das Verdienst, neue und höhere Gesichtspunkte auch für den Rechenunterricht aufgestellt zu haben, so darf er wohl als derjenige, welcher den Kern der Pestalozzischen Reform-

7) Vergl. aber S. 96 f.

arbeit auf dem Gebiete des Rechenunterrichts rettete, gelten. Nur legte Herbart alles, was er gab, groß an; die Kleinarbeit überließ er andern. Und so würde es den Thatsachen nicht entsprechen, wollte man alles, was sich auf den neuen, höhern Zweck des Rechenunterrichts bezieht, auf ihn allein zurückführen. Noch ein zweiter Pädagog ist vielmehr neben Herbart zu nennen, der sich um die Weiterentwickelung des Rechenunterrichts sehr verdient gemacht hat. Das ist August Wilhelm Grube (1816—84). Ja, man darf behaupten, daß Grube den Kern der Pestalozzischen Rechenreform zum zweitenmale rettete, als auch Herbarts Anregungen Gefahr liefen, in Vergessenheit zu geraten. Denn sein erstes Auftreten erfolgte ein Jahr nach Herbarts Tode, im Jahre 1842.

In diesem Jahre erschien nämlich: „Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule, nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode. Ein pädagogischer Versuch zur Lösung der Frage: ‚Wie wirkt der Unterricht sittliche Bildung?‘ Von A. W. Grube“. Das, was Grube darin bot, ist bekannt geworden unter den Bezeichnungen: „Monographische Zahlbehandlung“ und „Allseitige Betrachtung der Zahlen“. Anfangs fand der Leitfaden wenig Beachtung, obschon mehrere Herausgeber von Rechenbüchern, so z. B. auch Scholz, seinen Inhalt sich sehr zu nutze machten. Das wurde erst anders, als 1852 die zweite Auflage erschien. Von da ab entstand eine immer weiter um sich greifende Bewegung innerhalb der pädagogischen Kreise Deutschlands, und schließlich spitzte sich dieselbe so zu, daß man hätte glauben sollen, Deutschlands Volksschullehrer wollten sich in zwei große Parteien, Anhänger und Gegner Grubes, scheiden. So ging es fort bis Ende der fünfziger Jahre. Da trat der Rückschlag ein. Man besann sich, stellte ruhige Vergleichungen an, schied aus, was nicht gefiel, und kam nun eigentlich erst zu einer Würdigung der Verdienste, welche sich Grube um die Methodik des Volksschulrechnens erworben hatte.

Was aber war das Wesentliche an Grubes Büchlein? Schon der Titelzusatz der ersten Auflage sagt es: „Versuch zur Lösung der Frage: ‚Wie wirkt der Unterricht sittliche Bildung?‘“ Und noch deutlicher steht es auf dem Titelblatte der von Grube selbst besorgten letzten (sechsten) Auflage vom Jahre 1881: „Ein methodischer Beitrag zum erziehenden Unterricht“. Es ist also von vorn herein klar, daß Grube den Schwerpunkt seines Buches in den Unterrichtszweck und nicht in das Unterrichtsverfahren (die Methode), durch welches jener erreicht werden soll, verlegt. Auch unterliegt es keinem Zweifel, daß er auf dem, was Pestalozzi und Herbart in der von ihm jetzt betonten Richtung bereits gethan hatten, weiter bauen will.

So heißt es im Vorworte zur ersten Auflage, nachdem vorher von der Bildung der Anschauung die Rede gewesen ist: „Mit dieser intensiven Bildung der Anschauung hängt die Bildung zur Sittlichkeit auf das innigste zusammen. Nur aus der Vertiefung in das Lehrobjekt kann die Liebe zu demselben entstehen, und nur das, was der

Mensch liebt, will er auch. Nur der Unterricht wirkt lebendig auf das Gemüt des Schülers, welcher mit dem Verstande zugleich den Willen erobert, und alle Anschauungsmethoden sind so lange ‚unpraktisch‘, als sie mit dem Anschauen nicht auch das Anschauenwollen erzeugen. Wir haben darum das Prinzip der Sittlichkeit als das allein maßgebende für die Erziehung wie für ihren wesentlichsten Teil, den Unterricht, an die Spitze unserer Entwickelung gestellt.“ [8]).

Das ist ganz Herbartisch. Und auch das, was weiter in der Einleitung folgt, schließt sich an Pestalozzi und Herbart in den Hauptzügen an, wenn auch da und dort die Einwirkung der Hegelschen Schule durchblickt. Die Einleitung handelt zuerst „Von der sittlichen Bedeutung der Schule und des Unterrichts überhaupt.“ Hier heißt es z. B. „Durch Wort und Bild, durch Anschauung und Übung bewirkt er (der Unterricht) in und mit der intellektuellen auch ethische und ästhetische Bildung, weil durch Vorstellungen auch Gefühle, Willensakte und Gesinnungen erzeugt werden ... Jeder Unterrichtsgegenstand weckt auf seine Weise den Geist und die Gemütskräfte; von jedem Punkte des Umkreises läßt sich in den Mittelpunkt des menschlichen Wesens vordringen. Darum ruht auf jedem gründlichen und gut geleiteten Unterrichte ein pädagogischer Segen, wie denn überhaupt Erziehung ohne Unterricht gar nicht möglich ist. Darum sind wir auch berechtigt, von der sittlichen (ethischen und ästhetischen) Seite des Unterrichts im allgemeinen und der einzelnen Unterrichtsobjekte im besondern zu sprechen ... [9])

Die Einleitung handelt ferner „Von der sittlichen Bedeutung des Elementarunterrichts und des elementaren Rechnens insbesondere.“ Hier äußert sich Grube unter anderm: „Wie die Anschauung die Grundlage für die gesamte Erkenntnisentwickelung bildet, so ist die Elementarschule die Grundlage für alle übrigen Unterrichtsanstalten... Der Elementarunterricht erfaßt also seine Schüler auf dem Standpunkte der Anschauung ... Wo das Lernen nicht ein Ergebnis des Lernenwollens ist, da ist es keine wirkliche Thätigkeit, denn eine solche ist nur als Resultat eines Willensaktes denkbar. Der wahre Elementarunterricht ist darum eine Anleitung zum Anschauen-Wollen, nur so ist der Geist in der Anschauung der freie, sich selbst bestimmende, und der ganze, d. i. sittliche Mensch im Anschauen thätig.“ [10])

Bei jeder Anschauung, worunter ein konkretes Einzelbild zu verstehen ist, sind Inhalt und Form zu unterscheiden. Die Entwickelung des Anschauens nach der formalen Seite nennt Grube die „Logik des Anschauens.“ Darauf untersucht er, welchen Unterrichtsgegenstand dieselbe vorzugsweise zu vertreten habe und findet, daß dieses das Rechnen sei. Denn es ist die Vermittelung des anschauenden mit dem vorstellenden Denken. „Indem das elementare Rechnen das mit der eigentlichen Arith-

8) Grube, Leitfaden S. VI.
9) Grube a. a. O. S. 1 f.
10) Grube a. a. O. S. 7 f.

metik gemein hat, daß ihm die abstrakte Zahl zum Grunde liegt, seinen praktischen Stoff aber auf dieses Allgemeine zurückführen muß: so zwingt es den Schüler zur Abstraktion von der empirischen Anschauung und zur Reflexion auf sich, — und weil jener arithmetische Stoff als rein abstrakter einer systematischen Entwickelung nicht bloß fähig ist, sondern auch bedarf, erfordert er eine stetige Aufmerksamkeit für seine Entwickelung, — aus welchen Thätigkeiten dann als notwendiges Resultat sich die Beobachtung und das Zusammenfassen der konkreten Mannigfaltigkeit des Anschauungsmaterials zur abstrakten Einheit des Denkens (der reinen Thätigkeit im Anschauen) ergiebt." 11)

Nachdem nun noch „Von der Methode des elementaren Rechnens" und ihrer historischen Entwickelung die Rede gewesen ist, folgt abschließend die „Einteilung des Stoffes." In dieser wird ganz besonderes Gewicht auf die Liebe zur Arbeit gelegt. „Wo die Liebe zur Arbeit nicht durch die Arbeit selbst hervorgerufen wird, da bleiben alle Zuchtmittel und Ermahnungen vergeblich. Diesen lebendigen Trieb für die Sache in dem Schüler zu erzeugen, ist die Lebensaufgabe des Elementarunterrichts, welcher für das gesamte Schulleben, ebenso für die Erkenntnis- wie für die Willens-Entwickelung, den Grund legen soll. Weil aber das Rechnen vorzugsweise das rationelle Objekt der Elementarschule ist, so muß hier auch vorzugsweise jene Einheit des Erkennens und Wollens erstrebt werden. Ohne einen organisch gegliederten Unterrichtsstoff möchte aber alle Mühe des Lehrers, auf die sittliche Bildung des Schülers zu wirken, vergebens sein, denn nur mit dem Bewußtsein der in stetiger Einheit sich entwickelnden Kraft kann in dem jungen Geiste der Trieb entstehen, diese selbstthätig weiter zu entwickeln." 12)

Das Unterrichtsverfahren, durch welches Grube sein hohes Ziel, sittliche Bildung, erreichen will, wird, wie bereits erwähnt, die „monographische Zahlbehandlung" oder die „allseitige Zahlbetrachtung" genannt. Man nennt es auch kurz die „Grubesche Rechenmethode". Was Grube bringt, bezieht sich vornehmlich auf die ersten Übungen im Rechnen. Es soll aber nach seinen eigenen Worten sein: „eine organische Gliederung des Rechenstoffes aus dem Wesen der Zahl heraus, wo das mathematische Objekt und nicht die Operation und Regel das Einteilungsprinzip abgiebt." 13) Und dann: „Wie das spätere Rechnen von dem abstrakten Regelwerk der ‚einzelnen Rechnungsarten' loszumachen ist, so sind die elementaren Vorübungen von dem Formalismus der ‚Spezies' zu befreien. So lange die Einteilung dieses elementaren Teiles vom Rechenunterrichte in die vier Spezies beibehalten wird, kann

11) Grube a. a. O. S. 12. Vergl. dazu: Ziller, Grundlegung a. a. O. S. 276. Dort heißt es: „Insoweit muß immer die Mathematik zu Gebote stehen und benutzt werden, welche die formale Seite der Naturwissenschaft in dreifacher Hinsicht, in Bezug auf Zahl, Gestalt und Bewegung ist". Ziller stützt sich hier auf: Bartholomäi, Philosophie der Mathematik a. a. O. 1. Vorlesung.

12) Grube a. a. O. S. 26.

13) Grube a. a. O. S. 19.

es auch nicht zu einer lebendigen Durchdringung der subjektiven und objektiven Methode kommen." [14])

Das ist gleichsam das Thema der Grubeschen Forderungen. In der nachfolgenden Ausführung aber heißt es: „Das elementare Rechnen nach den Spezies auseinanderfallen zu lassen, ist dasselbe, als im ‚Anschauungsunterrichte' dem Kinde die Gegenstände nach den Rubriken von Größe, Gestalt, Farbe u. s. w. vorzuführen, oder die Botanik mit dem Linnéschen Systeme zu beginnen. Wie aber das Kind den Gegenstand nicht kennen lernt, wenn es nach einem Merkmale verschiedene Gegenstände anschaut, sondern wenn es den einen Gegenstand nach seinen verschiedenen Merkmalen betrachtet — und wie es falsch ist, dem Anfänger in der Botanik die Pflanzen so vorzuführen, daß er erst nur die Wurzel, dann den Stengel u. s. w. anschaue, da er vielmehr die Pflanze ganz sieht und sehen soll: so lernt der Schüler auch z. B. die Zahl 4 nicht kennen, nämlich mit wahrer Durchdringung des Objekts, wenn er heute $2 + 2 = 4$ lernt, nach einigen Wochen, wenn das Subtrahieren an die Reihe kommt, $4 - 2 = 2$ u. s. w. Vielmehr hat er ja, wenn er weiß, daß $2 + 2 = 4$, damit zugleich die übrigen Anschauungen: $2 \cdot 2 = 4$, $4 - 2 = 2$, $4 : 2 = 2$, und die Methodik hat Unrecht, wenn sie diesen objektiven Zusammenhang ‚nach den Operationen' zerreißt. Eine solche Teilung stärkt aber nicht, sondern schwächt die Kraft der Anschauung, weil sie deren Konzentration auf einen Punkt und somit das ‚Beobachten im Anschauen' hindert. Der Elementarschüler lerne die Zahlen nicht vereinzelt und abgerissen nach den Operationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens, sondern jede Zahl (im Raume von 1 bis 100) allseitig nach jenen Operationen in ihrer organischen Einheit kennen und behandeln." [15]) Und weiterhin, nach einer Zwischenbemerkung über Franckes Verfahren, welches dem Grubeschen in etwas ähnlich ist: „Da der Zahlraum, welcher der Anschauung unmittelbar offen liegt und zugänglich ist, der von 1 bis 100 ist, und alles Rechnen mit größern Zahlen nur durch Beziehung derselben auf das erste Hundert bewerkstelligt wird, so muß in diesem Raume jede Zahl nach ihren verschiedenen Bestandteilen klar vor der Seele des Schülers stehen; aus der allseitigen Anschauung der einzelnen Zahlen müssen die Operationen der Spezies von selbst hervorgehen, und selbst die angewandten Aufgaben nur dazu dienen, um die Vorstellung der reinen Zahl desto mehr zu befestigen; dabei endlich müssen die einzelnen Stufen in einem solchen organischen Zusammenhange stehen, daß die eine sich in der andern wieder und reicher entfaltet. Nur so wird der Grund gelegt für ein schnelles Kopfrechnen sowohl, wie für ein gründliches Denkrechnen. Der Schüler empfängt das nötige Material, das er dann zu jeder Operation gegenwärtig und bereit hat". [16])

14) Grube a. a. O. S. 29.
15) Grube a. a. O. S. 19.
16) Grube a. a. O. S. 20.

Aus diesen Ausführungen geht namentlich auch hervor, wie Grube zu seinem Verfahren gekommen sein mag. Er nennt den Anschauungsunterricht und die Botanik und bemerkt, daß es falsch sei, das Kind mehrere Gegenstände nach nur einem Merkmale, anstatt einen Gegenstand nach seinen mehreren Merkmalen betrachten zu lassen. Indem er letzteres nun als mustergiltig auch für die übrigen Unterrichtsfächer, welche es mit Gegenständen, die veranschaulicht werden können, zu thun haben, erachtet, kommt er durch Analogie zu dem Ergebnisse: Die Methode des Rechenunterrichts muß nach dem Vorbilde der Methode des Anschauungs- und naturgeschichtlichen Unterrichts umgestaltet werden, wenn sie Anspruch auf Naturgemäßheit machen will. Weil also im naturgeschichtlichen Unterrichte mit Individualbetrachtungen begonnen wird, weil an einzelnen Pflanzen die Kenntnis dessen erworben wird, was alle oder doch viele Pflanzen mit einander gemein haben, deshalb empfiehlt es sich durchaus, im Rechenunterrichte in gleicher Weise zu beginnen, d. h. die ersten Zahlen als Individuen aufzufassen, allseitig zu betrachten und dadurch zu erwerben, was sich weiterhin auf alle Zahlen anwenden läßt.

Grube ist sich dessen wohl bewußt gewesen. Welche Wirkungen er sich aber von seiner Neuerung verspricht, das geht noch deutlicher als aus den obigen Darlegungen aus einigen Auslassungen in einer seiner spätern Schriften hervor.[17]) Es heißt da unter anderm: „Ich bin den ‚faßlichen Anweisungen' und ‚methodischen Leitfäden', welche das Rechnen in eine Unzahl von Übungen zersplittert hatten und zu dicken Bänden angeschwollen waren, dadurch entgegengetreten, daß ich jede Zahl ganz einfach als Individuum anschauen ließ, daß nicht mehr die Operation den Einteilungsgrund bildete, sondern aus der allseitigen Anschauung jeder einzelnen Zahl sich die Operationen von selbst ergaben. Indem sich so die Stufenfolge der Übungen unendlich vereinfacht, gewinnt der Schüler Zeit und Lust, sich in das Zahlindividuum zu vertiefen, mit seinem Gesetz und Wesen vertraut zu werden. Er braucht die Regel nicht mehr von der Zahlanschauung zu abstrahieren, sondern hat sie bereits in der Art und Weise seiner Anschauung; er rechnet die Exempel nicht nach allgemeinen Regeln, sondern entwickelt selber die Regel aus dem einzelnen Falle. Nicht die subjektive Willkür des Lehrers ist der Lehrgang, sondern dieser ist mit der Anschauung des Zahlobjekts gegeben. Das Verständnis des Exempels geht über zur produktiven Anschauung, welche das Exempel selber macht; und der Schüler spielt nun mit der Aufgabe im höhern Sinn des Wortes; und weil er überall die freie Überschau seiner Thätigkeit hat, genießt er sich selber in seiner Arbeit. Bis zu diesem Punkte hatte es der Rechenunterricht trotz aller Methodik nicht geführt; denn vor lauter Virtuosität in den einzelnen Operationen konnte sich die Kraft des Schülers nicht im individuellen Ganzen konzentrieren."[18])

Doch noch Eins ist zu berücksichtigen, um Grubes Stellung in

17) Grube, Der Elementar- und Volksschulunterricht a. a. O.
18) Grube a. a. O. S. 154.

der Geschichte des Rechenunterrichts mit Rücksicht auf sein Verfahren richtig aufzufassen. Wir gehen dabei noch einmal von Pestalozzi aus.

Dreierlei hatte Pestalozzi für die Umgestaltung des Volksschul-Rechenunterrichts gethan: er hatte das Anschauungsprinzip als Grundlage, die formale Bildung als Ziel und ein eigentümliches Lehrverfahren als Mittel gegeben, um von dem bisherigen gedankenlosen Mechanismus loszukommen.[19]) Davon wurde die dritte Gabe, das Lehrverfahren, sehr bald als eine methodische Verirrung, wahrscheinlich auch von Pestalozzi selbst, erkannt und aufgegeben[20]). An den beiden andern Gaben, Grundlage und Bildungsziel, hielt man aber noch fest. Darauf erhielt durch Harnisch und Diesterweg das Pestalozzische Bildungsziel diejenige Ergänzung, welche es erhalten mußte, um allen berechtigten Ansprüchen zu genügen: mit dem Formalprinzipe verband man die Forderung einer planmäßigen Berücksichtigung der Bedürfnisse des praktischen Lebens. Was blieb da für eine spätere Reform noch übrig? Nichts weiter als die Pestalozzische Grundlage, das Anschauungsprinzip. Und das ist denn auch wirklich das Feld gewesen, auf welchem Grube wirkte. So aufgefaßt, erscheint uns sein Verfahren als eine weitere Ausgestaltung des Pestalozzischen Anschauungsprinzips. Die Anschauung galt Pestalozzi als das absolute Fundament aller Erkenntnis. Durch die Anschauung gedachte er Naturkunde, Geographie und andere sachunterrichtliche Fächer aus den Fesseln eines gedankenlosen Mechanismus zu befreien. Er war fest davon überzeugt, daß sie auch im Rechenunterrichte dasselbe leisten werde. Und so sollten die Zahlen wirklich angeschaut werden, d. h. ihr Inhalt, die Menge der Einheiten, sollte Gegenstand sinnlicher Wahrnehmungen sein. Der Schüler sollte dahin gelangen, sich bei jeder Zahl des sinnlichen Hintergrundes (der Menge der Einheiten) bewußt zu bleiben.

Grube hielt das Anschauungsprinzip fest, indem er das Verhältnis der Zahlanschauung zur Zahlvorstellung für analog demjenigen zwischen Anschauung und Vorstellung der Sinnendinge erachtete und in diesem Sinne forderte: „So muß in diesem Raume (1 bis 100) jede Zahl nach ihren verschiedenen Bestandteilen klar vor der Seele des Schülers stehen“.[21]) Nach Grube hat deshalb auch jede dieser Zahlen eine besondere methodische Einheit, einen besondern Lernabschnitt zu bilden, ganz ähnlich, wie die Gegenstände des naturgeschichtlichen und des Anschauungsunterrichts. Und da nur eine gründliche Zahlanschauung zu einer klaren und deutlichen Zahlvorstellung führen kann, so muß die Betrachtung der einzelnen Zahlen eine allseitige sein.

Grubes Lehrgang umfaßt drei Kurse: a) Rechnen mit ganzen Zahlen von 1 bis 100 in den zwei Gruppen 1 bis 10 und 10 bis 100; durchzuarbeiten in zwei Jahren, bei wöchentlich vier Stunden. b) Rechnen

19) Vergl. oben S. 57.

20) Wenn Pestalozzi, was allerdings mehrfach bezweifelt wird, den 14. Band seiner „Sämmtlichen Schriften“ (Stuttgart 1826) selbst geschrieben hat, so ist dieses thatsächlich der Fall gewesen.

21) Grube a. a. O. S. 20.

mit ganzen Zahlen über 100 in den zwei Gruppen 100 bis 1000 und beliebige Zahlräume; durchzuarbeiten in einem Jahre. c) Rechnen mit Bruchzahlen in den zwei Gruppen „allseitige Anschauung" und „Übung in den Spezies als solchen"; durchzuarbeiten in einem Jahre.

Wenn aber von Grube die Rede ist, so denkt man zunächst wohl immer an seine Behandlung der Zahlreihe 1 bis 100. Denn in dieser tritt das Eigenartige des Grubeschen Lehrverfahrens am deutlichsten hervor, und von ihr hauptsächlich ist vieles in unsere Volksschulen eingedrungen. Selbstverständlich ist hier nicht der Ort, darauf näher einzugehen, denn Grubes Leitfaden, 1881 in 6. Auflage erschienen, ist allen, die sich eingehender mit seiner Lehrweise beschäftigen wollen — und dazu können wir nur dringend raten — zugänglich. Auch enthält unsere Behandlung der Zahlreihe 1 bis 10 manches, was mit Grubes Auffassung übereinstimmt.[22]) Nur durch ein dem „Leitfaden" entlehntes Beispiel wollen wir die vorstehenden Darlegungen noch illustrieren und abschließen: durch die Behandlung der Zahl Vier.[23])

„Vierte Stufe.

Die Vier.

I. a. 1) Messen mit 1.

$$| \; | \; | \; | \quad 4$$

$$\begin{array}{ll} | & 1 \\ | & 1 \\ | & 1 \\ | & 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \quad (1 + 1 = 2,\ 2 + 1 \text{ ꝛc.}) \\ 4 \times 1 = 4. \\ 4 - 1 - 1 - 1 = 1. \\ 1 \times 4 = 4. \end{array} \right.$$

2) Messen mit 2.

$$\begin{array}{ll} | \; | & 2 \\ | \; | & 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 + 2 = 4. \\ 2 \times 2 = 4. \\ 4 - 2 = 2. \\ 2 : 4 = 2. \end{array} \right.$$

3) Messen mit 3.

$$\begin{array}{l} | \; | \; | \\ | \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3 + 1 = 4,\ 1 + 3 = 4. \\ 1 \times 3 + 1 = 4. \\ 4 - 3 = 1,\ 4 - 1 = 3. \\ 3 : 4 = 1\ (1). \quad (3 \text{ in } 4\ 1 \text{ mal, mit } 1 \text{ Rest.}) \end{array} \right.$$

Tiere mit 4 Beinen und 2 Beinen — Fahrzeuge mit 1 Rade, 2 und 4 Rädern. Vergleichung derselben.

4 ist 1 mehr als 3, 2 mehr als 2, 3 mehr als 1.
3 ist 1 weniger als 4, 1 mehr als 2, 2 mehr als 1.
2 ist 2 weniger als 4, 1 weniger als 3, 1 mehr als 1.
1 ist 3 weniger als 4, 2 weniger als 3, 1 weniger als 2.

22) Hartmann-Ruhsam, Rechenbuch für Stadt- und Landschulen. 3 Ausgaben für Schüler. Dazu Lehrerhefte. Frankfurt a. M. und Leipzig. Heft 1.
23) Grube a. a. O. S. 31.

4 ist das 4fache von 1, das 2fache (Doppelte) von 2.
1 ist der 4te Teil von 4, 2 ist die Hälfte von 4.
Aus welchen gleichen und ungleichen Zahlen ist 4 entstanden?

b. $2 \times 2 - 3 + 2 \times 1 + 1 - 2$ verdoppelt!
$4 - 1 + 1 - 1 + 1 - 3$, wieviel weniger als 4? ꝛc.

c. Welche Zahl muß ich 2 mal nehmen, um 4 zu bekommen?
Von welcher Zahl ist 4 das Doppelte?
Von welcher Zahl ist 2 die Hälfte?
Von welcher Zahl ist 1 der 4te Teil?
Welche Zahl läßt sich 2 mal von 4 wegnehmen?
Welche Zahl ist um 3 größer als 1?
Wieviel muß ich zu der Hälfte von 4 noch hinzuthun, um 4 zu bekommen?
Wieviel mal 1 hat die Hälfte von 4 weniger als 3?

II. Karoline hatte in ihrem Blumentopfe 4 Tulpen, die sie aber schlecht begoß. Da verwelkten ihr erst eine, dann noch eine und noch eine. Wieviel behielt sie noch?

Wieviel Pfennig sind 2 Zweier?

Wieviel Semmeln kannst du für 4 Pfennig kaufen, wenn jede 1 Pfennig kostet?

Wieviel Zweipfennigsemmeln aber?

Antw. So oft ich dem Bäcker 2 Pfennig hinlege, giebt er mir 1 Semmel. Ich lege ihm aber 2 mal 2 Pfennig hin, also bekomme ich auch 2 mal 1 Semmel.

$$\left\{\begin{array}{l} |\ |\ \text{Pfennig} \\ |\ |\ \text{Pfennig} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \text{Semmel} \\ \bullet\ \text{Semmel} \end{array}\right.$$

Eine Bretzel kostet 2 Pfennig, wieviel kosten 2 Bretzeln?

R. bezahlte für 2 Bretzeln 1 Zweier, 1 Pfennig und noch 1 Pfennig. Wieviel kostet eine?

1 Liter oder 1 Kanne hat 2 Schoppen, wieviel Schoppen kommen auf 2 Kannen?

Wenn 1 Schoppen 2 Groschen kostet, wieviel kostet 1 Liter?

Antw. Ein Liter hat 2 Schoppen; kostet 1 Schoppen 2 Groschen, so kosten 2 Schoppen 2 mal 2 Groschen = 4 Groschen.

Welcher Teil von 4 Schoppen ist 1 Schoppen? Welcher Teil von 1 Liter ist 1 Schoppen? Welcher Teil von 2 Liter ist 1 Schoppen?"

Überblicken wir nach diesem noch einmal, was Grube darbot, so finden wir, daß es zweierlei war: ein inneres Prinzip und ein äußeres Mittel, ein Unterrichtszweck und ein Unterrichtsverfahren. Als Unterrichtszweck stellte er die „sittliche Bildung" auf, als Unterrichtsverfahren, durch welches dieser Zweck erreicht werden sollte, die „allseitige Betrachtung der Zahlen." Der Grubesche Unterrichtszweck bedeutete einen wirklichen und äußerst wichtigen Fortschritt. Denn nicht allein, daß er für die beiden, bis dahin nur lose mit einander verbundenen Bildungsziele die wahre Einheit brachte; er hat überhaupt als der höchste Unterrichtszweck zu gelten. Ob freilich auch das Unterrichtsverfahren ein entsprechend wertvolles sei, darüber sind die Ansichten bis heute auseinandergegangen. So heißt es z. B. bei Beetz:

„Es ist merkwürdig, daß der Kern dieser Theorie, die bezweckte sittliche Bildung, vor der Form, der monographischen Zahlbetrachtung, zunächst vollständig zurücktrat und sich alle Kämpfe nur um die neue Methode drehten. In der ersten Begeisterung fand sie viele Vertreter, und die Gegner kamen fast nicht zu Worte. Indessen zu den letztern gehörten Männer wie Hentschel, Stubba und Sobolewsky. Die Stimmen solcher Führer konnten für die Dauer nicht überschrieen werden, und so leitete sich verhältnismäßig bald der natürliche Vorgang der Verschmelzung gegensätzlicher Ideen ein.

Folgendes kann als vorläufiger Niederschlag dieser Strömung — denn als bereits abgeschlossen darf sie keineswegs gelten — betrachtet werden: 1. die Aufgabe des Rechenunterrichts besteht in erster Linie darin, möglichst klare Zahlanschauungen zu erzeugen ... Jedenfalls dehnt aber Grube dieselben über einen viel zu großen Kreis aus ... 2. Eine Veranschaulichung der Zahlen im Sinne Grubes läßt sich auch erreichen, wenn man, anstatt die vier Rechnungsarten bei jeder Zahleinheit gleichzeitig auftreten zu lassen, den Weg der naturgemäßen Verbindung der entgegengesetzten Zahlveränderung einschlägt, d. h. einen gewissen Kreis zunächst vermittelst gleichzeitiger Addition und Subtraktion durcharbeitet, um hierauf die Multiplikation und Division in engster Beziehung folgen zu lassen. Diese Richtung greift vermittelnd auf Hentschel zurück und zählt außer Sobolewsky und Dorn die meisten Rechenmethodiker der Gegenwart zu ihren Vertretern.“ [24])

Bei Rein finden wir folgende hierher gehörige Stelle: „Man hat in neuerer Zeit da und dort Einwendungen gegen das Grubesche Verfahren erhoben. Mit wenig Glück. Es ist hier nicht der Ort, auf die Sache einzugehen; soviel aber steht unseres Erachtens fest: die allseitige Betrachtung der Zahlen innerhalb des ersten Zehners ist eine Errungenschaft, die als bleibender methodischer Erwerb wird angesehen werden dürfen. Eine andere Frage ist, ob das Prinzip der allseitigen Zahlbetrachtung auch auf den nächst höheren Zahlenkreis bis hundert anzuwenden sei. Hier wiegen die Bedenken offenbar schwerer. Für den ersten grundlegenden Zahlraum halten wir unbedingt an demselben fest.“ [25]) Dem stimmt wohl auch Sterner zu, wenn er sagt: „Der Grubesche Lehrgang hat den Lehrern die Abhängigkeit der Rechenoperationen mit allem Nachdruck klargelegt und dadurch eine große Mannigfaltigkeit von Übungen schon innerhalb des Zahlraums von 1 bis 10 erschlossen.“ [26])

Mit Grubes Unterrichtszwecke völlig einverstanden ist auch Kaselitz. Aber er will denselben auf einem von dem Grubeschen abweichenden

---

24) Beetz a. a. O. S. 71.
25) Rein a. a. O. Erstes Schuljahr. S. 151.
26) Sterner a. a. O. S. 498.

Wege erreichen.[27]) Ähnlich Beetz, welcher durch ein eigentümliches Verfahren, das Typenrechnen, zum Ziele gelangen will. Was ältere Freunde zu Grubes Bestrebungen sagten, übergehen wir hier. Sie hielten sich eben fast nur an die Schale, das Äußere, und berührten den Kern, wenn überhaupt, nur flüchtig. Manches, was auf sie Bezug hat, bringt übrigens Jänicke in knapper und übersichtlicher Zusammenstellung.[28])

Neben neuen Freunden haben sich freilich auch neue Gegner Grubes eingefunden. Der heftigste derselben ist jedenfalls Knilling. Dieser behauptet: „Es ist vergebliche Mühe, dem Kinde die Zahlen zur klaren Anschauung bringen zu wollen ... Es giebt nichts Mühevolleres, Aufreibenderes und Undankbareres als den ersten Rechenunterricht nach Grubes Manier.“[29]) Maßvoller und deshalb überzeugender äußert sich Tanck in seinem sehr lesenswerten Schriftchen.[30]) Wer die älteren bemerkenswerten Gegner Grubes kennen lernen will, findet dieselben ziemlich alle bei Jänicke aufgeführt.[31])

Wir selbst gehören zu Grubes Anhängern für die Zahlreihe 1 bis 10, wenn wir auch schon hier mehr als Grube die Stellung der einzelnen Zahlen innerhalb der Zahlreihe betonen. Weiterhin berühren wir uns mit Grube nur noch in der gleichzeitigen Behandlung entgegengesetzter Operationen. Völlig einverstanden aber sind wir für das Rechnen in seinem ganzen Umfange mit dem Grubeschen Unterrichtszwecke, der sittlichen Bildung. Auch bei uns hat stets obenan die Forderung gestanden: Mitverwirklichung der Idee des erziehenden Unterrichts! —

§ 9.

Neuere Bestrebungen auf dem Gebiete des Rechenunterrichts.

Litteratur. Adam, W. Geschichte 2c. Allgemeine deutsche Lehrerzeitung. (Abhandlungen von Meyer-Spanier, R. Knilling und Mittenzwey.) Leipzig 1885. 1888. Bartholomäi, Fr. Zehn Vorlesungen 2c. Beetz, K. O. Das Typenrechnen 2c. Beetz, K. O. Kritische Beiträge zu den Tagesströmungen im elementaren Rechenunterricht. (In: Neue Bahnen, Jahrg. 1. — Auch als Sonderdruck.) Gotha 1890. Beetz, K. O. Der vereinfachte Rechenunterricht. (Vortrag.) Jena 1891. Conrad, P. Ein Handbuch für den Rechenunterricht. (In: Schweizerische Blätter für erziehenden Unterricht. 7. Jahrg.) Frauenfeld 1889. Deutsche Blätter für erziehenden Unterricht. (Abhandlung von Teupser.) Langensalza 1883. Deutsche Schulpraxis. (Knilling-Hartmann.) Leipzig 1889. Dörpfeld, F. W. Grundlinien einer Theorie des Lehrplanes. Gütersloh 1873. Erzinger, H. Übungsbeispiele aus dem Leben fürs Leben oder praktisches Rechenbuch für die Oberklassen der Volksschulen, für Fortbildungsschulen und für den denkenden Landwirt. Schaffhausen 1854. (Darin Vorrede von Eisenlohr.) Evangelisches Schulblatt. (Darin: Lomberg, A. Rechenaufgaben für das 4. Schuljahr im Anschluß an den geographischen Unterricht.) Gütersloh 1889. Goltzsch und Theel, Der Rechenunterricht in der Volksschule. 2 Teile. Davon der 2. Teil:

27) Kaselitz a. a. O. S. 28 f.
28) Jänicke a. a. O. S. 115 f.
29) Knilling a. a. O. S. 144 f.
30) Tanck a. a. O. S. 31 f.
31) Jänicke a. a. O. 117 f.

Goltzsch, Der verbundene Zahl-, Sach- und Meßunterricht in der Oberklasse der Volksschule. Berlin 1858. Grube, A. W. Leitfaden ꝛc. Hartmann, B. Zur Diskussion des elementaren Rechenunterrichts. Erster Beitrag: Zweierlei Ansichten. (In: Neue Bahnen, Jahrg. 2.) Gotha 1891. Herbart, J. F. Sämmtliche Werke ꝛc. Auch Päd. Schriften, herausg. von Willmann oder Bartholomäi. Jahrbuch des Vereins für wissenschaftliche Pädagogik. (Abhandlungen von Just, Jahrg. 1873, und Teupser, Jahrg. 1890. 1891.) Leipzig bez. Dresden. Jänicke, E. Geschichte ꝛc. Knilling, R. Zur Reform ꝛc. Knilling, R. Der Zahlenraum von 1 bis 20. Ein Leitfaden beim ersten Rechenunterrichte in Stadt- und Landschulen. München 1892. Körner, Fr. Geschichte der Pädagogik von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. Leipzig 1857. Kaselitz, F. Wie muß sich die Methode des Rechenunterrichts gestalten ꝛc. Kaselitz, F. Wegweiser ꝛc. Lomberg, A. Siehe Ev. Schulblatt. Lomberg, A. Sachrechnen. (In: Rein, Päd. Studien.) Dresden 1890. 1891. Pädagogium herausg. v. F. Dittes. (Abhandlungen von Knilling, Mittenzwey u. a.) Wien und Leipzig 1886. Praktischer Schulmann herausg. von A. Richter. (Abhandlung von Salberg über die Sachrechenmethode.) Leipzig 1886. Räther, H. Theorie und Praxis des Rechenunterrichts. 2 Teile. Breslau 1891. Rein, Pickel und Scheller, Theorie und Praxis des Volksschulunterrichts nach Herbartischen Grundsätzen. Dresden, jetzt Leipzig. Rüefli, J. Pestalozzis rechenmethodische Grundsätze ꝛc. Sächsische Schulzeitung. (Knilling-Hartmann.) Dresden-Leipzig 1889. Salberg, J. A. Siehe Prakt. Schulmann. Salberg, J. A. Die Sachrechenmethode oder methodische Behandlung des Zahlenraumes von 1 bis 30 nach den Grundsätzen der Realmethode. München 1874. Salbergs Rechenbüchlein für das erste und zweite Lehrjahr der Volksschulen. Die Zahlen 1 bis 30. München 1874. Salberg, J. A. Anschauungs-Kursus zur Einführung in das Rechnen mit gemeinen und Dezimalbrüchen. München 1890. Sterner, M. Prinzipielle Darstellung ꝛc. Tanck, W. Das Rechnen auf der Unterstufe nebst Beitrag zur Frage nach der Entstehung der Zahlbegriffe. Meldorf 1884. Tanck, W. Betrachtungen über das Zählen. (Vortrag.) Meldorf 1890. Tanck, W. Die Böhmeschen Zahlbilder. (Zuerst erschienen in „Haus und Schule".) 1891. Unger, F. Die Methodik ꝛc. Ziller, T. Allgemeine Philosophische Ethik ꝛc. Ziller, T. Grundlegung ꝛc. Ziller, T. Vorlesungen ꝛc.

Mit Grube hat die Hauptentwickelung des Rechenunterrichts ihren Abschluß gefunden. Denn indem derselbe den Kern der Pestalozzischen Forderungen im Herbartschen Sinne scharf hervorhob, also das Rechnen in den Dienst der sittlichen Bildung stellte, hat er demselben den Zweck gegeben, der weitere Steigerungen ausschließt. Danach hat es heute auch keinen Sinn mehr, nach dem obersten Zwecke des Rechnens erst noch forschen zu wollen. Der Rechenunterricht soll in seiner Weise die Idee des erziehenden Unterrichts mit verwirklichen helfen. Wie der gesamte Unterricht ein Hauptmittel zur Entwickelung des sittlich-religiösen Charakters sein soll, so nun auch der Rechenunterricht an seinem Teile.

Was wir hier Hauptentwickelung genannt haben, ist selbstverständlich nicht gleichbedeutend mit Weiterentwickelung. Es braucht also auch der Abschluß der Hauptentwickelung noch nicht den Abschluß der Weiterentwickelung herbeizuführen. In Wirklichkeit ist die Weiterentwickelung des Rechenunterrichts auch niemals unterbrochen worden.

Richtig verstanden, hätte diese Weiterentwickelung den Rechenunterricht jedenfalls in den Stand setzen sollen, seinen höchsten Zweck zu erreichen. Leider aber ist dieses nicht überall und immer der Fall gewesen. Es hat Rechenmethodiker gegeben, welche jenen Zweck einfach verneinten. So z. B. Körner, welcher äußerte: „Man überschätzt das Rechnen, wenn man ihm geistbildende, ethische Kraft zuschreibt; denn durch das Rechnen wird der Mensch nicht um einen einzigen höheren, sittlichen Gedanken reicher ... Die Denkthätigkeit beim Rechnen ist eine unproduktive, gemüts- und herzlose; es ist daher sinnloses Geschwätz, wenn Grube dem Rechnen ethische Wirkung beilegt."[1]) Andere Methodiker haben sich gleichgiltig verhalten und den obersten Zweck gar nicht erwähnt. Eine dritte Gruppe ließ ihn zwar gelten, aber nicht als obersten Zweck, nicht als höhere Einheit einer Reihe von Teilzwecken. Dazu gehörte strenggenommen auch Hentschel. Und noch jetzt dürfte diese Gruppe die numerisch stärkste von allen sein. Eine vierte Gruppe erst bemühte sich ernstlich um die Sicherstellung des obersten Zweckes des Rechenunterrichts.

Mögen der Gruppen aber auch noch so viele sein, eins gilt für alle: Der Wert jeder Thätigkeit wird wesentlich durch den Zweck, dem sie dient, bestimmt. Also ist auch der Rechenunterricht um so wertvoller, je mehr er zur Entwickelung des sittlich-religiösen Charakters des Zöglings beiträgt. Dem tiefern Blicke kann übrigens schon jetzt nicht entgehen, daß während der letzten drei Jahrzehnte alle Fortschritte auf dem Gebiete des Rechenunterrichts bewußt oder unbewußt von diesem Wertmesser beeinflußt worden sind. Und so darf man wohl hoffen, daß in nicht zu ferner Zeit alle Rechenmethodiker in dem Streben nach dem einen höchsten Ziele sich zusammenfinden.

Es kann hier nicht unsere Aufgabe sein, die Bestrebungen aller neuern Rechenmethodiker zu berücksichtigen. Das dürfte selbst einer ausführlichern Geschichte des Rechenunterrichts schwer fallen. Nur die hauptsächlichsten Vertreter der wesentlichen Richtungen wollen wir so weit als nötig noch hervorheben.

Halten wir uns an die Zeitfolge, so begegnen wir zunächst einer wiederholten Verneinung des Pestalozzischen Formalprinzips. Dieses Prinzip war schon bei Lebzeiten Pestalozzis von Hoffmann, Stephani, Graser, Zerrenner u. a. verneint worden.[2]) Die zweite Verneinung erfolgte in den fünfziger Jahren. Sie ist in manchen Beziehungen noch kräftiger als die erste. Wie diese führte sie zu einer Bejahung des Materialprinzips. Damit aber traten die Sachen und Sachverhältnisse in den Vordergrund des Rechenunterrichts. Letzterer sollte sich mit den Zahlen und ihren Verknüpfungen nur noch insoweit befassen, als es die Beschäftigung mit den Sachen und Sachverhältnissen innerhalb des Lebenskreises, dem der Schüler angehörte oder später angehören würde, erforderte. Die ganze Richtung ist daher unter dem Namen Real- oder Sachrechenmethode bekannt geworden. Vertreter derselben sind Eisenlohr, Erzinger, Goltzsch und Theel, später noch Salberg. Bei der frühern Verneinung des Pestalozzischen Formalismus handelte es sich im Grunde nur darum, demselben im Materialismus ein Gegengewicht zu bieten. Die zweite Verneinung aber hatte es auf

1) Körner a. a. O.
2) Vergl. S. 70 f.

einen vollständigen Ersatz des Formalismus durch den Materialismus abgesehen.

Wenn Eisenlohr sich dahin äußert: „Die Zeit der formalen, abstrakten Methode ist vorüber, und die Herrschaft der praktischen Lebensbedürfnisse beginnt,“ so bedeutet das eine bewußte Verneinung des Pestalozzischen Formalprinzips zu Gunsten der Anforderungen des praktischen Lebens. Wie sich Eisenlohr letzteres aber denkt, hat er in der Vorrede zu „Erzinger, Übungsbeispiele aus dem Leben für das Leben, Schaffhausen 1854“, weiter auseinandergesetzt. Dort heißt es unter anderm: „Das Rechnen, ja die größte an unsern Schulaufgaben erlangte Rechenfertigkeit, geht nicht so, wie es sein sollte, ins Leben über. Bei allem Kraftaufwande für Gewinnung eines Resultats bleiben wir unmittelbar vor dem Ziele stehn, und werden der Früchte unserer Arbeit verlustig. Das Kind lernt wohl rechnen, aber unser Volk rechnet nicht. Es ist eben etwas, was es mit dem Verlassen der Schulbänke gern hinter sich läßt und abstreift . . . Gewiß trägt an allem diesen auch die Schule ihre Schuld in Folge einer einseitigen Richtung und schiefen Betreibung des Rechenunterrichts selbst. Seine Mängel bestehen darin, daß wir unsere Kinder wohl rechnen, aber zu wenig berechnen lassen, daß wir wohl die Fertigkeit, mit Zahlen an und für sich umzugehen, üben, dabei aber die Ausbildung der Kraft, die Dinge nach ihrem in Zahlen ausgedrückten Werte ins rechte Verhältnis zu setzen, vernachlässigen . . . Es ist unnatürlich und verkehrt, in unsern Schulen die Kinder an abstrakten, formalistischen Unterrichtsgegenständen festzuhalten, und ihnen das Material zur Anwendung derselben vorzuenthalten und auf diese Weise zu scheiden, was Gott namentlich für die Gebiete des Volks zusammengefügt hat“.[3])

Die beiden folgenden Vertreter dieser Richtung, Goltzsch und Theel, gaben gemeinschaftlich ein Werk unter dem Titel: „Der Rechenunterricht in der Volksschule“ in zwei Teilen heraus. Goltzsch, welcher den zweiten Teil bearbeitet hat, dessen Inhalt als „Der verbundene Zahl-, Sach- und Meßunterricht in der Oberklasse der Volksschule“ bezeichnet ist, sagt unter anderm: „Wie im Leben überhaupt Zahlvorstellungen und Zahlverhältnisse nie für sich vorkommen, sondern stets in Verbindung mit Vorstellungen sachlichen Inhalts irgend einer Art: so kann darüber wenigstens gar kein Zweifel obwalten, daß der Rechenunterricht auf beides, auf Zahl und Sache, auf Zahlverhältnisse und sachliche Verhältnisse sich erstrecken müsse, und daß er daher nicht blos die Aufgabe habe, den Kindern Zahlvorstellungen und Zahlverhältnisse zum Verständnisse zu bringen und sie anzuleiten, selbständig neue Zahlvorstellungen und Zahlverhältnisse durch Ableitung von schon vorliegenden zu bilden; sondern daß er auch die Aufgabe habe, den Kindern eine vorbereitende Kenntnis von allen Dingen und sachlichen Verhältnissen zu verschaffen, auf welche

3) Erzinger a. a. O. (Vorrede von Eisenlohr.)

im Leben die Zahlen und Zahlverhältnisse in Beziehung gesetzt werden." [4]) Und weiterhin: „Das Objekt des Unterrichts . . . in der Oberklasse der Volksschule ist nicht mehr die Zahl und die Zahlverhältnisse, noch weniger sind es die allgemeinen arithmetischen Wahrheiten, mit deren abstrakter Auffassung und Darstellung sich die Wissenschaft der Arithmetik beschäftigt; sondern das Objekt des Unterrichts sind lediglich die überaus mannigfachen Sachverhältnisse, auf welche im Leben von Zahlvorstellungen und Zahlverhältnissen eine Anwendung gemacht wird, und gemacht werden muß, wenn anders man von allen diesen höchst wichtigen Lebensverhältnissen eine deutliche Erkenntnis und klare Einsicht gewinnen will. Nur um dieser Anwendung willen, die fast in allen Lebensverhältnissen und Zahlen und Zahlverhältnissen gemacht werden muß, wird in der Volksschule Rechenunterricht erteilt; nur durch sie gewinnen die an sich inhaltsleeren abstrakten Zahlvorstellungen und Zahlverhältnisse einen bedeutungsvollen Inhalt, einen hohen Wert für Lebens- und Geistesbildung der Kinder, und kann daher die volle Berechtigung dieses Unterrichts in jeder Volksschule genügend erkannt werden." [5])

Das Buch enthält folgende Abschnitte: Erster Teil. Von den einfachen Rechenaufgaben. 1) Zeitmessung. 2) Maße für Dinge und Stoffe. 3) Wertmaße. 4) Erwerbung und Gebrauch des Eigentums. 5) Umtausch des Eigentums oder Kauf und Verkauf. 6) Verpflichtungen gegen den Staat. 7) Benutzung fremden Eigentums (Miet-, Pacht-, Geldzins). 8) Gemeinschaftliche auf Erwerb gerichtete Unternehmungen. 9) Gemeindelasten und Kommunalabgaben. 10) Mischen von Stoffen. 11) Flächenberechnung. Zweiter Teil. Von den zusammengesetzten Rechenaufgaben. 1) Zeitbestimmung. 2) Maße für Dinge und Stoffe. 3) Wertmaße. 4) Erwerb und Verbrauch des Erworbenen. 5) Kauf und Verkauf. 6) Geldverzinsung. 7) Gemeinschaftliche auf Erwerb gerichtete Unternehmungen. 8) Körpermessung.

Was Goltzsch will, geht hieraus deutlich hervor: Der Rechenunterricht soll seine isolierte, aber auch seine selbständige Stellung aufgeben und sich möglichst eng an den Sachunterricht anschließen. Die Kinder sollen durch denselben Kenntnis von den später an sie herantretenden Lebensverhältnissen und der Art und Weise, wie die Zahlen und Zahlverhältnisse auf diese anzuwenden sind, erhalten.

Wie entschieden dabei aber Goltzsch und Theel das Formalprinzip verneinen, geht besonders aus dem Vorworte zum ersten Teile ihres Werkes hervor: „Der Rechenunterricht in der Volksschule hat sich nur insoweit um die Zahl zu kümmern, als dies erforderlich ist, um den Kindern zu einer vollständigen Kenntnis von Welt und Leben zu verhelfen, als deren künftige Lebensstellung es fordern kann, und darf daher die abstrakte Zahlenlehre oder die Arithmetik auch nicht einmal nach ihren Anfängen

4) Goltzsch und Theel a. a. O. 2. Teil. Vorrede S. XI.
5) Ebenda S. 1 f.

als ein Objekt des Volksschulunterrichts anerkannt werden. Ebensowenig ist es statthaft, sich auf einen angeblichen formalen Bildungszweck der Volksschule zu berufen, um der abstrakten Zahlenlehre einen Platz in der Volksschule zu verschaffen. Solange noch formale Bildung irgendwie selbständig neben materialer als Zweck und Ziel der Lehrthätigkeit hingestellt wird, wird immer mehr oder weniger Verkehrtes geschehen und weder das eine noch das andere Ziel gehörig erreicht, da Form und Materie auf allen Punkten unablöslich zusammenhängen. Es ist daher auch beim Rechenunterrichte lediglich die Erweiterung und Vervollkommnung der Sachkenntnisse mittels Übungen im Zahlbilden als Ziel und Zweck des Unterrichts im Auge zu behalten".[6])

Es verwahrt sich Goltzsch in der „Vorrede" zum zweiten Teile allerdings gegen den Vorwurf, daß er ein Feind formaler Volksbildung sei. Nur „ein Feind des leeren Scheins formaler Bildung, die sich weiterer selbständiger Fortentwickelung im späteren Leben der Kinder ganz unfähig erweist", sei er. Denn er lebe der Überzeugung: „Die Volksschule hat es nicht nötig, sich mit fremden Federn zu schmücken, sie darf sich ohne Scheu in ihrem eigenen schlichten Kleide sehen lassen . . . Auch darf sie nicht einmal als eine Vorbereitungsanstalt für eine höhere wissenschaftliche Bildung bezweckende Schule, sondern nur als eine Vorbereitungsanstalt fürs Leben selber aufgefaßt werden".[7]) Aber man sieht doch gleich, das ist nichts anderes als eine nähere Bestimmung seiner Verneinung.

Es könnte nun scheinen, als ob Goltzsch und Theel mit dem Formalprinzip zugleich den obersten Zweck des Rechenunterrichts, die sittliche Bildung, verneint hätten. Dem aber ist nicht so. Denn gleich im Anfange der mehrerwähnten Vorrede hebt Goltzsch als Zweck seines Buches hervor: „auch diesen Unterricht der sittlichen Lebensbildung dienstbar zu machen und ihn in den nötigen organischen Zusammenhang mit allem übrigen Unterrichtsmaterial der Volksschule zu bringen."[8]) Das ist eine bedeutsame Stelle. Denn sie betont neben dem obersten Zwecke des Unterrichts auch ein Mittel, denselben zu erreichen, die Konzentration des Unterrichts. Letzteres aber hatte in dieser Bestimmtheit bisher noch niemand gethan. Und auch weiterhin kommt Goltzsch wiederholt auf den obersten Zweck des Rechenunterrichts zurück. Er bringt denselben mit dem Zwecke und der Aufgabe der Volksschule überhaupt in Verbindung und macht davon die Einsicht in den Inhalt, die Methode und den Gang desselben abhängig, dazu sein Verhältnis zu allen übrigen Unterrichtsfächern. „Eine solche (Einsicht) wird erst in dem Maße möglich, als es klar vorliegt, welche Beziehung jeder Unterricht zu der Ausbildung der Kräfte der Kinder für deren besondere Lebensaufgabe innerhalb des sittlichen Lebensorganismus, dem

6) Nach Sterner a. a. O. S. 483.
7) Goltzsch a. a. O. 2. Teil. S. XIII.
8) Ebenda S. VII.

sie eingegliedert sind, also für ihre Stellung in der häuslichen, bürgerlichen und kirchlichen Gemeinschaft habe, zu welcher sie in der Schule vorbereitet werden sollen. Von diesem Standpunkte aus erscheint es als das Schlimmste, was einem Unterrichtsgebiete in der Volksschule nachgesagt werden kann, daß es überhaupt gar keinen sittlichen Inhalt habe, sondern nur um seiner Bedeutung willen für die formale Bildung der Kinder auf einen Platz in der Volksschule Anspruch mache . . . Daß damit die Berechtigung dieses Unterrichts in der Volksschule nachgewiesen sei, wird daher niemand zugestehen können, zumal es nur zu deutlich vorliegt, daß die durch Übung zur Ausübung gebrachte Kraft ebensogut den unsittlichen Zwecken, welche die gemeinste Selbst- und Gewinnsucht verfolgt, als sittlichen Zwecken dienstbar werden könne." 9) Und weiter unten heißt es: „Alles wirklich im Leben vorkommende Rechnen hat einen bedeutenden sittlichen Inhalt durch seine enge Beziehung zu dem Lebensberuf eines jeden und verdankt allein diesem seinem Inhalte seine Stellung in der Volksschule. Es leuchtet damit aber auch sofort ein, daß auch schon der fast täglich acht Jahre lang zu erteilende Rechenunterricht in der Schule durchaus nicht in bloßen leeren Denk- und Zahlbildungsübungen bestehen oder demselben irgend ein beliebiger, gleichgiltiger sachlicher Inhalt gegeben werden dürfe, sondern daß er zu fruchtbarem und gründlichem Nachdenken über die wichtigsten Lebensverhältnisse veranlassen und damit zur sittlichen Lebensbildung der Kinder sorgsam und gewissenhaft benutzt werden müsse." 10)

So enthält das Buch von Goltzsch und Theel jedenfalls manches, was auch heute noch erwogen zu werden verdient. Und es kann insbesondere kaum überraschen, wenn namentlich Pädagogen Herbartischer Richtung auf dasselbe wiederholt aufmerksam gemacht haben. Wer freilich daraus schon folgern wollte, das Sachrechnen der Herbartianer sei dasselbe wie dasjenige von Goltzsch und Theel, der würde voreilig urteilen.

Als Nachfolger von Goltzsch und Theel gilt Salberg. Dieser ließ 1874 eine Schrift erscheinen, welche den Titel „Sachrechen-Methode" führt. Was er darunter versteht, entnehmen wir einem spätern Aufsatze, worin es heißt: „Das Wesen des Sachrechnens besteht darin, daß die Schüler irgend ein eine Vielheit darstellendes Ding hernehmen und unter Anleitung des Lehrers alle daraus ableitbaren Rechensätze festhalten und das Gefundene mit dem richtigen Worte zum Ausdrucke bringen. Nach allseitiger erschöpfender Behandlung dieses Gegenstandes, d. h. nachdem alle ableitbaren Rechensätze festgestellt sind, kommt ein zweiter, dritter an die Reihe, um in gleicher Weise behandelt zu werden. Auf diese Weise findet ein Übertragen statt." 11)

Hier sagt uns Salberg aber nur etwas über sein Verfahren; über

---

9) Ebenda S. X f.
10) Ebenda S. XI.
11) Prakt. Schulmann a. a. O. S. 148.

den Zweck, den er erreichen will, verlautet nichts. Und doch hätte gerade das Wesen des Sachrechnens als Ausfluß eines bestimmten Zweckes erscheinen sollen. Auch die vorausgeschickte Bemerkung: „Voran soll gesetzt sein das von Grube aufgestellte Prinzip der allseitigen Behandlung einer jeden Zahl" enthält nichts, was auf einen Zweck in unserm Sinne hindeutete. Erst folgende Stelle bringt einiges darüber: „Acceptieren wir das Prinzip des Sachrechnens als das der Selbstthätigkeit, als die darstellende Methode, so gewinnen wir erst dadurch für das der Allseitigkeit eine feste Basis. Denn der Schüler wird unter Leitung des Lehrers alle Rechensätze der Zahl finden. Seiner Thätigkeit im Suchen sind keine Schranken gesetzt, während ihm nach dem angedeuteten deduktiven Verfahren sie nur in soweit vorgeführt werden, als es das Gutdünken (?) des Lehrers zuläßt. Ohne das Sachrechnen bleibt das Prinzip der Allseitigkeit eben nur eine Regel ohne innere Notwendigkeit; das Prinzip des Sachrechnens erhebt die Allseitigkeit zum Gesetz. Mit Recht kann also das Prinzip des Sachrechnens die Priorität vor dem der Allseitigkeit beanspruchen, da dieses aus jenem hervorgeht, nicht umgekehrt." [12]) Hier erscheint wenigstens die Selbstthätigkeit des Schülers als Zweck des Verfahrens. Freilich gewonnen ist damit auch nicht viel, denn geht man weiter, so kann auch sie nur als Mittel für höher liegende Zwecke genommen werden.

Wie hier, so bleibt Salberg auch in seinem Buche die Ableitung der Unterrichtsmethode aus dem Unterrichtszwecke schuldig. Es ist also nicht vielmehr als ein neuer Ausgangspunkt, den er bietet. Und insofern sind ihm Goltzsch und Theel ganz erheblich überlegen. Auch sonst unterscheidet sich Salberg nicht unwesentlich von Goltzsch und Theel. Diese streben nach Kenntnis der Sachen und Sachverhältnisse, weil diese an sich wertvoll sind; Salberg ist es mehr darum zu thun, die Sachen als Anschauungsmittel zur Gewinnung von Zahlvorstellungen zu verwerten. Es liegt also bei ihm eine weitere Ausgestaltung des Pestalozzischen Anschauungsprinzips vor. Und so sind es eigentlich mehr äußere als innere Berührungspunkte, welche ihn zu Goltzsch und Theel in Beziehung setzen.

Unverkennbar ist dagegen der Zusammenhang zwischen Salberg und Grube. Salberg hat Grubes Prinzip der „allseitigen Behandlung der Zahlen" zu dem seinigen gemacht. Nur daß er noch strenger als dieser die reine Zahl von den Sachen ausgehend behandelt wissen will. Auch soll sich die monographische Behandlung nicht nur auf die ganzen, sondern auch auf die gebrochenen Zahlen erstrecken. „In das Bruchrechnen kann vernünftiger Weise nicht durch ein System, sondern nur durch einen Anschauungskursus eingeführt werden." [13]) Ferner sind seine „Sachen" nicht beliebige Dinge, sondern „Rechendinge", d. h. die im Verkehr gebräuchlichen Münzen, Maße und Gewichte. Die Kinder sollen mit diesen selbst rechnen „und so Lehrziel

12) Ebenda S. 150.
13) Salberg, Anschauungskursus a. a. O. S. 4.

und Lehrmittel auf ein Objekt konzentrieren".[14]) Deshalb: „Fort mit den Strichen, Kugeln, Bohnen aus der Elementarschulklasse, insoweit sie nur als Hilfsmittel dienen sollen. . . . Das Kind soll sich unter den Strichen der Einertabelle (Pestalozzis) und unter den Kugeln der Maschine Münzen, Maße und Gewichte und die Zerlegung von Kollektiv-Einheiten von Münzen, Maßen, Gewichten u. s. w. nach Unterschieds- und Teilverhältnissen vorstellen."[15])

Salberg erwartet von seinem Verfahren nichts Geringeres als einen neuen Abschnitt in der Entwickelung des Rechenunterrichts. Einfach so: Im Rechnen kommen Ziffern, Zahlen und Sachen vor; die Geschichte des Rechenunterrichts weist bis jetzt aber nur eine Periode des Zifferrechnens und eine Periode des Zahlrechnens auf; was noch fehlt, ist also die Periode des Sachrechnens — und diese eben leitet Salberg ein.

Die Beurteilung der Stellung Salbergs in der Geschichte des Rechenunterrichts, welche er sich hiernach selbst anweist, ergiebt sich leicht aus einer Vergleichung seiner Leistungen mit den schon vorhandenen. Eine epochemachende ist sie hiernach jedenfalls nicht. Aber Salberg bot doch auch mehr als „Manier", wie Jänicke will.[16]) Obwohl Salberg nicht zeigt, wie alles, was er bietet, in eine höhere Einheit einmündet, so enthält sein Verfahren doch vieles, was den „erziehenden Unterricht" kennzeichnet. Das Ausgehen von Sachen weckt und fördert das Interesse, die scharfe Betonung der Selbstthätigkeit leitet den Willen, das stete Zurückgreifen auf dieselben Sachen, welche den Ausgangspunkt bildeten, bei den Anwendungen, führt zu einer heilsamen Konzentration. Besonders der letzte Punkt ist es, welcher vor Salberg noch nicht, oder doch nicht mit solcher Schärfe und Bestimmtheit ausgesprochen wurde: die Konzentration von „Lehrziel und Lehrmittel auf ein Objekt". Und so dürfte sich auch Salberg wirkliche Verdienste um die Ausgestaltung des Rechenunterrichts im Sinne der „Idee des erziehenden Unterrichts" erworben haben. Freilich, viel Anklang hat er bis jetzt trotzdem bei den Rechenpraktikern nicht gefunden. Daran dürfte aber weniger sein Prinzip als die weitläufige Durchführung desselben schuld sein.

Ebenso wie von Goltzsch und Theel haben einzelne Herbartianer auch von Salberg manches angenommen und verwertet. Deshalb sind sie aber ebensowenig dessen Nachfolger, wie sie diejenigen jener beiden sind. Das innere Prinzip, der oberste Zweck, die festen Beziehungen aller Mittel und Wege zu demselben geben hier wie anderwärts den Ausschlag. Und so befindet sich z. B. auch Jänicke im Irrtume, wenn er das Rechnen der Herbart-Zillerschen Schule im Anschlusse an Salbergs Sachrechnen einfach auch nur als Sachrechnen und als „Manier" aufführt.[17]) Offenbar hat Jänicke noch nicht Zeit gefun-

14) Salberg, Die Sachrechen-Methode a. a. O. I. Teil.
15) Ebenda. I. Teil.
16) Jänicke a. a. O. S. 168.
17) Jänicke a. a. O. S. 168.

den, sich dasselbe genauer anzusehen. Zu dieser Annahme muß man notwendig gelangen, wenn man liest, wie er Bräutigam, Schneyer und Göpfert Vertreter des Sachrechnens der Herbart-Zillerschen Schule sein läßt — Rechenmethodiker, bei denen auch nicht eine Spur davon zu finden ist, und welche nichts weniger denn Anhänger Zillers sein wollen.[18])

Nächst den „Real- oder Sachrechenmethodikern", also denen, welche mit der Verneinung des Pestalozzischen Formalprinzips anfingen, sind diejenigen Methodiker zu nennen, welche das Pestalozzische Anschauungsprinzip nicht gelten lassen wollen. Zu ihnen gehören neuerdings namentlich Tanck, Hauptlehrer in Neumünster in Holstein, und Knilling, Lehrer in Traunstein in Bayern. Wir konnten früher nur kurz auf diese Richtung hinweisen und mußten hinzusetzen: „es bleibt nun abzuwarten, welches Schicksal derselben beschieden ist, beziehentlich welchen Einfluß dieselbe auf die weitere Gestaltung der Methodik des Rechenunterrichts ausüben wird." [19]) Eigentlich wäre auch heute nicht viel mehr darüber zu sagen. Denn von dem gewaltigen Umsturze alles Bestehenden, wie ihn namentlich Knilling im Geiste kommen sah, ist nichts zu verspüren.[20]) Die Knillingschen Darbietungen haben nach Inhalt und Form zumeist nur den Widerspruch Kundiger herausgefordert. Und wenn auch die verständigen und ruhigen Ausführungen Tancks[21]) im ganzen Beifall fanden, so waren doch auch sie nicht dazu angethan, das Rechnen „vom Grunde aus" umzugestalten. Folgendes dürfte daher genügen, die Richtung zu kennzeichnen.

Die Verneinung des Anschauungsprinzips Pestalozzis, besonders in der Gestalt, welche Grube ihm gegeben hatte, forderte die Setzung eines neuen Prinzips, dessen Grundlage (im Gegensatze zum Anschauungsprinzipe) rein geistiger Art sein mußte. Als eine derartige Grundlage betrachten Tanck und Knilling aber das Zählen. Ihr Prinzip ist also das Zählprinzip geworden. Selbstverständlich forderte die Setzung desselben eingehendere Untersuchungen über die Natur des Zählens und der Zahl. Und solche sind denn auch von beiden Methodikern gegeben worden. Tanck bringt dieselben in dem „Rechnen auf der Unterstufe" als „Beitrag zur Frage nach der Entstehung der Zahlbegriffe", Knilling im „Theoretischen Teile" seines Buches unter der Überschrift: „Zahlanschauung, Zahlvorstellung und Zahlbegriff." Danach fordern beide „das Zählen als Anfang des Rechenunterrichts." [22])

Diese Untersuchungen über das Zählen und die Zahl enthalten manches Beachtenswerte. So z. B. das, was darin über die Zahlbilder (Punktbilder) gesagt wird. Auch muß man es Tanck und Knilling als Verdienst anrechnen, daß sie zu ähnlichen Untersuchungen, seien es auch nur Widerlegungen, angeregt haben. So ist der Eifer, welcher sich

18) Vergleiche die Litteraturangaben S. 62.
19) H. I, S. 34.
20) Knilling a. a. O. I. Teil. Einleitung.
21) Tanck a. a. O. Vergl. die Litteraturangaben S. 101.
22) Tanck a. a. O. S. 41 f. Knilling a. a. O. Teil 2. S. 3 f.

während der letzten Jahre zeigte, die psychische Entwickelung der Zahlvorstellungen zu ergründen, wesentlich durch ihre Arbeiten hervorgerufen worden. Anderseits freilich schossen beide auch vielfach über das Ziel hinaus, besonders Knilling. Und überdies ist das Zählen des letztern ein so mechanisches, daß auch sein grundlegendes Rechnen notwendig mechanisiert werden muß. Dasselbe erinnert vielfach an das Rechnen der beiden vorigen Jahrhunderte.

Man durfte wohl gespannt sein, was Knilling für die Praxis bieten werde nach Verheißungen, wie die folgenden: „Ich will daher an dem bestehenden Lehrverfahren nicht etwa nur herumbessern, ich will es vielmehr vom Grunde und von der Wurzel aus neugestalten. Und wenn schon der erste Teil meiner Arbeit umstürzlerisch ausgefallen ist, der zweite oder praktische, ausführende soll noch weit radikaler geraten.“ [23]) Aber was hat er bis jetzt geboten? Einen Leitfaden für den ersten Rechenunterricht, die Zahlreihe 1 bis 20 umfassend, der sich nur in — unwichtigen Äußerlichkeiten von schon vorhandenen Leitfäden unterscheidet!

Viel wertvoller ist das, was Tanck für die Praxis geschrieben hat. Seine Rechenhefte gehören entschieden zu den bessern Leistungen auf diesem Gebiete. Freilich, auch von ihnen müssen wir sagen: Besondere Eigentümlichkeiten, welche dieselben von allen andern Rechenheften unterschieden, besitzen sie nicht.

Und das war schließlich auch nicht anders zu erwarten. Denn was hier als neue Grundlage des Rechnens ausgegeben wird, das Zählprinzip, es ist thatsächlich nicht neu. Das giebt der mit der Geschichte seines Faches vertraute Tanck wohl auch selbst zu, wenn er sagt: „Man beginne mit dem, wozu die Voraussetzungen im Kinde sich finden und das zugleich für den weitern Ausbau des Unterrichtsgegenstandes von grundlegender Bedeutung ist — das ist das Zählen. Von den gegenwärtigen Methodikern stehen auf diesem Standpunkte: Stubba, Winter, Hentschel, Böhme, Kehr, Terlinden u. a.“ [24]) Knilling hingegen scheint solcher Einsicht nicht zugänglich zu sein. Und doch würde gerade er, wenn er sich in der Geschichte des Rechenunterrichts umsehen wollte, für seinen Fall Vorbilder die Hülle und Fülle finden. Weniger in unserm Jahrhunderte — denn da stehen die Rechenmethodiker alle mehr oder weniger auf den Schultern Pestalozzis, den Knilling verwirft — aber desto mehr im vorigen. In der That, durch seine Verneinung des Pestalozzischen Anschauungsprinzips und die Betonung des Zählprinzips, wobei das Zählen und das darauf sich gründende Rechnen rein mechanische sind, schraubt Knilling den Rechenunterricht um mehr als hundert Jahre zurück.

Eine eingehende und in den Hauptsachen zutreffende Kritik des Knillingschen „Umsturzversuches“ hat Beetz geschrieben. [25]) Der maß-

23) Knilling a. a. O. S. 13.
24) Tanck a. a. O. Das Rechnen ꝛc. S. 39.
25) Beetz a. a. O. Kritische Beiträge ꝛc.

losen Abfertigung von Pestalozzis rechenmethodischen Grundsätzen aber ist in ausführlicher und überlegener Weise Rüefli in einer besondern Schrift entgegengetreten.[26]) Daneben sind von Mittenzwey, Meier-Spanier u. a. Widerlegungen einzelner Punkte der Knillingschen Reformvorschläge, beziehentlich Behauptungen erfolgt.[27])

Dem obersten Unterrichtszwecke, diesem Haupt-Wertmesser für alle rechenmethodischen Bestrebungen der Gegenwart, begegnet man weder in Tancks noch Knillings Arbeiten. Ersterer spricht sich über den Zweck des Rechenunterrichts überhaupt nicht aus; letzterer stellt als einziges Ziel die „Rechenfertigkeit für das praktische Leben" auf. Diese aber will er „leicht und schnell" erreichen. Genau dasselbe haben bekanntlich auch die Rechenmethodiker des 17. Jahrhunderts versprochen.[28])

Die Anhänger des „Zählprinzips" wenden sich namentlich gegen denjenigen rechenmethodischen Grundsatz Pestalozzis, den Grube weiter entwickelte. Das aber machte sie zu Gegnern Grubes selbst. Und weiterhin auch von Grubes Anhängern. Umgekehrt werden unter den Anhängern Grubes diejenigen Methodiker zu suchen sein, welche das „Zählprinzip" am eifrigsten bekämpfen.

Unter den Nachfolgern Grubes haben sich in neuerer und neuester Zeit besonders zwei hervorgethan: Kaselitz, Rektor der höhern Töchterschule zu Stolp in Pommern, und Beetz, Lehrer an der höhern Töchterschule zu Nordhausen. Ersterer schon 1867 durch sein mehrfach erwähntes Schriftchen, worin er die sittliche Bildung als Zweck des Rechenunterrichts betont. Danach durch seinen „Wegweiser". Letzterer durch seine kritischen Aufsätze und durch sein „Typenrechnen".[29]) Kaselitz und Beetz stellen mit Grube den Rechenunterricht in den Dienst der sittlichen Bildung. Während diese aber bei Beetz oberster Zweck ist, tritt sie bei Kaselitz nur als Teilzweck auf. Neben ihr soll sein Rechenunterricht noch Rechenfertigkeit, Einsicht in die Zahl und ihre Verhältnisse, dazu Sachkenntnisse erzeugen.

Alle diese Zwecke will Kaselitz durch ein zwar auf Grubescher Grundlage ruhendes, sonst aber eigenartiges Verfahren erreichen. Denn er ist der Ansicht: „Sein (Grubes) Verfahren ist nicht ein Rechnen mit der Zahl, die er gerade behandelt, sondern ein Betrachten derselben in ihrer Eigentümlichkeit. Für das Gewinnen der Zahlvorstellungen und das Auffassen der Zahlbegriffe ist das von unzweifelhaftem und unschätzbarem Werte; für das eigentliche Rechnen ist es fast nutzlos. Denn

---

26) Rüefli a. a. O.

27) Allgemeine Deutsche Lehrerzeitung a. a. O. Pädagogium a. a. O. Hierüber wäre auch noch des eigentümlichen Streites: Knilling contra Hartmann, zu gedenken, welcher in der Sächs. Schulzeitung und in der Deutschen Schulpraxis, Jahrg. 1889, geführt wurde. Wir stellten damals eine Würdigung der Knillingschen Arbeit in Aussicht. Wenn dieselbe schließlich unterblieb, so lag dieses an den inzwischen erschienenen Arbeiten von Rüefli und Beetz, welche weitere Äußerungen überflüssig machten.

28) Vergl. S. 42.

29) Vergl. die betr. Litteraturangaben. S. 100.

ein Kind, das z. B. die achte Stufe (Grube, Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule S. 51) absolviert hat, hat gewiß ein klares, deutliches Bild und eine richtige Vorstellung von der Zahl „Acht", aber rechnen kann es nicht mit „Acht", denn die „Acht" tritt nur in dem einzigen Satze 8 × 1 als operative Zahl auf." Kaselitz schickt darauf dem eigentlichen Rechnen einen „Anschauungskursus" voraus. „Auf dieser Vorstufe soll jede Zahl und jede Aufgabe in geeigneter Weise veranschaulicht werden; denn ehe an eine abstrakte Entwickelung zu denken ist, muß der Gedankenvorrat (die Zahlvorstellungen) herbeigeschafft werden." 30) Rechnen aber läßt er alsdann bei gleichzeitiger Erweiterung nach drei Richtungen hin. Letztere sind: die operative Zahl, die Zahlkreise (Zahlreihen) und die Sachverhältnisse. Hier treten z. B. neben- und nacheinander auf: Operative Zahl 1, Zahlreihe 1—10; operative Zahl 2, Zahlreihe 1—20; operative Zahl 3, Zahlreihe 1—30 u. s. f.; operative Zahl 10, Zahlreihe 1—100 u. s. f. Zugleich legt Kaselitz großen Wert auf das Üben während der Rechenstunden und auf das Memorieren der vier „Einse" (Eins und Eins, Eins von Eins, Eins mal Eins, Eins durch Eins). „Der letzte Zweck des Rechenunterrichts, sittliche Bildung zu wirken, wird in dem Grade mehr oder weniger erreicht, wie Fertigkeit, Einsicht und Sachkenntnis in höherem oder geringerem Grade erzielt werden; er bedingt also wiederum denselben Lehrstoff. Im übrigen resultiert sittliche Bildung zumeist aus dem Geiste, der den ganzen Unterricht beseelt." 31)

Kaselitz steht entschieden auf den Schultern Grubes. Deshalb muß sein Bestreben, Verschiedenheiten zwischen sich und Grube aufzufinden, sehr auffallen. Auch Grube hat, wenn er bei der 100 anlangt, mit den Grundzahlen 1 bis 10 als operativen Zahlen gearbeitet, nur nicht in derselben Folge wie Kaselitz. Die gegenteilige Behauptung Kaselitz' ist also keine zutreffende. Und unverständlich geradezu bleibt seine Behauptung, Grubes Verfahren führe wohl zu Zahlbegriffen, aber für das eigentliche Rechnen sei es fast nutzlos. Denn was ist das Rechnen im Grunde anders als die Ableitung eines neuen Zahlbegriffs aus gegebenen Zahlbegriffen?

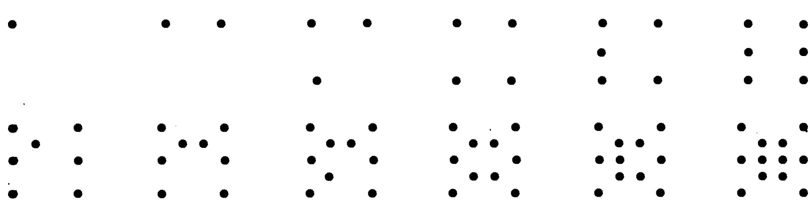
Dem gegenüber erklärt Beetz rückhaltlos: „Wir stellen uns dahin, wohin uns sämtliche vorausgehende Untersuchungen notwendig drängen: auf den Boden der monographischen Zahlenbetrachtung, und zwar selbst auf die Gefahr hin, daß auch wir mit diesem Schritte Hollenbachs Richterspruche verfallen: ‚Nicht durch die Einsicht in die eigentümliche Natur des Zählens und Rechnens ist Grube zu seinem Verfahren gekommen, sondern durch einen ganz unwissenschaftlichen Gedanken'." 32) Aber schließlich will auch Beetz sein Besonderes haben. Er stimmt nämlich Grube nicht zu, wenn derselbe seinen Lehrgang wie folgt rechtfertigt:

30) Kaselitz a. a. O. Wie muß ꝛc. S. 7 u. 9.
31) Kaselitz a. a. O. Wegweiser ꝛc. S. 23.
32) Rein, Päd. Studien. 1887. S. 201.

„Da der Zahlraum welcher der Anschauung unmittelbar offen liegt und zugänglich ist, der von 1 bis 100 ist, und alles Rechnen mit größeren Zahlen nur durch Beziehung derselben auf das erste Hundert bewerkstelligt wird; so muß in diesem Raume jede Zahl nach ihren verschiedenen Bestandteilen klar vor der Seele des Schülers stehen.“ 33) *Beetz* wendet dagegen ein: „Diese beiden Voraussetzungen sind falsch und zwar weniger ihrem Wesen als ihrem Umfange nach; bei weitem nicht der Zahlenraum von 1 — 100, kaum derjenige von 1 — 4 liegt der Anschauung als zugänglich unmittelbar offen. Wird eine weitere adäquate innere Anschauung größerer Zahlen für nötig erkannt, dann muß die äußere Zahlanschauung durch künstliche Gruppierungen, durch *Rechentypen*, ermöglicht werden.“ 34) Bei der zweiten Voraussetzung (Beziehung auf das erste Hundert) liegt nach *Beetz* sogar ein doppelter Irrtum vor. Erstens: Nicht durch das erste Hundert, sondern durch das erste Zig wird das Rechnen mit größern Zahlen bewerkstelligt. Zweitens: Angesichts des *künstlichen* indisch-arabischen Zahlsystems hat man das *Wesen der natürlichen Zahlordnung* ganz übersehen.

Und noch einen Unterschied zwischen sich und *Grube* hebt *Beetz* hervor: „Wenn wir indessen auch der monographischen Zahlenbetrachtung folgen, so müssen wir in der praktischen Verwirklichung dieser Idee doch ein ganz anderes Verfahren beobachten als *Grube*; denn mit fast allen Pädagogen begeht auch er die größte aller Verirrungen im elementaren Rechnen: er verwechselt *Sachanschauung* mit *Zahlanschauung*.“ 35) Nach diesem kommt *Beetz* wieder auf seine „*Rechentypen*“ und deren Verwendung zurück. Ein ausführliches Kapitel bietet einen „Einblick in die typische Rechenmethode im besonderen“.

Unter *Rechentypen*, die sein Hauptrüstzeug bilden, versteht *Beetz* dasselbe, was andere Methodiker „*Zahlbilder*“ nennen, wofür wir aber bestimmter „*Punktbilder*“ setzen möchten. Die Punktbilder von *Menzel*, *Born*, *Böhme*, *Büttner*, *Goltzsch*, *Löser*, *Backhaus*, *Hentschel*, *Sobolewsky* und *Kaselitz* verwirft er. Seine „*Rechentypen*“ für die Zahlen 1 bis 12 aber haben folgende Gestalt:



Durch diese Rechentypen sollen *Zahlen* und *Rechnungsarten* veranschaulicht werden. 36) Jeder Typus ist in dem nachfolgenden unver-

33) *Grube* a. a. O. S. 20.
34) *Beetz* a. a. O. S. 87.
35) *Beetz* a. a. O. S. 91.
36) *Beetz* a. a. O. S. 121.

ändert enthalten. Dieses besonders soll die Veranschaulichung begünstigen. So sehr, daß die Auffassung der einzelnen Zahlen zu einer augenblicklichen oder simultanen, vom Zählen unabhängigen wird. Die simultane Auffassung der Zahlen, das ist schließlich die Grundlage, auf welcher Beetz das ganze Gebäude des elementaren Rechnens errichten möchte. Bis zur Stunde ist es nur noch nicht geschehen und ein sicheres Urteil über die Leistungsfähigkeit des „Typenrechnens" daher auch nicht möglich. Immerhin dürfte feststehen: Mag man mit Beetz einverstanden sein oder nicht, seine Arbeit ist sehr geeignet, die Aufmerksamkeit der Fachgenossen erneut auf wichtige Punkte des Rechenunterrichts zu lenken. Darunter auf den allerwichtigsten, die Entstehung der Zahlvorstellungen.

Es liegt von Beetz noch eine kleinere Schrift vor, welche sich „Der vereinfachte Rechenunterricht" nennt. In derselben wird der Versuch gemacht, von der Begriffsbestimmung der Zahl ausgehend den Rechenstoff zu gliedern. Das ist ein sehr glücklicher, weil fruchtbarer Gedanke. Denn die Zahl tritt uns so in dreifacher Gestalt entgegen: Als Maß der Dinge, als Maß der Größe und als Maß der Verhältnisse. Wird sie nun in dieser Stufenfolge geboten, so erhält man drei Rechenkurse: Rechnen mit unsteten Größen (Zahlen schlechthin), Rechnen mit steten Größen (ganzen und gebrochenen Zahlen) und Rechnen mit den bürgerlichen Verhältnissen (Schlußrechnen im engern Sinne). Diese Dreiteilung schließt zugleich die historische Entwickelung des Zahlbegriffs in sich, beeinflußt das Auftreten der Münzen, Maße und Gewichte an der rechten Stelle u. a. m. Gewiß Dinge, welche wert sind, daß ihnen weiter nachgegangen werde.

Daß Beetz der entschiedenste Gegner der Anhänger des „Zählprinzips" ist, wissen wir bereits. Seine Gegnerschaft folgt mit Notwendigkeit aus seiner Auffassung der Zahlvorstellung.

Als letzte Gruppe haben wir noch die der Herbartschen Schule angehörigen Rechenmethodiker zu nennen. Hier aber dürfen wir uns kurz fassen. Denn da auch der Verfasser des vorliegenden Handbuches dieser Gruppe angehört, so giebt der weitere Inhalt eben dieses Handbuches vollauf Gelegenheit, sich mit den Bestrebungen der Herbartschen Schule bekannt zu machen. Das Eigentümliche der Herbartschen Pädagogik besteht bekanntlich darin, daß sie keinen andern als den „erziehenden Unterricht" gelten läßt. Also fordert sie auch vom Rechenunterrichte, daß er an seinem Teile zur Entwickelung des religiös-sittlichen Charakters des Schülers beitrage. Das ist der Hauptzweck desselben; ihm haben sich die Teilzwecke unterzuordnen. Hieraus ergiebt sich unter anderm, daß der Rechenunterricht der Herbartianer keinen der im Laufe der Zeit als wertvoll erkannten Teilzwecke ausscheiden kann. Er wird ihn vielleicht umgestalten, je nachdem, damit er voll und ganz in den Dienst des Hauptzwecks trete. Aber er wird ihn nicht grundsätzlich von sich weisen. Wie die Geschichte des Rechenunterrichts zeigt, wurden zuerst untergeordnete Zwecke, Teilzwecke, für denselben aufgestellt. Es folgte einer Richtung in der Regel die entgegengesetzte, danach der Ausgleich oder die höhere Einheit für beide. In den obersten Unterrichtszweck aber mündeten schließlich alle untergeordneten Zwecke ein.

So hat der Rechenunterricht der Herbartschen Schule z. B. das Formalprinzip und Materialprinzip der ältern Methodiker und deren Ausgestaltung bis auf die neueste Zeit berücksichtigt. Die Verdienste Pestalozzis und seiner unmittelbaren Nachfolger, eines Tillich, Kebs, von Türk u. a., aber auch der Gegner desselben, wie Graser, Stephani, Zerenner u. a., sodann diejenigen eines Harnisch, Diesterweg, Hentschel, Grube u. s. w. u. s. w. hat diese Schule gern anerkannt und verwertet. Ohne Voreingenommenheit wird sie auch alles beachten, was die Gegenwart bietet. Das Alte wie das Neue wird sie prüfen, und was sich probehaltig erweist, das wird sie aufnehmen und bewahren. Denn ihr Ziel ist ein unverrückbares, und es kann sich für sie überall nur darum handeln, die Mittel zu vervollkommnen, welche zu demselben hinführen.

Es ist hier nicht der Ort, auf die allgemeine Pädagogik der Herbartschen Schule einzugehen. Wer darüber der Belehrung bedarf, der greife zur Fachlitteratur.[37]) Nur eins möchten wir noch betonen. Der erziehende Unterricht kann zunächst zwar auch nur darauf ausgehen, ein Wissen zu erzeugen. Dieses Wissen soll aber ein klares und lebendiges sein. Klar wird es, wenn von der Anschauung zum Begriffe aufgestiegen wird, lebendig, wenn man es in Gebrauch nimmt, es in ein Können verwandelt. Dieses Wissen soll ferner ein festes und bleibendes sein. Dazu wird es, wenn Zusammenhang unter den einzelnen Zweigen desselben besteht. Und so legt die Herbartsche Pädagogik großen Wert auf die Entstehung des Wissens, das ist den Lernprozeß, und auf den innern Zusammenhang des Wissens, das ist die Unterrichtskonzentration. Ganz besonders auch beim Rechenunterrichte. Die Frucht der Erziehung aber soll der sittlich-religiöse Charakter sein, und diese Frucht soll der Rechenunterricht mit zeitigen helfen. Er wird es, wenn er in Verbindung mit dem übrigen Unterrichte Einfluß erlangt auf die Erkenntnis der sittlichen Güter, auf das sittliche Urteil und den Willen. Denn so darf man hoffen, daß das Wollen, vom sittlichen Urteil geleitet, zum sittlichen Handeln führt.

Die Sachunterrichts-Fächer sind es, welche unmittelbar zu Gesinnungen führen. Zu ihnen gehört der Rechenunterricht zwar nicht, aber er kann viel dazu beitragen, daß in diesen Fächern vollständiges, klares und lebendiges Wissen erzeugt werde. Dadurch schon gewinnen die Sachen für den erziehenden Rechenunterricht eine große Bedeutung. Doch auch noch aus einem andern Grunde. Handelt der Mensch, so geschieht es entweder im Verkehre mit der Natur oder mit andern Menschen. Irgend eine Sache aber giebt die Veranlassung dazu. Um nun deren Wert (nicht bloß den Geldwert) richtig zu beurteilen, bedarf es oft der Zahlen und Zahlverknüpfungen. Ohne letztere bliebe die Einsicht eine beschränkte, das sittliche Urteil unter Umständen ein unzuverlässiges. Eine

37) Siehe Litteraturangaben S. 101.

ganze Reihe von Sachgebieten meldet sich so an und fordert zu rechnerischer Behandlung auf. Und noch ein Drittes läßt die Sachen für den erziehenden Rechenunterricht von größter Bedeutung sein. Es haften die Zahlformen an den Sachen, und es wendet sich das kindliche Interesse den Sachen zunächst zu. So bilden dieselben den natürlichen Ausgangspunkt für Gewinnung der Zahlvorstellungen.

In diesem Sinne haben sich mit dem Rechenunterrichte z. B. Dörpfeld, die Herausgeber der Schuljahre (Rein, Pickel, Scheller), Just (im Jahrbuche des Vereins für wiss. Päd.), Teupser (ebenda und in den Deutschen Blättern für erziehenden Unterricht), Conrad (in den Schweizerischen Blättern), Wendt (in den D. Bl. f. erz. U.), Lomberg (im Evangelischen Schulblatt und in Reins Päd. Studien) u. a. beschäftigt. Der erste größere Versuch, diese Theorien praktisch zu verwerten, liegt in den Hartmann-Ruhsamschen Schüler-Rechenheften, von denen es zur Zeit drei Ausgaben nebst Lehrerheften giebt, vor. Wie sehr dieser Versuch aber angesprochen hat, geht außer den zahlreichen Einführungen der Hefte in Schulen aller deutschen Länder namentlich auch aus den Nachahmungen hervor, welche dieselben gefunden haben.

Zweiter Abschnitt.

Über den heutigen Stand des Rechenunterrichts.

§ 10.

Die Behandlung der Dezimalzahlen.

Litteratur. Adam, W. Geschichte ꝛc. Adam, R. Der Rechenlehrer. Neue Anleitung zum methodischen Unterricht im Rechnen. 2 Teile. Berlin 1883. Adam, Neue Methode für den Rechenunterricht in der Elementarschule des deutschen Reiches. Potsdam 1872. Böhme, A. Anleitung zum Unterricht im Rechnen. Berlin 1877. Böhme, A. Streitige Punkte im Rechenunterrichte. Berlin 1887. Böhme, A. Rechenbücher. Neubearbeitung von Schaeffer und Weidenhammer. Aufgaben zum Rechnen. 4. Heft. Berlin 1892. Brandenburger Schulblatt. Berlin 1870. Brennert und Kaselitz, Rechenbuch für deutsche Schulen. Berlin 1889. Büttner, A. Anleitung zum Rechenunterricht in der Volksschule. 12. Aufl. Leipzig 1893. Büttner, A. Rechenaufgaben. Ausgabe C. Leipzig 1886. Deutsche Blätter für Erziehenden Unterricht. Herausg. von Mann. 10. u. 11. Jahrg. Langensalza 1884 u. 85. Fickenwirth, O. Methodik für einen einheitlichen Rechenunterricht. Breslau 1892. Griesmann, J. A. Der Rechenunterricht in der Volksschule. Leipzig 1890. Hartmann-Ruhsam, Rechenbuch für Stadt- und Landschulen. (Schüler- und Lehrerhefte in drei Ausgaben. Siehe Text!) Leipzig und Frankfurt a. M. 1891/92. Heiland und Muthesius, Rechenbuch für Volksschulen. 3. Heft. Ausgabe für Lehrer. Weimar 1892. Hentschel-Költzsch, Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen. 14. Aufl. Leipzig 1891. Hofer, Jos. Methodik des Rechenunterrichts. Wien 1883. Jänicke, E. Geschichte ꝛc. Gotha 1888. Kaselitz, F. Wegweiser ꝛc. Berlin 1878—80. Kentenich und Frohn, Anleitung zur Erteilung des Rechenunterrichts und der Raumlehre in der

Volksschule. Düsseldorf 1892. Kuckuck (Kallius), Das Rechnen mit dezimalen Zahlen. Berlin 1872. Kutsch, A. C. Rechenbuch für Schulen. 1. Teil. Elbing 1874. Lincke, R. Rechenbuch für Volksschulen. 3 Teile. Jena 1884. Mittenzwey, L. Die Darstellungsformen im Rechnen nebst methodischen Andeutungen ꝛc. Gotha 1891. Pädagogische Blätter herausg. von Kehr. V. Bd. Gotha 1876. Päd. Jahresbericht herausg. v. A. Richter. 44. Jahrg. Leipzig 1892. Räther, H. Theorie und Praxis des Rechenunterrichts. 2. Teil. Breslau 1891. Rein, Picke lund Scheller, Das fünfte Schuljahr. 2. Aufl. Dresden 1884. Sachse, Anleitung zur Substitutionsmethode. Osnabrück 1873. Salberg, Die Sachrechenmethode ꝛc. Schütze, E. Th. Praktische Anweisung zur Behandlung der Bruchrechnung und der bürgerlichen Rechnungsarten für angehende Lehrer. Leipzig 1877. Schröter, R. Beiträge zur Methodik des Rechenunterrichts für die oberen Klassen der Seminare und für Volksschullehrer. Wittenberg 1887. Sterner, M. Prinzipielle Darstellung ꝛc. 1. Teil. München 1892. Sterner, M. Rechenbuch für Landschulen. München 1892. Sterner, M. Programm zu dem Rechenbuche für Landschulen. München 1892. Steuer, W. Methodik des Rechenunterrichts. Strehlen (Schlesien) 1883. Tanck, W. Rechenbuch. 4. Heft. Meldorf und Elmshorn 1882. Thieme und Schlosser, Rechenübungen für Volksschulen. Neu bearbeitete Auflage. Dresden 1891—92. Unger, F. Die Methodik ꝛc. Leipzig 1888.

Unter den mancherlei Anregungen, welche das deutsche Volksschulrechnen von außen her erfuhr, ist die von der kurz vor und nach 1870 hergestellten deutschen Münz-, Maß- und Gewichtseinheit ausgegangene eine der bedeutsamsten. Schon dadurch, daß von da ab die bessern Rechenbücher nicht mehr an der Landesgrenze unbrauchbar wurden, konnte der Rechenunterricht gefördert werden. Mehr noch durch die damit im Zusammenhange stehende größere Einheit in den Arbeiten der Rechenmethodiker Süd-, Mittel- und Norddeutschlands, weil dieselbe zu fruchtbaren Wechselbeziehungen und anregenden Handreichungen führte. Ganz besonders aber sollte für die Folge der Umstand, daß die Einteilung der Münzen, Maße und Gewichte eine dezimale war, von Bedeutung werden. Denn diese Einteilung zog die allgemeine Einführung der Dezimalrechnung nach sich. Vordem hatte man das Rechnen mit Dezimalzahlen in der Volksschule wohl als nützlich, aber nicht als notwendig erachtet. Selbst für Lehrerseminarien galt es nach den Preußischen Regulativen von 1854 als entbehrlich. Und da besonders auch die Pestalozzianer diese Ansicht teilten, so fand die Dezimalrechnung wenig oder keine Beachtung. So stand es noch in den fünfziger Jahren, und selbst Diesterweg machte keine Ausnahme. Natürlich mußte unter solchen Verhältnissen die schulgemäße Behandlung der Dezimalrechnung sehr leiden. Und so kann es uns auch nicht wundern, wenn die ersten Versuche, die Dezimalrechnung für die Volksschule zu bearbeiten, im ganzen ziemlich ungeschickt ausfielen. Erst nach und nach wurde das anders, es erschienen mehrere bessere Arbeiten, darunter z. B. Hentschels „Aufgaben über Dezimalbrüche." Auch gab es in den sechziger Jahren schon eine ziemliche Anzahl größerer städtischer Volks- (Bürger-) schulen, in denen mit Dezimalzahlen gerechnet wurde. Doch erst die siebziger Jahre, in denen das deutsche Volk anfing dezimal zu messen, zu wägen, zu zählen und zu zahlen, brachten die allgemeine Einführung der Dezimalrechnung. Von da ab konnte auch der einfachste deutsche Bürger die Kenntnis der Dezimalzahlen nicht mehr entbehren.

Über die Frage, ob Dezimalrechnung oder nicht, ist nach dem Gesagten endgiltig entschieden worden. Dagegen hat man sich über die schulgemäße Behandlung derselben eigentlich bis heute noch nicht einigen können. Insbesondere ist es die Frage, an welcher Stelle das Rechnen mit Dezimalzahlen am besten zu beginnen habe, welche die Methodiker noch immer beschäftigt. Manche wollen die Dezimalzahlen vor, andere neben, die dritten nach den Bruchzahlen behandelt haben. Für welchen Fall man sich entscheiden wird, hängt natürlich von der Auffassung der Dezimalzahlen selbst wesentlich ab. Diese kann aber eine doppelte sein. Entweder nimmt man das, was sie mit den Bruchzahlen gemein haben, als die Hauptsache, oder man legt auf die Eigenschaften, in denen sie mit den ganzen Zahlen übereinstimmen, das Hauptgewicht. Im ersten Falle erscheint die Dezimalzahl als besondere Art der Bruchzahlen, im zweiten Falle als Fortsetzung der Reihe der ganzen (dekadischen) Zahlen abwärts über Eins hinaus. Jede der beiden Auffassungen aber hat bis heute ihre Anhänger, und es scheint daher ratsam, die bekanntesten derselben zu hören, bevor man sich für die eine oder andere entscheidet.

Erste Auffassung: Die Dezimalzahl ist eine besondere Art der Bruchzahlen. Diese Auffassung, welche zugleich eine Behandlung der Dezimalzahlen nach den Bruchzahlen bedingt, findet man vertreten in den Rechenwerken, beziehentlich methodischen Schriften von Böhme (dem Bearbeiter des Rechenunterrichts in der neuen Ausgabe von Diesterwegs „Wegweiser"), Salberg, Kaselitz, Hentschel-Költzsch, Schütze, Steuer, Thieme-Schlosser, Unger, Räther, Schröter, Mittenzwey u. a.

Böhme ist der Ansicht: „Es scheint geratener, die Dezimalbruchrechnung erst auftreten zu lassen, wenn die Bruchrechnung in den vier Spezies absolviert ist." [1]) Das war im Jahre 1870, als man eben erst anfing, sich mit der zweckmäßigsten Einführung der Dezimalzahlen zu beschäftigen Später, im Jahre 1887, beleuchtete Böhme einige „Streitige Punkte" im Rechenunterrichte. Bei dieser Gelegenheit beantwortete er die Frage: „Wann soll die Schreibung in Dezimalbruchform eingeführt werden?" folgendermaßen: „An die wunderbar einfache Schreibung vom Vielfachen der Eins kann vorteilhaft die Schreibung der dezimalen Teile der Eins angeschlossen und somit das Rechnen mit diesen ganz übereinstimmend mit dem der ganzen Zahlen ausgeführt werden. Daraus ist gefolgert worden, daß man das Rechnen mit dezimalen Teilen (Brüchen) gleichzeitig mit dem der ganzen Zahlen, d. h. mit der spezifisch schriftlichen Form einführen solle. Der Ansicht bin ich nicht. Die Vielfachen der Eins, also die ganzen Zahlen, liegen dem Verständnisse unbedingt näher, als die Teile der Eins, d. h. die Brüche, und sollten diese noch

1) Brandenb. Schulbl. a. a. O. S. 411.

so einfach sein und sich aus der Anschauung ergeben, wie Halbe, Viertel, Achtel rc. Dasselbe gilt von Zehnteln und Hundertsteln."[2]) Ebendaselbst heißt es in der Antwort auf die Frage: „Sollen gemeine und Dezimalbrüche getrennt oder nebeneinander behandelt werden?" abschließend: „Seitdem die Dezimalbrüche ein Bürgerrecht auch in Schulen erhalten haben, welche nicht zur Gattung der höheren gehören, habe ich die ausführlicheren Bruchrechnungen beider Arten in entsprechenden Kapiteln sogleich aufeinander folgen lassen."[3]) Hieraus ergiebt sich zweierlei: Böhme betrachtet die Dezimalzahlen als eine besondere Art der Bruchzahlen, und er will, daß dieselben im Anschlusse an die letztern behandelt werden. Und so bringt er auch in seinen Rechenbüchern da, wo die Bruchrechnung im Zusammenhange behandelt wird, in jedem Abschnitte zwei Übungsgruppen: Gemeine Brüche und Dezimalbrüche. An dieser Einrichtung haben auch die Herausgeber der „Neubearbeitung" der Böhmeschen Rechenbücher nichts geändert.[4])

Salberg meint:[5]) „Der historische Entwickelungsgang führt von der gemeinen Bruchrechnung zur Dezimalbruchrechnung. Die in den französischen Schulen übliche Methode, die Dezimalbruchrechnung vorher und im Anschlusse an die vier Spezies zu behandeln, ist unnatürlich und wird nie in Deutschland Eingang finden. Ebenso unstatthaft ist es, ihr ein eigenes Kapitel beim Elementarrechnen zu weihen, was das Verständnis derselben nicht fördern kann. Wir behandeln von der Zahl 2 an alle auf jeder Zahlenstufe vorkommenden Brüche und kommen so auch zum Bruche $\frac{1}{10}$, der anfangs in dieser Schreibart eingeübt wird, worauf sofort die Abkürzung 0,1 eintritt."

Kaselitz schreibt über das „Wesen, Lesen und Schreiben der Dezimalbrüche":[6]) „Wie $\frac{7}{8}$ siebenmal der achte Teil eines Ganzen oder der achte Teil von sieben Ganzen sind, so sind auch $\frac{7}{10}$ oder 0,7 siebenmal der 10. Teil eines Ganzen oder der 10. Teil von sieben Ganzen und $\frac{7}{100}$ oder 0,07 siebenmal der 100. Teil von 1 Ganzen oder der 100. Teil von 7 Ganzen. Daraus erhellt, daß Dezimalbrüche sich ihrem Wesen und ihrer Bedeutung nach in keiner Weise von gewöhnlichen Brüchen unterscheiden. Der Unterschied zwischen gewöhnlichen Brüchen und Dezimalbrüchen liegt vielmehr einzig und allein in der verschiedenen Schreibung". Demgemäß folgen auch in seinem Rechenbuche die Dezimalzahlen den Bruchzahlen.[7])

Im „Lehrbuche" von Hentschel-Költzsch heißt es: „Mit welcher Bruchrechnung soll aber begonnen werden? Mancher redet der Behandlung der Dezimalbruchrechnung vor der gemeinen Bruchrechnung das Wort und thut das gewiß nicht aus dem Grunde, um es anders zu machen als viele erfahrene Rechenpraktiker. — Es führen ja viele Wege nach

2) Böhme a. a. O. S. 5.
3) Ebenda S. 6.
4) Böhmes Rechenbücher a. a. O.
5) Salberg a. a. O. S. 35.
6) Kaselitz a. a. O. Teil 3. S. 3.
7) Brennert und Kaselitz a. a. O.

Rom, und man kann auch hier in verschiedener Weise zum Ziele gelangen. Genanntes Verfahren ist, als konsequenter Ausbau des Zehnersystems, theoretisch auch berechtigt, und deshalb für das Gymnasium vielleicht nicht ungeeignet. Aber besitzt dasselbe auch eine praktische, für die Volksschule geltend zu machende Berechtigung? — Der Elementarunterricht muß bei den Anschauungen beginnen, welche das Kind aus dem Leben mitbringt, muß die Wahrnehmungen verwerten, welche sich für den Schüler täglich im Kreise seiner Umgebung erneuern. Zu diesen Anschauungen und immer wiederkehrenden Wahrnehmungen gehört aber viel weniger die Teilung eines Ganzen zunächst durch 10, dann durch 100, 1000 u. s. w. als die Zerlegung desselben in Hälften, Drittel, Viertel, Fünftel u. s. w. etwa bis zu den Zwölfteln und Sechzehnteln herunter.... Wir behandeln darum bei der eigentlichen Bruchrechnung immer zuerst die gemeine Bruchrechnung und lassen die Dezimalbruchrechnung folgen, und es darf um so mehr geschehen, als schon das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen, soweit es nur möglich war, in dezimaler Schreibung ausgeführt wurde, wodurch der Rechner fast schon alle Rechenvorteile kennen und anwenden gelernt hat, die die Dezimalbruchrechnung bietet." [8])

Schütze, dessen Behandlung der Bruchrechnung den Beifall Hentschels fand, stellt ebenfalls die Behandlung der „gemeinen Brüche" voran. Allerdings kommen dem Leser anfangs Zweifel bei, ob er den „Dezimalbruch" wie die vorgenannten Methodiker als speziellen Fall des „gemeinen Bruches" betrachte. Denn er sagt: „Ein Dezimalbruch entsteht, wenn man von den Einern nach rechts eine oder mehrere Ziffern ansetzt." [9]) Und später: „Dezimalbrüche heißen diese Brüche darum, weil die Dezimalstellen, aus welchen sie bestehen, sich ebenso zu einander verhalten, wie die Zahlenordnungen im Dezimalsystem." [10]) Aber schon auf der nächsten Seite steht: „Dezimalbrüche sind solche Brüche, die zum Nenner 10 oder ein Produkt aus den Faktoren 10 haben." [11]) Und bald darauf: „Der Dezimalbruch hat Zähler und Nenner wie jeder gewöhnliche Bruch, aber nur der Zähler wird geschrieben." Nimmt man dazu noch die Art, wie Schütze die vier Spezies mit „Dezimalbrüchen" durchführt, so kann es nicht zweifelhaft sein, daß seiner hier an der richtigen Stelle gedacht worden ist. Auf eine Begründung der Stellung, welche die Bruchzahlen und Dezimalzahlen oder die (um Schützes Ausdrücke beizubehalten) gemeinen Brüche, Dezimalbrüche und gemischten Dezimalzahlen durch seine „Praktische Anweisung" erhalten, läßt sich der Verfasser nicht ein.

Es ist ferner Steuer genannt worden, dessen Rechenwerke namentlich in Schlesien Verbreitung gefunden haben. Dieser sagt: „Die Übungen mit gemeinen Brüchen müssen den Übungen mit Dezimalbrüchen

8) Hentschel-Költzsch a. a. O. 2. Teil. S. 2 f.
9) Schütze a. a. O. S. 101.
10) Ebenda S. 102.
11) Ebenda S. 103.

vorangehen. Die Halben, Drittel, Viertel, Fünftel, Achtel liegen uns näher als die Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, was daher kommt, daß das Ganze in weniger Teile geteilt ist, mit andern Worten, daß der Zahlwert in kleinern Zahlen ausgedrückt wird. Die Dezimalbrüche sind Brüche, die sich dadurch von den gemeinen Brüchen unterscheiden, daß sie nur gewisse Zahlen, nämlich 10, 100, 1000 u. s. w., zu Nennern haben, während bei den gemeinen Brüchen jede beliebige Zahl den Nenner bilden kann (auch 10, 100, 1000 u. s. w.), ferner dadurch, daß ihre Nenner nicht geschrieben werden, weil sie aus der Menge der Ziffern des Zählers ersichtlich sind. Die Dezimalbrüche stehen zu den gemeinen Brüchen in dem Verhältnis von Unterart zu Art." [12]) Als besondere Art der Bruchzahlen betrachten auch Thieme und Schlosser die Dezimalzahlen noch, wenn sie auch in der „neu bearbeiteten Auflage" ihres Rechenwerkes die ganz verfehlte Einführung derselben auf der Unterstufe beiseite gelassen haben, und wenn sie auch von dem durch den Wortklang herbeigeführten Irrtume, es bestehe eine Parallelstellung von Zehn und Zehntel, Hundert und Hundertstel u. s. f., zurückgekommen sind. [13]) Denn in ihrem vierten Hefte, worin sie die Bruchrechnung im Zusammenhange behandeln, lassen sie in der Weise Böhmes entsprechende Abschnitte mit Bruchzahlen, welche sie kurz „Brüche" nennen, und Dezimalzahlen, welche sie als „Dezimalbrüche" bezeichnen, regelmäßig abwechseln. Aus den Vorbemerkungen der beiden ersten Hefte sind die frühern auf Dezimalzahlen bezüglichen Sätze verschwunden. Im dritten Hefte heißt es abweichend von der alten Auflage: „Bei der Behandlung der Münzen, Maße und Gewichte wird zugleich die dezimale Schreibweise geübt." Aber im vierten Hefte steht noch immer: „Die stete Verbindung von Dezimal- und gemeinen Brüchen soll die nur formell obwaltende Verschiedenheit beider Rechnungsarten (?) zur Anschauung bringen." Übrigens gewinnt es ganz den Anschein, als ob Thieme und Schlosser die Absicht hätten, ihre bisherige Auffassung vollständig fallen zu lassen. [14])

Bei Unger heißt es: „Der Vorteil, der aus der Voranstellung der gemeinen Brüche vor die Dezimalen fließt, ist so in die Augen springend, daß er auch von den Vertretern der anderen Ansichten (Voran- und Nebenanstellung der Dezimalzahlen) anerkannt wird. Es lassen sich bei solcher Aufeinanderfolge die wenigen Regeln der Rechnung mit Dezimalbrüchen mit größter Leichtigkeit zu vollem Verständnis bringen. Neue Regeln treten überhaupt nicht hinzu, da ja die Dezimalbrüche nur eine Abteilung (eine sehr kleine) der gesamten Brüche sind; den schon bekannten Regeln ist nur wegen der abweichenden schriftlichen Form der Dezimalbrüche ein

---

12) Steuer a. a. O. S. 21.

13) H. I. S. 37.

14) Thieme und Schlosser a. a. O. Die Hefte gehören zu denen, welche durch die im vorliegenden Handbuche entwickelten und in unserm „Rechenbuche für Stadt- und Landschulen" praktisch durchgeführten rechenmethodischen Grundsätze besonders stark beeinflußt worden sind. Vieles in der „Neubearbeitung" derselben erscheint als Nachahmung des von uns zuerst Gebrachten.

diesbezüglicher Wortlaut zu geben." Vorher wendet sich Unger noch aus einem anderen Grunde gegen die Voranstellung der „Dezimalbrüche" im Anschlusse an das Rechnen mit mehrsortigen Zahlen. „Das Rechnen ist (dann) thatsächlich nur ein Operieren mit ganzen Zahlen und auch die Vorstellung erstreckt sich nicht weiter; das Dezimalkomma ist nur ein Trennungszeichen der zwei Sorten. Somit enthüllt sich die dezimalbruchartige Schreibweise mehrsortiger Zahlen als einziger Kern der ganzen Sache; ein Rechnen mit Dezimalbrüchen ist nicht dabei."[15])

Sehr umsichtig verfährt Räther bei Bestimmung der Stellung der Dezimalzahlen. Er geht von dem Begriffe des „Dezimalbruchs" aus, nämlich: „Ein Dezimalbruch ist ein Bruch, dessen Nenner eine dekadische Einheit ist, und der nach dem Gesetze des indischen Stellensystems geschrieben wird. Oder: Ein Dezimalbruch ist ein Bruch, der aus niederen Einheiten des indischen Stellensystems besteht und nach dem Gesetz dieses Systems geschrieben wird."[16]) Zu dieser Begriffsbestimmung kommt er im Anschlusse an das Rechnen mit dezimalen Währungen in dezimaler Schreibung. Um zu der letztern zu gelangen, giebt er zwei Wege an: „Erster Weg: Vor oder mit der dezimalen Schreibung mehrfach benannter Zahlen ist in die Kenntnis der Dezimalbrüche einzuführen, wenigstens in das Lesen und Schreiben derselben. Zweiter Weg: Zur dezimalen Schreibung mehrfach benannter Zahlen ist die Kenntnis der Dezimalbrüche nicht erforderlich; diese Schreibung ist allein auf Grund der Sortenverwandlung zu lehren." Dann fährt er fort: „Es muß zugegeben werden, daß man auf beiden Wegen zum Ziele gelangen kann. Aber wir halten den ersten Weg für den sicherern. Lehrt man die dezimale Schreibung der Münzen ꝛc. auf Grund der Kenntnis der Dezimalbrüche, dann geht man der Sache auf den Grund; es kann keine Unklarheit mehr bleiben; die Bedeutung des Kommas und die Notwendigkeit, die höhere Sorte als Benennung hinzuzufügen, ist vollständig erklärt."[17]) Weiterhin führt Räther aus, wie das geschehen soll. Dabei wird das Rechnen mit ein- bis dreistelligen Dezimalzahlen in allen Grundrechnungsarten behandelt. Nur zwei Fälle bleiben ausgeschlossen: Multiplikator und Divisor sind Dezimalzahlen.[18])

Schröter ist der Ansicht, daß nicht in dem „Nach"-, „Vor"- und „Nebeneinander" der wesentliche Unterschied der Ansichten über die „Stellung der Dezimalbruchrechnung zu dem Rechnen mit gemeinen Brüchen" liege, sondern daß sich diese „Differenz" gründe „auf den heftig entbrannten Kampf über die Ausdehnung der Dezimal-Bruchrechnung und ihre Bedeutung für unsere Volksschule."[19]) Danach gedenkt Schröter der Unter- und Überschätzung der Bedeutung des Rechnens mit Dezimalzahlen, sowie der Unentbehrlichkeit der „gemeinen Brüche" und folgert,

15) Unger a. a. O. S. 202.
16) Räther, a. a. O. S. 276.
17) Räther a. a. O. S. 247.
18) Vergleiche hierüber auch: Räther, Rechenheft 4.
19) Schröter a. a. O. S. 58.

daß in der Schule stets mit beiden zu rechnen sein werde. Wegen mancher Verschiedenheiten der Dezimal- und Bruchzahlen kann er eine gemeinsame „nebeneinander herlaufende Behandlung derselben“ nicht empfehlen. Es können also nur Vor- und Nachbehandlung in Frage kommen. Doch: „Ich halte dafür, daß auch wirklich darauf wenig ankommt, ob ich die Dezimalbrüche vor oder nach den gemeinen Brüchen behandle. Wir verrennen uns dabei in Theorien, denen häufig der praktische Hintergrund fehlt. . . Welche von beiden Formen wir zuerst nehmen, sollte doch wahrlich nicht zu hitzigem Kampfe Veranlassung geben.“ Schließlich fährt er aber fort: „Wenn wir uns der Einheit wegen an die gebräuchlichste Form anschließen und dem Rechnen mit gemeinen Brüchen den Vorrang lassen, so berücksichtigen wir dabei, daß ja auch im Rechenunterrichte sich zunächst Gelegenheit fand, diese vorzubereiten, daß die Dezimalbruchrechnung doch in ihren schwierigen Aufgaben nur auf Tafelrechnen hinweist, und daß es pietätvoll ist, die so lange geübte und bewährte Bruchrechnung auch an erster Stelle zu belassen.“ [20]) Indessen heißt es auch am Ende eines Abschnittes über „die Dezimalbruchrechnung“: „Aus Vorstehendem wird sich ergeben, daß die Dezimalbruchrechnung in einer weisen, auf die Praxis gegründeten Beschränkung durch die ihr eigentümliche Beziehung zum dekadischen Zahlensystem einfacher und leichter zu behandeln ist, als die gemeine Bruchrechnung, daß sie nicht des Rechnens mit gemeinen Brüchen als Vorstufe bedarf, und daß sie keineswegs ein bloßes Regelrechnen ist, sondern daß selbst die Einführung der Formen des Tafelrechnens dieselbe Bedeutung für die formale Bildung hat, als die Formen des Kopfrechnens bei dem Rechnen mit gemeinen Brüchen.“ [21])

Man könnte hiernach fast im Zweifel sein, was Schröter unter „Dezimalbrüchen“ eigentlich verstehe. Doch er bemerkt an einer andern Stelle ausdrücklich: „Es sind Brüche, deren Nenner Potenzen von Zehn sind.“ [22])

Bei Mittenzwey lesen wir über die Bedeutung der Dezimalzahlen: „Die Dezimalbrüche können die gewöhnlichen Brüche nie und nimmer ersetzen, schon weil erstere ihrer ganzen Natur nach auf schriftliche Darstellung hingewiesen sind. Wer mit dem richtigen Verständnis mit gemeinen Brüchen zu arbeiten versteht, kann es auch mit Dezimalen, aber umgekehrt niemals, weil die Dezimalbrüche für den Schüler zu sehr den Charakter der Zahl tragen.“ [23]) Und weiter unten steht über das Rechnen mit denselben: „Manche Rechenmethodiker behandeln die Dezimalbrüche vor den gemeinen Brüchen; sie fassen den Dezimalbruch nicht auf als einen speziellen Fall des gewöhnlichen Bruchs, sondern als eine Fortsetzung der dezimalen ganzen Zahl, als eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems unterhalb der Einheit (daher auch die Bezeichnung Dezimalzahl, nicht Dezimalbruch); aus diesem Grunde fordern sie auch

20) Ebenda S. 60.
21) Ebenda S. 82.
22) Ebenda S. 77.
23) Mittenzwey a. a. O. S. 45.

eine Behandlung der Dezimalbrüche vor den gemeinen Brüchen und zwar im Anschlusse an den unbegrenzten Zahlraum. Das Numerieren soll dann von der Null aus (wohl richtiger von der Eins aus) zur Rechten und zur Linken geschehen. Sicher läßt sich auch dieser Weg einschlagen; wir meinen aber, daß Halbe, Viertel, Drittel ꝛc. im Leben viel früher und häufiger auftreten, als die Teilung eines Ganzen durch 10, 100, 1000 u. s. w.; und der Elementarunterricht muß bei den Anschauungen beginnen, welche das Kind aus dem Leben mitbringt, und die sich täglich im Kreise seiner Umgebung erneuern."[24])

Als eine besondere Art von Bruchzahlen und deshalb erst nach diesen werden die Dezimalzahlen auch behandelt in den Rechenbüchern von Schellen, Hästers und Röhm, Knabe und Ostwald, Berthelt, Möbius (Päthig und Werner), Wagner, in dem Chemnitzer Rechenbuche, in Hentschels Rechenheften, in Knillings Reform des Rechenunterrichts u. s. w.

Zweite Auffassung: Die Dezimalzahl ist eine Fortsetzung der Reihe der ganzen (dekadischen) Zahlen abwärts über die Eins hinaus. Als Vertreter dieser Auffassung, welche zugleich eine Behandlung der Dezimalzahlen vor der zusammenhängenden Behandlung der Bruchzahlen bedingt, sind zu nennen: Adam, Sachse, Büttner, Kuckuck (Kallius), Rein (Pickel und Scheller), Tanck, Kentenich, Weitz, Griesmann, Fickenwirth, Hofer, Eichler, Sterner u. a.

R. Adams Urteil lautet: „Die Dezimalbrüche gehören unzweifelhaft vornehmlich in das Gebiet des schriftlichen Rechnens, zu dessen Vereinfachung sie ja dienen sollen. Daher haben wir nach Durcharbeitung der hauptsächlich für das Kopfrechnen bestimmten Zahlkreise 1 bis 10, 20, 100 und 1000 auf die Herleitung dieser neuen Brüche Bedacht zu nehmen. Daß diese Herleitung naturgemäß nur durch Erweiterung des dekadischen Zahlsystems unterhalb der Einheit bewirkt werden kann, ist selbstverständlich. Demzufolge halten wir es für geboten, bei dem Eintritt in den Zahlkreis über 1000 sogleich mit dem Numerieren zu beginnen; und zwar mit dem Numerieren von der Null (soll wohl heißen: Eins) zur linken und zur rechten. Hierdurch gelangen wir einerseits zu den Begriffen: Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende, Hunderttausende und Millionen, andererseits zu den Begriffen: Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, Zehntausendstel, Hunderttausendstel und Millionstel."[25])

In seinem „Rechenlehrer" schreibt R. Adam über die Stellung der Dezimalzahlen: „Die Einheiten des dekadischen Systems sind nach den gegebenen Andeutungen dreifacher Art, nämlich: a) Grundeinheiten oder Einer; b) dekadische Einheiten (Z, H, T ꝛc.), welche entstehen, wenn man die Einer wiederholentlich mit 10 vervielfältigt;

24) Ebenda S. 59.
25) Adam, Neue Methode ꝛc. a. a. O. S. 12.

c) dezimale Einheiten (z, h, t ꝛc.), welche entstehen, wenn man die Einer wiederholentlich durch 10 teilt. Die Einer und die dekadischen Einheiten werden zusammen ganze Zahlen genannt, während die dezimalen Einheiten den altherkömmlichen Namen Dezimalbrüche führen, obwohl sie wie die ganzen Zahlen Einheiten des dekadischen Systems sind und sich daher von denselben nicht wesentlich unterscheiden. . . . . . Die Brüche sind nicht Einheiten des dekadischen Zahlensystems, können aber leicht in solche verwandelt werden (Verwandlung des gemeinen Bruchs in einen Dezimalbruch)." 26)

Über die Bedeutung und Behandlung der Dezimalzahlen bringt W. Adams „Geschichte ꝛc." folgende Bemerkungen: „Ob nun die Dezimalbrüche vor oder nach den gemeinen Brüchen im Lehrgange aufzutreten haben, das ist eine teilweise noch offene Frage, deren Beantwortung zwar für günstige Schulverhältnisse von untergeordneter Bedeutung, aber für Elementarschulen einfachster Art von größter Wichtigkeit ist. In diesen Schulen kommt es nämlich darauf an, die Dezimalzahl in solchem Grade zur Geltung und Anwendung zu bringen, daß den Schülern die für das praktische Leben erforderlichen Operationen mit Dezimalbrüchen geläufig werden. Da ist es denn notwendig, daß die gemeinen Brüche in den Hintergrund treten. Die Schwierigkeit der Methode liegt nun darin, daß der elementare Rechenunterricht neben den einfachsten Übungen mit gemeinen Brüchen hauptsächlich die Dezimalbruchrechnung zu beachten hat, in welcher die Schüler bis zur Geläufigkeit gebracht werden sollen." Um derselben aber zu begegnen, empfiehlt Adam zweierlei: 1. „Die Einführung der Dezimalbrüche erfolgt bei der Numeration im unbegrenzten Zahlraume durch Fortsetzung des dekadischen Zahlsystems zur Rechten der Einerstelle." 2. „Die Dezimalbrüche werden sogleich innerhalb des metrischen Maß-, Gewichts- und Münzsystems zur Vereinfachung der Rechenoperationen verwendet und beherrschen von da ab das Zifferrechnen." 27)

Da das gegenwärtige deutsche Münz-, Maß- und Gewichtssystem die Hauptveranlassung zur Einführung der Dezimalrechnung gab, so lag es nahe, diese Beziehung methodisch zu verwerten. In diesem Sinne aber waren unter den Anhängern der zweiten Auffassung neben Adam namentlich Sachse und Büttner thätig. Sachse sagt: „Die Dezimalen sind mit dem metrischen Maß- und Gewichtssysteme nicht nur verschwistert, sondern sogar unzertrennlich verwachsen. Daher werde die Einführung in die Dezimalbruchrechnung an der Hand des anschaulichen dezimalen Maßsystems vorgenommen." 28) Büttners Meinung geht dahin: „Die einzelnen Operationen mit Dezimalbrüchen erhalten ihre ganz einfache, natürliche, äußerst korrekte und lichtvolle Veranschaulichung und Erläuterung

---

26) Adam a. a. O. S. 12.
27) Adam a. a. O. S. 131 f.
28) Sachse a. a. O.

durch die Rechnung mit mehrfach benannten Zahlen." [29]) Praktisch durchgeführt hat das Büttner in seinen „Rechenaufgaben". Das zweite Heft derselben behandelt im ersten Abschnitte die Zehntel, Hundertstel und Tausendstel in dezimaler Schreibung, nachdem im ersten Hefte das Rechnen mit größern (ganzen) Zahlen erledigt worden ist. Der zweite Abschnitt bringt die Sortenverwandlung: Münzen, Längen- und Hohlmaße, Gewichte, Zähl- und Zeitmaße. In den Abschnitten 3 bis 6 desselben werden die vier Grundrechnungsarten erledigt und Abschnitt 7 enthält vermischte Aufgaben. Die dezimale Schreibweise tritt dabei so stark hervor, daß der Schüler thatsächlich schon mit Dezimalzahlen rechnet, ehe ihm das dritte Heft die „Dezimalbruchrechnung" im Zusammenhange, vom Numerieren ausgehend, darbietet. Erst das vierte Heft behandelt die Bruchzahlen im Zusammenhange. [30])

In seiner „Anleitung" definiert Büttner: „Die Dezimalbrüche sind Brüche, welche den Unterbau unseres Zahlsystems bilden; sie sind die Fortsetzung unseres Zahlenbaues auf niedere Ordnungen von den Einern aus." Dann fährt er fort: „Früher schloß unser Zahlsystem mit den Einern als der niedrigsten Stufe ab; jetzt sind zu den dekadischen Einheiten des Oberbaues — Einer, Zehner, Hunderter — die dezimalen Einheiten des Unterbaues — Zehntel, Hundertstel, Tausendstel — hinzugekommen . . . Da die Dezimalbrüche wie ganze Zahlen geschrieben und gelesen werden, so ist das Rechnen mit denselben von dem Rechnen mit ganzen Zahlen durch nichts weiter verschieden als dadurch, daß im Ergebnis dem Komma die richtige Stelle gegeben wird. Wer mit ganzen Zahlen rechnen kann, lernt leicht auch jede Rechnung mit Dezimalen ausführen. Das zeigen auch die einfachen Regeln über die 4 Spezies mit Dezimalen." [31]) Die grundlegende Erklärung der alten Schule, welche lautet: „Ein Dezimalbruch ist ein Bruch, dessen Zähler eine ganze Zahl und dessen Nenner eine dekadische Einheit (10, 100, 1000 . . .) ist" — bezeichnet Büttner als falsch: „Denn die sogenannten Zehntelbrüche sind an sich keine Dezimalbrüche; sie werden es erst durch die Schreibung." Überhaupt ist er der Ansicht: „Alle diese Erklärungen (die vorstehende und die daraus abgeleiteten) sind für den Schüler der Volksschule vom Übel. Das Schreiben und Lesen der Dezimalbrüche ergiebt sich unmittelbar aus den Ziffern, wenn man diese Brüche als Systembrüche behandelt." [32]).

Eine sehr beachtenswerte Arbeit über das Rechnen mit dezimalen Zahlen im Sinne der zweiten Auffassung hat auch Kuckuck (Kallius) 1872 geliefert. [33]) Dieselbe steht noch heute in Fachkreisen in hohem Ansehen. Entschiedene Anhänger der zweiten Auffassung sind ferner die

29) „Von den Dezimalbrüchen als Lehrgegenstand im Unterrichte der Volksschule, namentlich der einklassigen" in Kehrs Pädag. Blättern, Bd. V, S. 220 ff.
30) Büttner, Rechenaufgaben ꝛc. a. a. O.
31) Büttner a. a. O. S. 133.
32) Ebenda S. 134.
33) Kuckuck a. a. O.

Verfasser der „Schuljahre“. Diese sagen: „Gewiß sind die Dezimalbrüche nur eine besondere Art der Brüche und vielen andern Arten, nämlich den Zweitel-, Drittel-, Viertelbrüchen u. s. w. begrifflich vollständig nebengeordnet. Man kann dieselben deshalb recht gut innerhalb der Bruchrechnung (oder nach derselben) unterbringen und hätte kaum noch etwas anderes zu zeigen als die einfachere Schreibweise der Dezimalbrüche ... Wenn jedoch ihr Erfinder weiter nichts bezweckt hätte, als zu zeigen, daß man Zehntelbrüche schon genügend bezeichnen kann, indem man nur den Zähler schreibt, so würde man von seiner Erfindung kaum noch reden. Jedenfalls war es ihm aber darum zu thun, nachzuweisen, daß man die Dezimalbrüche (die man dann zweckmäßiger Dezimalzahlen nennt), als eine Fortsetzung des dekadischen Systems nach rechts (unter die Einer) ansehen kann, daß man deshalb mit denselben gerade so wie mit ganzen (dekadischen) Zahlen rechnen kann. Die großen Vorteile, welche hierdurch dem praktischen Rechner geboten sind, liegen auf der Hand; sie sind so groß, daß man im praktischen Leben, sobald es sich um Brüche mit größern Nennern oder größern Reihen handelt, gemeine Bruchrechnung kaum noch angewendet findet (zumal seit Einführung des dezimalen Münz- und Maßsystems).“ [34])

Die praktische Ausführung gestaltet sich in den „Schuljahren“ so, daß auf das Rechnen mit dekadischen (ganzen) Zahlen das Rechnen mit den deutschen Münzen, Maßen und Gewichten folgt und an dieses die Einführung der Dezimalzahlen und das Rechnen mit denselben sich anschließt. Die Stoffgliederung ist diese: 1) Das Liter. Einteilung in Zehntel. Dezimale Schreibweise der Zehntel. Lesen der gemischten Dezimalzahl als dekadische Systemzahl, als gemischte Zahl und als unechter Bruch. Rechnen mit Zehnteln: Verwandeln ganzer und gemischter Zahlen in Zehntel. Reduzieren der Zehntel. Multiplikation und Division mit 10. — 2) Das Meter. Einteilung in Centimeter und Millimeter. Entstehung der Hundertstel aus Einern und Zehnteln. Schreibweise der Hundertstel. Resolvieren und Reduzieren. Entstehung der Tausendstel aus Einern und Hundertsteln. Multiplikation und Division mit 10, 100 und 1000. Das Kilometer. — 3) Die Münzen. Arten und Beschaffenheit. Schreibweise. Bedeutung der Null vor und nach den Ziffern. Resolvieren und Reduzieren. Umwandlung der verschiedenen Münzsorten. Division mit 5 und Multiplikation mit 2. — 4) Das Gewicht. Gewichtseinheit und abgeleitete Gewichte. Schreibweise. 5) Zusammenstellung des in 1) bis 4) erlangten Wissens über die Dezimalzahlen und Erweiterung bis zu Millionsteln (oder weiter). — 6) Addition der Dezimalzahlen. a) Kopfrechnen. 1 Einheit. (3 Gruppen: Münzen, Maße, Gewichte). b) Tafelrechnen. 1 Einheit in 2 Abteilungen: α) gleichnamige, β) ungleichnamige Dezimalzahlen. — 7) Subtraktion der Dezimalzahlen. a) Kopfrechnen. 1 Einheit. (Das Abziehen ohne Umwandlung kommt auf die erste Stufe). b) Tafel-

34) Rein, Pickel und Scheller a. a. O. 5. Schuljahr, S. 137.

rechnen. 1 Einheit in 2 Abteilungen: α) gleichnamige, β) ungleichnamige Dezimalzahlen. — 8) Multiplikation der Dezimalzahlen. a) Kopfrechnen. 1. Der Multiplikator ist eine dekadische Einheit. 2. Der Multiplikator ist eine dekadische (ganze) Zahl 0. Grades. 3. Der Multiplikator ist eine reine Zahl (Systemzahl) höhern Grades. 4. Der Multiplikator ist eine gemischte dekadische Zahl. b) Tafelrechnen. 1. Der Multiplikator ist eine dekadische Einheit. (Die Multiplikation mit 10^1, 10^2 und 10^3 ist schon bekannt!) 2. Der Multiplikator ist eine Zahl 0. Grades. 3. Der Multiplikator ist eine reine Zahl. 4. Der Multiplikator ist eine gemischte dekadische Zahl. 9) Division der Dezimalzahlen. a) Kopfrechnen. 1. Der Divisor ist eine dekadische Einheit. 2. Der Divisor ist eine dekadische (ganze) Zahl 0. Grades. 3. Der Divisor ist eine reine Zahl höhern Grades. 4. Der Divisor ist eine gemischte dekadische Zahl. b) Tafelrechnen. 1. Der Divisor ist eine dekadische Einheit. 2. Der Divisor ist eine Zahl 0. Grades. 3. Der Divisor ist eine reine Zahl. 4. Der Divisor ist eine dekadische gemischte Zahl. — 10) Durchschnittsberechnungen und Verbindung von Multiplikation und Division.[35])

Tanck, dessen reformatorischer Thätigkeit auf dem Gebiete des Schulrechnens oben gedacht wurde, hat ein Rechenbuch in acht Heften herausgegeben, das viel Wertvolles in methodischer Hinsicht enthält. Als besonders gelungen dürfte aber das vierte Heft desselben zu bezeichnen sein, welches in drei Abschnitten den „Zahlkreis bis in die Millionen," die „Dezimalbrüche" und die „gemeinen Brüche" behandelt.[36]) Auch Tanck geht bei Einführung der „Dezimalbrüche" von den deutschen Münzen, Maßen und Gewichten aus, dieselben als Anschauungsmaterial, das schon in den vorhergehenden Heften berücksichtigt wurde, benutzend. Weiterhin operiert er vorwiegend oder ausschließlich mit unbenannten Zahlen, bringt sodann die vier Grundrechnungsarten in unbenannten und benannten Zahlen und schließt mit einer Reihe eingekleideter Aufgaben ab.

Kentenich war vordem Anhänger der ersten Auffassung.[37]) Die neueste Auflage seiner in Verbindung mit Frohn herausgegebenen „Anleitung" steht aber durchaus auf dem Boden der zweiten Auffassung. Darin wird sogar der Name „Dezimalbruch" abgelehnt. Ausdrücklich heißt es: „Das Rechnen mit Dezimalen wird zweckmäßig an das Rechnen mit ganzen (dekadischen) Zahlen angeschlossen und geht dem Rechnen mit gemeinen Brüchen vorauf. Gründe: 1. Das Rechnen mit Dezimalen ist nichts anderes als ein Rechnen mit ganzen Zahlen . . . Wer mit ganzen Zahlen rechnen kann, der kann auch mit Dezimalen rechnen, wenn er die Dezimalen als eine Fortsetzung des Zahlsystems nach rechts erkannt und aufgefaßt hat. Schiebe ich das Rechnen mit gemeinen Brüchen dazwischen, so schiebe ich zwischen nahe Verwandtes etwas ganz Fremdartiges, und die klare Auffassung des Wesens der De-

35) Ebenda S. 143 f.
36) Tanck a. a. O.
37) H. I. S. 36.

zimalen wird nicht nur nicht erleichtert, sondern im Gegenteil gar leicht getrübt. 2. Das Rechnen mit Dezimalen ist leichter als das Rechnen mit gemeinen Brüchen. In einem guten Unterrichtsgange geht aber das Leichtere dem Schwerern voran. Bei Schülern, die das Rechnen mit ganzen Zahlen ordentlich erlernt haben, kommt es nur noch darauf an, daß sie die Dezimalen als Fortsetzung des Zehnersystems nach rechts erkennen ... 3. Das Rechnen mit Dezimalen ist das wichtigere ... Nun ist aber klar, daß nach Einführung des zehnteiligen Münz-, Maß- und Gewichtssystems das Rechnen mit gemeinen Brüchen nicht mehr die Bedeutung hat wie früher. Brüche mit kleinen Zahlen finden allerdings auch heute noch bei Kopfrechenaufgaben vorteilhafte Verwendung, im übrigen vollzieht sich das Rechnen vorzugsweise in Dezimalzahlen ... Soll unser Volk von dem zehnteiligen Münz-, Maß- und Gewichtssystem den Nutzen ziehen, der darin liegt, so muß gerade die Schule die kräftigste Anstrengung machen, es aus dem alten Rechnungssystem herauszureißen." [38])

Bei Weitz liest man: „In der Elementarschule ist die Dezimalbruchrechnung am zweckmäßigsten vor der gemeinen Bruchrechnung zu lehren. Es sprechen dafür folgende Gründe: 1. Das Rechnen mit Dezimalbrüchen ist nach Einführung der neuen Münzen, Maße und Gewichte in den Vordergrund getreten. 2. Die Kenntnis derjenigen gemeinen Brüche, welche das Leben noch häufig berührt, ist durch die Vorbereitung der Bruchrechnung auf den untern Stufen vermittelt worden ... 3. Die weiteren einfachen Operationen mit Dezimalbrüchen, welche in der Volksschule zu behandeln sind, können ohne Bezugnahme auf das Rechnen mit gemeinen Brüchen gelehrt werden." [39])

Griesmann läßt zwar die Entwickelung der Dezimalzahl (das ist der Name, den er braucht) aus dem Bruche zu, bemerkt aber ausdrücklich: „Obgleich die Entwickelung der Dezimalzahl aus dem Bruche erfolgt, so wird doch — und das ist die Hauptsache — die Dezimalzahl nicht als eine besondere Art der Brüche aufgefaßt, deren Nenner nicht verzeichnet, sondern nur aus der Anzahl der Dezimalstellen erschlossen wird." [40])

Ein sehr entschiedener Anhänger der zweiten Auffassung ist auch der Seminarlehrer Fickenwirth. Denn unter den Grundsätzen, nach denen er seine „Methodik" bearbeitet hat, befinden sich folgende: „Zur rechten Durchdringung des Rechenstoffes müssen wir das hierher gehörige Vielerlei streng genetisch ordnen, mit anderen Worten: wir müssen den Rechenunterricht einheitlich gestalten; der Kern einer solchen Konzentration ist das Dezimal- und Positionsgesetz unseres dekadischen Zahlsystems ... Der Rechenunterricht betone die Verwandtschaft unseres Systems mehrfach benannter Zahlen dezimaler Währung mit dem dekadischen Zahlsystem und

38) Kentenich und Frohn a. a. O. S. 132 f.
39) Weitz a. a. O. S. 65.
40) Griesmann a. a. O. S. 101.

leite aus letzterem die Schreibweise jener Zahlen ab ... Die Einführung der Dezimalbruchrechnung erscheine den Schülern nur als eine naturgemäße Erweiterung des Zahlsystems über die Einer hinaus nach rechts." [41]) Dem entsprechend geht dann auch die zusammenhängende Behandlung der Dezimalzahlen derjenigen der Bruchzahlen voraus.

Hofer, ein österreichischer Schulmann, sagt: „Der Begriff der Dezimalzahlen, sowie das Rechnen mit denselben läßt eine zweifache Auffassung und Behandlungsweise zu. Man betrachtet nämlich die Dezimalzahlen bloß als eine Erweiterung des dekadischen Systems und rechnet mit ihnen nach denselben Regeln, wie mit ganzen Zahlen, oder man faßt sie als Brüche auf. Für die erste Behandlungsweise sprechen mehrere triftige Gründe." [42]) Demgemäß behandelt auch er die Dezimalzahlen vor den Bruchzahlen. Das thun überhaupt die meisten, wenn nicht alle österreichischen Rechenmethodiker. So schreibt z. B. Professor Eichler in Wien im „Pädagogischen Jahresbericht" gelegentlich einer Beurteilung des Rätherschen Buches: „Auf die Frage, was ein Dezimalbruch sei, und ob das Rechnen mit denselben vor oder nach dem Rechnen mit gemeinen Brüchen zu lehren ist? haben wir die Antwort: Ein Dezimalbruch ist ein Systembruch, welcher an Pfennigen und Millimetern ein sehr vorteilhaftes Anschauungsmittel findet. Wogegen ein Anschauungsmittel für Drittel, Sechstel, Siebentel sich thatsächlich nicht findet." Und weiter unten bei Besprechung des Mittenzweyschen Buches: „Wir stimmen dem Verfasser bei, daß jene Art von Brüchen zuerst zu lehren sei, welche dem Verständnisse des Schülers näher liegen, wir meinen aber, daß dies die Dezimalbrüche seien, und zwar in der Form der hundert Pfennige einer Mark, denen alsbald tausend Millimeter eines Meters folgen. Außerdem spricht zu Gunsten der Dezimalbrüche, daß sich das Rechnen mit denselben fast ohne Hinzuthun neuer Regeln an das Rechnen mit ganzen Zahlen anschließt, während doch dem Rechnen mit gemeinen Brüchen, wenn es belehrenden Inhalt gewinnen soll, die Teilbarkeitsregeln und das Auffinden von Maß und Vielfachen vorausgehen müssen." [43])

Auch der bayerische Schulmann Sterner, Verfasser der reichhaltigen „Geschichte der Rechenkunst", machte die zweite Auffassung zu der seinigen und schrieb danach ein „Rechenbuch für Landschulen". Im „Programm" zu diesem heißt es z. B.: „Das Rechnen mit Dezimalen geht in der Behandlung dem Rechnen mit gemeinen Brüchen vor, denn es unterscheidet sich unwesentlich vom Rechnen mit ganzen Zahlen. Es ist in der Hauptsache nur eine verkürzte Darstellung des Rechnens mit dezimalen Sorten, bildet daher folgerichtig den Übergang vom Rechnen mit diesen zum Rechnen mit Bruchteilen ... Wenn dagegen geltend gemacht wird, daß die Kenntnis der Halben, Viertel, Fünftel dem Rechnen mit Dezimalbrüchen vorausgehen müsse, so ist das ein Irrtum. Das

41) Fickenwirth a. a. O. S. 41.
42) Hofer a. a. O. S. 78.
43) Eichler a. a. O. S. 141 f.

Halbe kennt das Kind. Ob es von da auf das Viertel oder Zehntel geleitet wird, ist für dasselbe ganz gleichgiltig, nicht zu gedenken des Umstandes, daß dem Lehrer im Meterstabe, in den Münzen für die dezimale Teilung Hilfsmittel zur Verfügung stehen, die in gleicher Vortrefflichkeit für die alten Brüche sich schwer finden lassen ... Der einzige kritische Fall bei der Behandlung der Dezimalbrüche ist (scheinbar) die Multiplikation eines Dezimalbruches mit einem Dezimalbruche. Jede Schwierigkeit in der Behandlung dieses Falles hebt sich aber, wenn man das Vorurteil aufgiebt, daß die Form $a \cdot \frac{1}{10}$, speziell $60 \cdot \frac{1}{10}$ eine Multiplikation sei. Es liegt hier eine Division vor, welche lediglich die äußere Form einer Multiplikation hat; in der That soll der 10. Teil von 60 genommen werden." [44])

Als Anhänger der zweiten Auffassung erweisen sich durch ihre Arbeiten ferner: Knoche, Backhaus, Heinze und Hübner, Heller, Terlinden, Kauer und Sulzbacher, Rocke u. a. Doch tritt die zweite Auffassung da und dort mit der ersten vermischt auf, wie wir weiter unten noch zu bemerken haben werden.

Soviel über die Ansichten der heutigen Rechenmethodiker. Es hätte nun eigentlich eine Vergleichung derselben zu folgen. Wir überlassen diese aber füglich dem Leser selbst und gehen gleich zur Darlegung unseres eigenen Standpunktes über.

Unsere Auffassung ist die zweite: Nicht als eine besondere Art von Bruchzahlen nehmen wir die Dezimalzahlen, sondern als die Weiterführung der dekadischen Zahlreihe abwärts über die Eins hinaus. In diesem Sinne ist namentlich auch unser jetzt in drei verschiedenen Ausgaben vorliegendes Rechenbuch bearbeitet worden. [45])

Wenn aus dem Begleitworte zur ersten Auflage dieses „Rechenbuches" hervorgeht, daß dasselbe eine „neue Bearbeitung" der Ruhsamschen „Rechenschule" ist, so kann dazu noch bemerkt werden, daß an der von der „Rechenschule" eingehaltenen Stellung der Dezimalzahlen (das ist der Name, der in der „Rechenschule" schon gebraucht wird) keine Veränderung vorzunehmen war. Es ist dieser Umstand insofern von Bedeutung, als er beweist, daß Ruhsam einer der ersten derjenigen Rechenmethodiker war, welche der „zweiten Auffassung" den Vorzug gaben. Zugleich ist damit der Punkt bezeichnet, welcher der

---

44) Sterner a. a. O. S. 17.

45) Hartmann-Ruhsam, Rechenbuch für Stadt- und Landschulen. Leipzig u. Frankfurt a. M. Kesselringsche Hofbuchhandlung (E. v. Mayer) = Verlag. = Davon: 1) Ausgabe A in 6 Heften. (Erste Ausgabe des Rechenbuches, welche besonders sächsische und mitteldeutsche Verhältnisse berücksichtigt und für mehrklassige Schulen bestimmt ist.) 2) Ausgabe B in 4 Heften. (Für 1—4 klassige Schulen bestimmt.) 3) Ausgabe für das Königreich Preußen in 6 Heften. (Berücksichtigt in den angewandten Aufgaben unter den deutschen besonders preußische Verhältnisse.)

Ruhsamschen „Rechenschule“ andern Rechenwerken gegenüber eine gewisse Originalität hinsichtlich der Auffassung des Gegenstandes, der Stoffverteilung und Stoffbehandlung verlieh. Ja, wir könnten verschiedene Rechenwerke aufführen, denen nachweisbar die Ruhsamsche „Rechenschule“ als „Leitfaden“ diente, und die nachher durch die Gunst der Verhältnisse ein ziemlich großes Verbreitungsgebiet erlangten. Doch dieses nur nebenbei. Das, worauf es uns hier ankommt, ist die Thatsache, daß die neue Bearbeitung an der „zweiten Auffassung“ der Dezimalzahl, welche sich in der alten Bearbeitung schon vorfindet, entschieden festhält. Deshalb heißt es auch im Begleitworte zum ersten Hefte der ersten Auflage: „Besondere Aufmerksamkeit haben wir der Einführung der Dezimalbrüche, richtiger Dezimalzahlen, gewidmet. Das ist auch ein Punkt, in dem nach unserer Ansicht viel gefehlt wurde und noch gefehlt wird. Es kommt eben alles darauf an, wo und wie diese Einführung geschieht. In manchen neuern Rechenwerken wimmelt es gleich von vorn herein so sehr von ‚Dezimalbrüchen‘, daß man annehmen möchte, es sei der Grundsatz maßgebend gewesen: Viel hilft viel! In einigen Rechenwerken begegnen wir der Auffassung, die Zehntel müßten im Zahlraume 1 bis 10, die Hundertstel im Zahlraume 1 bis 100 u. s. w. zur ersten Behandlung gelangen. Wir konnten uns nicht entschließen, denselben Weg zu betreten. Man frage nur einfach, ob die „Parallelstellung“ des (einfachen) Zehners und der (aller) Zehntel im Zahlraume 1 bis 10, die „Parallelstellung“ des (einfachen) Hunderters und der (aller) Hundertstel im Zahlraume 1 bis 100 u. s. w. richtig ist. Wir antworten entschieden: Nein! Denn obwohl der Zehner das Zehnfache, das Zehntel der zehnte Teil des Einers ist, so sind doch zwei Zehntel das Zweifache von einem Zehntel und daher dem Zweifachen von einem Zehner, also zwei Zehnern, parallel zu stellen u. s. w. Sonach kann nur von „Parallelstellung“ der Zehner (10, 20, 30 ꝛc.) und der Zehntel (0,1; 0,2; 0,3 ꝛc.) die Rede sein, d. h. die Zehntel dürfen erst nach oder bei Behandlung des Zahlraumes 1 bis 100 eingeführt werden. Auf ähnliche Weise findet man, daß die Hundertstel (0,01; 0,02; 0,03 ꝛc.), welche den Hunderten (100, 200, 300 ꝛc.) parallel zu stellen sind, erst nach oder bei Behandlung des Zahlraumes 1 bis 1000 auftreten dürfen u. s. w. Soviel über das Wo? — das Wie? beantwortet am besten unser Buch selbst.“ [46])

Dieser Erklärung gemäß giebt es auf der „Ersten Stufe“ des Rechenbuches, welche die Zahlreihe 1 bis 10 behandelt, überhaupt keine Zahlen in dezimaler Schreibweise. Es bringen aber auch die „Zweite Stufe“ und die „Dritte Stufe“, welche sich beide mit der Zahlreihe 1 bis 100 zu beschäftigen haben, noch keine solchen, da es nach der obigen Erklärung doch nur Zehntel sein könnten. Erst auf der „Vierten Stufe“, welcher die Behandlung der Zahlreihe 1 bis 1000 zugewiesen

46) Rechenbuch a. a. O. Heft I, S. 3 des Umschlags.

ist, treten Dezimalzahlen auf, und zwar im engsten Anschlusse an die deutschen Münzen, Maße und Gewichte. Zuerst lernt der Schüler die dezimale Schreibweise für Mark und Zehnpfenniger kennen, also z. B. 4,60 ℳ für 4 Mark und 6 Zehnpfenniger, sodann für Meter und (Zehner-)Centimeter, also z. B. 3,60 m für 3 m und 60 cm, endlich für Hektoliter und (Zehner-)Liter, wie z. B. 6,70 hl für 6 hl und 70 l. Später treten folgende Formen auf: 12,48 m; 36,48 ℳ; 34,26 hl; 25,03 m; 95,06 ℳ; 32,09 hl. Sämtliche Formen werden als „kurze Schreibweise“ für zweifach benannte (zweisortige) Zahlen eingeführt, sodaß überall eine anschauliche Grundlage, auf die man nötigenfalls wieder zurückgreifen kann, vorhanden ist. Man liest daher: 12 m 48 cm, 36 ℳ 48 ₰ ꝛc. Es werden aber auch Aufgaben mit Zahlen in dezimaler Schreibweise gerechnet, nämlich: Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Dezimalzahlen von gleicher Stellenzahl, außerdem Multiplikations- und Divisionsaufgaben, bei denen Multiplikator und Divisor ganze Zahlen sind. Alle Dezimalzahlen treten als benannte Zahlen auf, und nirgends kommen mehr als zwei Dezimalstellen vor. Auf der „Fünften Stufe“ wird die unendliche Zahlreihe behandelt. Hier findet im Anschlusse an Kilogramm und Gramm die Einführung der dritten Dezimalstelle statt, es wird z. B. geschrieben 8,365 kg (gelesen 8 kg 365 g). Andere Formen sind: 3,748 t (3 Tonnen 748 Kilogramm), 4,534 km (4 km 534 m) und 9,753 m (9 m 753 mm). Nach Einführung der Flächenmaße treten auf: 3,56 qkm (3 qkm 56 ha); 8,64 ha (8 ha 64 a); 9,26 a (9 a 26 qm); 6,5043 qm (6 qm 5043 qcm); 7,35 qcm (7 qcm 35 qmm). Hier findet also die Einführung der vierten Dezimalstelle statt. Außerdem kommen noch vor: 0,56 ℳ; 0,09 ℳ; 0,86 m; 0,84 hl u. dgl. m. Alle diese Dezimalzahlen werden in zahlreichen Aufgaben, eingekleideten und nichteingekleideten, verwendet. Die Form der Aufgaben wird aber auch hier wieder wesentlich durch den Umstand beeinflußt, daß nur *benannte* Dezimalzahlen auftreten.

So vorbereitet, gelangt der Schüler zur „Sechsten Stufe“, auf welcher die Dezimalzahlen im Zusammenhange behandelt werden. Der Lehrgang ist folgender: *Erste Abteilung: Zehntel* (z), *Hundertstel* (h) und *Tausendstel* (t). A. Unsere dezimalen Münzen, Maße und Gewichte. B. Vorübungen mit ganzen Zahlen. C. Entstehung der Dezimalzahlen. Bedeutung und Schreibweise derselben. Leseübungen. Umformungen.[47]) *Zweite Abteilung: Zehntausendstel* (zt), *Hunderttausendstel* (ht) und *Millionstel* (mll). Am Schlusse ergiebt sich folgende, die Auffassung der Dezimalzahlen kennzeichnende Übersichtstabelle:

47) *Hartmann-Ruhsam* a. a. O. 5. Heft, S. 8 f.

1 =	10											
.	1 =	10										
.	.	1 =	10									
.	.	.	1 =	10								
.	.	.	.	1 =	10							
.	.	.	.	.	1 =	10			(Dezimalzahlen.)			
Mll	Ht	Zt	T	H	Z	E	z	h	t	zt	ht	mll
		(Ganze Zahlen.)				1	= 10	.	.	.	.	.
							1 =	10	.	.	.	.
								1 =	10	.	.	.
									1 =	10	.	.
										1 =	10	.
											1 =	10

Weiterhin folgen: III. Addition und Subtraktion mit Dezimalzahlen. A. Warenverkauf und Warenversand. B. Rechenübungen. a. Addition. b. Subtraktion. c. Addition und Subtraktion in Verbindung. IV. Multiplikation mit Dezimalzahlen. A. Unsere Körpermaße. B. Rechenübungen. a. Erster Fall: Dezimalzahl mal ganze Zahl. b. Zweiter Fall: Ganze Zahl mal Dezimalzahl. c. Dritter Fall: Dezimalzahl mal Dezimalzahl. V. Division. A. Unsere Körpermaße. B. Rechenübungen. a. Erster Fall: Ganze Zahl durch ganze Zahl. b. Zweiter Fall: Dezimalzahl durch ganze Zahl. c. Dritter Fall: Ganze Zahl durch Dezimalzahl. d. Vierter Fall: Dezimalzahl durch Dezimalzahl. VI. Verbindung von Multiplikation und Division. Hiernach besteht der im „Rechenbuche" befolgte Gang also darin, daß die Dezimalzahlen gleichzeitig und in Verbindung mit den dezimalen mehrfachbenannten Zahlen — im Anschlusse an die deutschen Münzen, dezimalen Maße und Gewichte — eingeführt werden, daß sie weiterhin (doch nur als benannte Zahlen) in den vier Grundrechnungsarten auftreten und dann erst eine eingehende Behandlung im Zusammenhange (als benannte und unbenannte Zahlen) erfahren.

Dieser Gang darf jedenfalls als ein naturgemäßer bezeichnet werden, denn er entspricht sowohl dem Objekte, als auch dem Subjekte. Dem Objekte: Dieses, die Dezimalzahl, ist thatsächlich durch die dezimalen Münzen, Maße und Gewichte in die Volksschule gelangt, hat durch dieselben einen wertvollen Inhalt erhalten und findet umgekehrt auf sie seine wichtigste Anwendung. Dem Subjekte: Die dezimalen Münzen, Maße und Gewichte mit ihren Einteilungen erweisen sich als ein vorzügliches Anschauungsmittel bei der Einführung der Dezimalzahlen, so zwar, daß die letztern für das Kind einen ganz ausgezeichneten sinnlichen Hintergrund erhalten, mithin keine leeren Formen bleiben. Da die Münzen ꝛc. überdies tagtäglich an das Kind herantreten und dieses hierdurch auf ihre große Bedeutung fortwährend hingewiesen wird, so kann auch das Interesse für dieselben nicht fehlen. Dieses Interesse aber, „der mächtigste Unterrichtshebel", überträgt sich (bei entsprechender Behandlung des Gegenstandes) auf die Dezimalzahlen und die Rechnung mit denselben selbst.

Nun könnte bei einer nur flüchtigen Durchsicht der drei ersten Stufen unseres „Rechenbuchs“ allerdings noch eine falsche Meinung aufkommen. Weil nämlich auf der „Dritten Stufe“ der Einführung der Dezimalzahlen diejenige der Bruchzahlen vorausgeht, könnte es scheinen, als ob die Rechnung mit Dezimalzahlen thatsächlich auch im „Rechenbuche“ derjenigen mit Bruchzahlen nachfolge, sich also auf diese stütze. Diese Meinung wäre aber nichts destoweniger eine falsche. Denn wenn auch auf der „Dritten Stufe“ Bruchzahlen vorkommen, so bezieht sich doch keine einzige derselben auf die benannten dezimalen Zahlen. Sie alle haben vielmehr als ihr besonderes Gebiet die benannten nichtdezimalen Zahlen angewiesen erhalten. Dasselbe ist der Fall auf den beiden nachfolgenden Stufen. Und dann folgt doch die zusammenhängende Behandlung der Bruchzahlen ihrem ganzen Umfange nach derjenigen der Dezimalzahlen und erst viel später, auf der „Achten Stufe“, wird der Beziehungen zwischen Bruch- und Dezimalzahlen gedacht.

Mit diesen Darlegungen, welche im wesentlichen auch nur Referate sind, können wir uns hier aber nicht begnügen. Ein Punkt vor allem bedarf noch der Berücksichtigung. Es giebt nämlich eine Klippe, an welcher das Rechnen mit Dezimalzahlen in vielen von der „zweiten Auffassung“ ausgehenden Rechenwerken thatsächlich scheiterte. Diese Klippe befindet sich in der Multiplikation und zwar an der Stelle, wo der Multiplikator als Dezimalzahl auftritt. Sie ist nicht selten die Ursache gewesen, daß nach der „zweiten Auffassung“ die „erste Auffassung“ wieder aufgenommen wurde. Denn etwas anderes ist es doch nicht, wenn Multiplikation und Division da, wo im Multiplikator, beziehentlich Divisor Dezimalzahlen an die Reihe kommen müßten, plötzlich abbrechen, um erst nach Durchnahme der Multiplikation und Division mit Bruchzahlen wieder aufzutreten.

Da auch anerkannt tüchtige Rechenmethodiker sich dieser Inkonsequenz schuldig machen, so kann es kaum Wunder nehmen, wenn die Ansicht, an jener Klippe müsse die „zweite Auffassung“ stets aufgegeben werden, eine sehr verbreitete ist. Eine weitere Folge davon ist, daß es viele Rechenlehrer für zweckmäßiger erachten, gleich von vornherein an der „ersten Auffassung“ festzuhalten. Und wer möchte ihnen dieses schließlich verdenken? Wenn irgendwo, so empfiehlt sich im Rechenunterrichte eine saubere Bearbeitung des Neuen und ein strenges Festhalten an dem einmal Erworbenen, um Klarheit und Deutlichkeit im Wissen zu erzeugen und die oft mühsam erlangte Sicherheit und Fertigkeit im Können festzuhalten.

Deshalb behaupten wir schließlich: Die ganze, auf die Stellung der Rechnung mit Dezimalzahlen bezügliche Frage spitzt sich auf den einen Fall, Multiplikation mit einer Dezimalzahl, zu. Ist derselbe nicht anders als mit Hilfe der Multiplikation mit Bruchzahlen zu erledigen, so fällt die Berechtigung, die Rechnung mit Dezimalzahlen auf die „zweite Auffassung“ zu gründen. Nur wenn er sich rein aus dem Begriffe der Dezimalzahl in unserm Sinne entwickeln läßt, ist diese

Berechtigung erwiesen. Sehen wir also zu, wie es um den Nachweis einer solchen Entwickelung bestellt ist.

Nach der „zweiten Auffassung“ ist die Reihe der dezimalen Zahlen eine Weiterführung der Reihe der dekadischen (ganzen) Zahlen abwärts über die Eins hinaus. Es wird also die dezimale Zahlreihe von vorn herein auf die dekadische bezogen. Als Beziehungspunkt beider erscheint die Eins. Aus der Eins heraus wachsen beide Reihen unter Hinzunahme des Zehnergesetzes. Die Zehn ist die Grundzahl für beide Reihen. Auf sie gründen sich insbesondere die Parallelstufen beider Reihen: Zehner und Zehntel, Hunderter und Hundertstel 2c. Zwischen den beiderlei Stufen besteht aber ein Gegensatz: Die erste Stufe der dekadischen Zahlen ist das 10fache der Eins, die erste Stufe der dezimalen Zahlen der 10. Teil derselben; die zweite Stufe der dekadischen Zahlen ist das 100fache der Eins oder das 10fache der ersten Stufe, die zweite Stufe der dezimalen Zahlen ist der 100. Teil der Eins oder der 10. Teil der ersten Stufe 2c.

Wie sich nun die Zahlen beider Reihen zu einander verhalten, so auch die Operationen mit denselben. Hier handelt es sich nur um einen Fall der Multiplikation: Multiplikation mit einer dezimalen Zahl. Derselbe erscheint als Gegenstück des Falles: Multiplikation mit einer dekadischen Zahl. Das Gemeinsame beider Fälle ist die Beziehung zur Grundform aller Multiplikationen, zur Multiplikation mit Einern. Das Unterscheidende ergiebt sich aus dem vorerwähnten Gegensatze. Es sind also von der Grundform der Multiplikation (Multiplikation mit Einern) abzuleiten: Multiplikationen mit den Zahlen der ersten Stufe der dekadischen Reihe (10, 20, 30 ...) und der dezimalen Reihe (0,1; 0,2; 0,3 ...); Multiplikationen mit den Zahlen der zweiten Stufe der dekadischen Reihe (100, 200, 300 . . .) und der dezimalen Reihe (0,01; 0,02; 0,03 . . .) u. s. f. Da ergiebt sich aber einfach und folgerichtig: Mit 10, 20, 30 ... wird multipliziert, indem man das 1, 2, 3 . . . fache 10 mal setzt; mit 0,1; 0,2; 0,3 . . . wird multipliziert, indem man vom 1, 2, 3 . . . fachen den 10. Teil setzt; — mit 100, 200, 300 . . . wird multipliziert, indem man das 1, 2, 3 . . . fache 100mal setzt; mit 0,01; 0,02; 0,03 . . . wird multipliziert, indem man vom 1, 2, 3 . . . fachen den 100. Teil setzt u. s. f.

So läßt sich also rein aus dem Begriffe der Dezimalzahl die Multiplikation mit einer Dezimalzahl ableiten. Dieselbe schließt sich eng an die Multiplikation mit ganzen Zahlen an. Beide haben ein Gemeinsames: die Multiplikation mit Einern. Dazu kommt ein Gegensätzliches: Die Erhebung auf die jedesmalige Stufe. Diese wird bei den dekadischen Zahlen durch Multiplikation mit 10, 100, 1000 . . ., bei den dezimalen Zahlen durch Division durch 10, 100, 1000 . . . bewirkt. Durch Erledigung dieses kritischen Falles werden alle Einwände, welche gegen das Rechnen mit Dezimalzahlen auf Grund der „zweiten Auffassung“ bisher vorgebracht worden sind und weiterhin vorgebracht werden könnten, hinfällig. Denn es ist damit der Beweis geliefert, daß es auch in dem hier schwierigsten Falle eine Art giebt, mit Dezimalzahlen zu rechnen, welche sehr leicht und faßlich ist. Indem dieses aber für die Einfachheit und Naturgemäßheit der von uns vertretenen Auffassung überhaupt spricht, müssen alle gegen die „vorausgehende“ Behandlung der Dezimalzahlen bislang erhobenen Bedenken hinfällig werden.

„Von einem guten Unterrichtsgange fordert man ein lückenloses Fortschreiten. Das Nachfolgende muß sich dem Vorangehenden anschließen, darin, womöglich, seine Vorbereitung finden. Nun aber schließt sich das Rechnen mit Dezimalen ganz unmittelbar an das Rechnen mit ganzen Zahlen an. Beides ist im Wesen ganz und gar identisch. Wer mit ganzen Zahlen rechnen kann, der kann auch mit Dezimalen rechnen, wenn er die Dezimalen als eine Fortsetzung des Zahlsystems nach rechts erkannt und aufgefaßt hat. Schiebe ich das Rechnen mit gemeinen Brüchen dazwischen, so schiebe ich zwischen nahe Verwandtes etwas ganz Fremdartiges, und die klare Auffassung des Wesens der Dezimalen wird durch das Vorausschicken der gemeinen Brüche nicht nur erleichtert, sondern im Gegenteil gar leicht getrübt.“ [48]) So steht in der vierten Auflage eines Rechenwerkes, dessen dritte Auflage noch an der — „ersten Auffassung“ festhielt. So haben während der letzten Jahre viele Rechenmethodiker die „erste Auffassung“ aufgegeben. Es steht zu hoffen, daß die noch übrigen früher oder später folgen.

Die Bevorzugung, welche der „zweiten Auffassung“ hier zu teil wird, kann und soll indessen nicht eine Verurteilung derjenigen Rechenwerke, welche an der „ersten Auffassung“ festhalten, welche also nicht mit Dezimalzahlen, sondern mit Dezimalbrüchen rechnen, unter allen Umständen sein. Denn sind dieselben übrigens gut angelegt, so können auch sie zum Ziele führen. Nur für naturgemäßer — und zwar in Rücksicht auf das Objekt und das Subjekt — halten wir unsere auf der „zweiten Auffassung“ beruhende Stoffanordnung und Stoffbehandlung. Und in dieser unserer Auffassung hat uns nicht zum wenigsten ein Wort des Altmeisters Hentschel bestärkt, welches — gegen die Behandlung der „Dezimalbrüche“ vor den „gemeinen Brüchen“ gerichtet ist. Hentschel sagt: „Mit welcher Bruchrechnung soll aber begonnen werden? Mancher redet der Behandlung der Dezimalbruchrechnung vor der gemeinen Bruchrechnung das Wort und thut das gewiß nicht aus dem Grunde, um es anders zu machen als viele erfahrene Rechenpraktiker. — Es führen ja viele Wege nach Rom, und man kann auch hier in verschiedener Weise zum Ziele gelangen. Genanntes Verfahren ist, als konsequenter Ausbau des Zehnersystems, theoretisch auch berechtigt, und deshalb für das Gymnasium vielleicht nicht ungeeignet. Aber besitzt dasselbe auch eine praktische, für die Volksschule geltend zu machende Berechtigung? — Der Elementarunterricht muß bei den Anschauungen beginnen, welche das Kind aus dem Leben mitbringt, muß die Wahrnehmungen verwerten, welche sich für den Schüler täglich im Kreise seiner Umgebung erneuern. Zu diesen Anschauungen und immerwiederkehrenden Wahrnehmungen gehört aber

48) Kentenich und Frohn a. a. O. S. 132.

viel weniger die Teilung eines Ganzen zunächst durch 10, dann durch 100, 1000 u. s. w., als die Zerlegung desselben in Hälften, Drittel, Viertel, Fünftel u. s. w., etwa bis zu den Zwölfteln oder Sechzehnteln herunter. Ein Apfel wird allermeist in 2, 4 Stücke zerschnitten, der Bogen Papier in 2, 4, 8 Blätter geteilt, die Uhr schlägt Viertel, um 10 Uhr ist in der Schule die Freiviertelstunde; aus einem Kuchen, der für 3, 5, 9, 10 Kinder bestimmt ist, schneidet man Drittel, Fünftel, Neuntel, Zehntel; der Umkreis des Zifferblattes an der Uhr ist in Zwölftel eingeteilt; ein Tag ist das Siebentel der Woche u. s. w. Wer wollte in Abrede stellen, daß hierin die ersten Elemente einer volkstümlichen Bruchlehre liegen, daß also die eigentliche Bruchrechnung ihren Anfang bei den gemeinen, nicht bei den Dezimalbrüchen zu nehmen hat? — Diese sind vielfach Sache der Reflexion, jene gehören vorwaltend der unmittelbaren Wahrnehmung an. Ein Quartblatt wird sofort vom Kinde als $\frac{1}{4}$ Bogen, nicht aber als 0,25 Bogen erkannt. Hat ein Fenster 6 gleiche Scheiben, so ist die einzelne eben $\frac{1}{6}$ des Fensters, — das sieht man ja, sagt vielleicht ein frischer, lebendiger Knabe; sieht er die Scheibe auch als 0,1666 . . . des Ganzen?“ 49)

Nein! lautet unsere Antwort und — Hentschel hat von Anfang bis zu Ende recht! müssen wir bekennen. Aber eben diese unsere Zustimmung ist es auch, die uns im Festhalten an der „zweiten Auffassung“ der Dezimalzahl bestärkt. Hentschel hat entschieden recht, wenn er behauptet, daß die Zerlegung in Hälften, Viertel, Fünftel ꝛc. für das Kind anschaulicher sei als die Teilung eines Ganzen zunächst durch 10, dann durch 100, 1000 u. s. w. Er hat auch entschieden recht, wenn er deshalb in jenen Zerlegungen „die ersten Elemente einer volkstümlichen Bruchlehre“ erkennt und nicht in diesen Teilungen. Aber spricht das etwa gegen die Berechtigung der „zweiten Auffassung“? Keineswegs! Hentschel behauptet doch nur, daß die „eigentliche Bruchrechnung“ ihren Anfang bei den „gemeinen“ und nicht bei den „Dezimalbrüchen“ nehmen müsse. Ganz derselben Ansicht sind wir auch. Nur gehen wir noch einen Schritt weiter als Hentschel, ziehen die letzten Konsequenzen seines Verfahrens und — beseitigen die Rechnung mit Dezimalbrüchen überhaupt, indem wir diejenige mit Dezimalzahlen an ihre Stelle setzen. Letztere verweisen wir sodann dahin, wohin sie naturgemäß gehört, zwischen die Rechnung mit ganzen Zahlen und Bruchzahlen. Als einführendes Anschauungsmittel aber benutzen wir das in diesem Falle überhaupt beste: diejenigen Größen, um derenwillen in erster Linie die Rechnung mit Dezimalzahlen in der Volksschule zu behandeln ist. So liegt denn hier thatsächlich der ganze Unterschied in den Voraussetzungen, und Hentschels Schlußfrage selbst dürfte am besten geeignet sein, dieses noch einmal scharf hervortreten zu lassen. Wenn Hentschel fragt: Sieht der Knabe „die Scheibe auch als 0,1666 . . . des Ganzen?“ — um damit die größere Anschaulichkeit des „Sechstels“ gegenüber dem gleichwertigen „Dezimal-

49) Hentschel-Költzsch a. a. O. 2. Teil. S. 2 f.

bruche" nachzuweisen, so will er eben die Zehnteilung auf eine Größe anwenden, an welcher thatsächlich die Sechsteilung schon durchgeführt worden ist. Daraus aber die geringere Anschaulichkeit der Zehntel rc. zu folgern, hat gewiß nicht mehr Berechtigung, als von einem Fenster mit zehn Scheiben auszugehen, die Sechsteilung darauf anzuwenden und dann zu behaupten, dem Zehntel komme größere Anschaulichkeit zu als dem Sechstel.

Aus dem Umstande, daß wir nicht mit Dezimalbrüchen, sondern mit Dezimalzahlen rechnen, letztere aber im engsten Anschlusse an die dezimalen Münzen, Maße und Gewichte behandeln, geht zugleich klar hervor, daß wir die dezimale Teilung nicht auf Größen anwenden wollen, welche derselben widerstreben. Indem wir in unserm „Rechenbuche" aber an diesem Grundsatze festhalten, werden die beiden Gebiete: Rechnung mit Dezimal- und Bruchzahlen so auseinander gehalten, wie es im Interesse der Einfachheit und Bestimmtheit des Unterrichts durchaus wünschenswert ist.

Der Einfachheit: Die Volksschule kann sich bei der ihr zugemessenen knappen Zeit nicht mit langen Erörterungen befassen, welche die Möglichkeit verschiedener Behandlungsweisen zur Voraussetzung haben; sie muß gleich von vorn herein die einzige beste Behandlungsweise scharf im Auge behalten. Der Bestimmtheit: Der Volksschüler muß Klarheit darüber erlangen, bei welchen Größen Dezimalzahlen, bei welchen Bruchzahlen vorteilhafter anzuwenden sind. Beides wird aber leicht dadurch erreicht, daß man alle in Rechnung zu ziehenden Größen in die drei Gruppen scheidet: 1) Größen, bei denen nur mit Dezimalzahlen, 2) Größen, bei denen nur mit Bruchzahlen und 3) Größen bei denen mit Dezimal- oder Bruchzahlen zu rechnen ist. Zu den erstgenannten Größen zählen wir die dezimalen Münzen, Maße und Gewichte und vermeiden es daher grundsätzlich, bei denselben Bruchzahlen sowohl von der Form $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ rc., als auch von der Form $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ rc. auftreten zu lassen. Diese Größen gelten eben als das ausschließliche Gebiet der Dezimalzahl. Zu den an zweiter Stelle erwähnten Größen rechnen wir alle nichtdezimalen Maße, insbesondere Zeit- und Zählmaße. Hier tritt umgekehrt nur die Bruchzahl auf, und es werden daher nicht nur Formen, wie 0,3 Tag, 0,14 Woche, 0,7 Dutzend rc. vermieden, sondern auch solche, wie z. B. 0,5 Tag, 0,75 Dutzend, 0,6 Schock rc. grundsätzlich fern gehalten. Es werden thatsächlich also diese Größen als das Gebiet der Bruchzahl behandelt. Zu den Größen der dritten Art endlich, bei denen Dezimal- oder Bruchzahlen angewandt werden können, zählen wir die mancherlei Prozentzahlen, die Zahlen aus der Naturkunde u. dgl. m.

Um das letzte noch kurz zusammenzufassen: Nicht die Möglichkeit der Anwendung der einzelnen Zahlformen, sondern die Naturgemäßheit dieser Anwendung ist es, durch welche wir uns leiten lassen. Und das ist gewiß für die Volksschule das Richtige. Es wird so möglich, für das ganze Zahlgebiet eine saubere Dreiteilung durchzuführen: a) Ganze Zahlen, b) Dezimalzahlen, c) Bruchzahlen. Außerdem können die

Beziehungen der Zahlen untereinander von vorn herein eine schärfere Sonderung erfahren, also die Beziehungen zwischen Ganzen und Dezimalzahlen, Ganzen und Bruchzahlen, Dezimal- und Bruchzahlen. Daß die beiden erstgenannten Beziehungen auch in der Volksschule eingehendere Berücksichtigung finden müssen, ist selbstverständlich. Nicht so klar scheint die Sache im dritten Falle zu liegen, also für Dezimal- und Bruchzahlen. Aber doch wohl nur so lange, als man nicht bedenkt, daß selbst die gehobene Volksschule selten in die Lage kommt, von diesen Beziehungen Gebrauch zu machen. Unser Rechenbuch übergeht die Beziehungen zwischen Dezimal- und Bruchzahlen daher zwar nicht, berührt dieselben aber nur insoweit (und zwar auf der siebenten und achten Stufe), als sie praktische Verwertung finden.

Noch viel weniger als mit der „ersten Auffassung" können wir uns mit Mischungen der ersten und zweiten Auffassung befreunden, wie sie in einer dritten Gruppe von Rechenwerken zu Tage treten. Es geht das schon aus den obigen Darlegungen hervor, auf welche wir also zurückverweisen dürfen. Anschaulicher würde es allerdings sein, wenn wir an einigen der in solchen Rechenwerken vorkommenden Lehrgänge das Mangelhafte der „gemischten Auffassung" zeigten. Aber das möchte uns schließlich doch zu weit abseits führen. Wir beschränken uns daher auf wenige Bemerkungen und geben dem Lehrer anheim, je nachdem eine Vervollständigung derselben herbeizuführen.

Schon unter den oben aufgeführten Rechenwerken befinden sich mehrere, welche die eine oder andere der beiden Auffassungen nicht rein durchführen. Dazu gehören auch die „Schuljahre" von Rein (Pickel und Scheller). Denn diese lassen die Multiplikation mit einer Dezimalzahl, ebenso die Division durch eine solche nach der Multiplikation und Division mit Bruchzahlen folgen, gründen ihr Verfahren für Dezimalzahlen hier also auf das Verfahren für Bruchzahlen. Ähnliches wäre von den Rechenwerken von Backhaus, Heinze und Hübner, Kauer und Sulzbacher zu sagen.

Veranlassung zu dieser „gemischten Auffassung" mag besonders ein längerer Aufsatz von Oberschulrat Leidenfrost in Weimar gegeben haben, welcher sich in Manns „Deutschen Blättern" befindet.[50]) Wir verkennen durchaus nicht, daß dieser Aufsatz viel Beherzigenswertes enthält. Aber daß er sehr geeignet wäre, Klarheit über „die Stellung und Behandlung der Lehre von den Dezimalbrüchen im Rechenunterrichte" zu bringen, das können wir nicht finden. Schon die große Breite der Ausführungen beeinträchtigt das Verständnis desselben recht erheblich. Mehr noch die Unbestimmtheit und Unentschiedenheit seiner Grundlage sowohl, als seiner Ergebnisse. Denn während es z. B. anfangs heißt: „Unstreitig sind die Dezimalbrüche eine besondere Art von gebrochenen Zahlen", — sollen dieselben weiterhin doch als Dezimalzahlen, nämlich in Verbindung mit den „mehrfach benannten Zahlen", gewonnen und be-

50) Leidenfrost a. a. O. S. 371 ff.

handelt werden. Während dieses aber geschieht, wird die Erklärung der Dezimalzahlen wieder mit Hilfe von Bruchzahlen gegeben, die Bekanntschaft mit letztern also vorausgesetzt. Alsdann erfolgt dieselbe Unterbrechung der Multiplikation und Division, welche wir oben kennzeichneten. Außerdem ist das Nebeneinander der dezimalen und nichtdezimalen Sorten bei Gewinnung der Dezimalzahlen nichts weniger als eine Vereinfachung. Und durch die zahlreichen Gleichungen, welche als Ergebnisse und Durchgangspunkte auftreten, so richtig dieselben an sich sind, wird man auf der Mittelstufe der Volksschule (um diese handelt es sich in diesem Falle) sicher auch keinen „Hund vom Ofen locken".

Wie wenig der Leidenfrostsche Aufsatz geeignet ist, zur Klarheit über „Stellung und Behandlung" der Dezimalzahlen zu führen, hat besonders Lincke in seinem Rechenbuche gezeigt. Es ist, als ob derselbe förmlich darauf ausginge, eine höchst einfache Sache gründlich zu erschweren.[51]) Klarer als Linckes Ausführungen sind diejenigen von Heiland und Muthesius, welche sich ebenfalls an Leidenfrost anlehnen. Da werden z. B. die dezimalen und nichtdezimalen Sorten auseinander gehalten, ein Verfahren, das dem Meister gegenüber sicher einen Fortschritt bedeutet. Im übrigen bewegen sich aber auch diese Ausführungen so sehr in den Leidenfrostschen Bahnen, daß von ihnen dasselbe gilt, was wir von jenen sagen mußten: Eine gewisse Umständlichkeit und Unentschiedenheit beeinträchtigt ihre Wirkung.[52])

Die „gemischte Auffassung" bleibt jedenfalls auf halbem Wege stehen. Sie will das Gute der beiden ersten, reinen Auffassungen sich aneignen. In Wahrheit aber erreicht sie an Einfachheit und Bestimmtheit keine derselben. So wenig ist dieses der Fall, daß jeder Lehrer, der nur die Wahl hätte zwischen der ältern ersten und der gemischten Auffassung, besser thäte, sich für jene zu entscheiden. Sollen wir also an dieser Stelle noch einen Wunsch aussprechen, so ist es der: Möchte es den Verfassern aller für die Volksschule bestimmten Rechenwerke gefallen, die „gemischte Auffassung" zu Gunsten der „zweiten" (neuern) aufzugeben! Möchte darauf durch vereintes Wirken die Behandlung der Dezimalzahlen in der Volksschule immer mehr vervollkommnet werden! Zu thun giebt es auf diesem Gebiete auch dann noch genug, wenn nicht mehr wie jetzt die Bestrebungen nach drei verschiedenen Richtungen auseinander gehen.

§ 11.

Die Unentbehrlichkeit der Bruchzahlen.

Litteratur. Allgemeine Bestimmungen des Königlich Preußischen Ministers ꝛc. betreffend das Volksschul-, Präparanden- und Seminar-Wesen vom 15. Oktober 1872. Hannover 1877. Bartholomäi, F. im Pädagogischen Jahresberichte, 23. Bd. Leipzig 1870. Bartholomäi, F. in den Rheinischen Blättern. 23. Jahrg. Frankfurt a. M. 1870. Bräutigam, H. Methodik ꝛc. Büttner, A.

51) Lincke a. a. O. S. 100. Dazu H. I. S. 49 f.
52) Heiland und Muthesius a. a. O.

Anleitung 2c. Haberl, J. im Pädagogischen Jahresberichte, 30. Bd. Leipzig 1877. Hartmann, B. Die Auswahl des Volksschullehrstoffes. (Sächs. Schulzeitung, Jahrg. 1887, Nrn. 14—18.) Dresden 1887. Hartmann-Ruhsam, Rechenbuch 2c. Kentenich, G. Der Rechenunterricht in der Volksschule in seiner durch die neue Maß- und Gewichtsordnung bedingten Umgestaltung. Köln und Neuß 1869. Kentenich und Frohn, Anleitung zur Erteilung des Rechenunterrichts 2c. Kockel, F. W. Lehrplan für die einfachen Volksschulen des Königreichs Sachsen vom 5. November 1878. 5. Aufl. Dresden 1890. Mauritius, Dezimales Rechnen und metrisches Messen. Paderborn 1869. Meier, E. Lehrplan für den Unterricht im Rechnen. Frankenberg i. S. 1886. Quitzow, Praktisches Rechenbuch für Schulen in systematischer Stufenfolge. Güstrow 1872. Räther, H. Theorie und Praxis des Rechenunterrichts. 2. Teil. Breslau 1891. Rückbeil, Rechenbuch. Sondershausen 1872. Thieme und Schlosser, Rechenübungen. (Ältere Bearbeitung vor 1891 und neue Bearbeitung 1891.) Dresden.

Seitdem die Dezimalzahlen in unsere Volksschulen Einzug gehalten haben, gehen die Ansichten über den praktischen Wert des Rechnens mit Bruchzahlen sehr weit auseinander. Es giebt Rechenmethodiker, welche die „Bruchrechnung“ als einen überwundenen Standpunkt betrachten. Andere wieder wollen keine Schmälerung derselben gestatten. Das Richtige liegt wohl in der Mitte. Hören wir zunächst aber wieder einige der litterarisch thätigen Methodiker.

Mauritius, welcher 1869 eine Schrift über „dezimales Rechnen und metrisches Rechnen“ veröffentlichte, die jedenfalls als eine der bedeutendsten ihrer Art bezeichnet werden darf, war davon überzeugt, daß jeder sehen müsse, daß „die letzte Stunde der Bruchrechnung“ geschlagen habe.[1]) Rückbeil, Herausgeber eines Rechenbuches (Sondershausen 1872), ist der Ansicht, daß der „gemeinen Bruchrechnung“ nun das „bisherige Schicksal der Dezimal-Bruchrechnung“ zu teil werden müsse.[2]) Kentenich meint: „Nach Einführung der neuen Ordnung werden neben den Dezimalbrüchen ganz gewiß nur noch die gemeinen Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ vorkommen. Unbedingt nötig bleibt überhaupt von der gemeinen Bruchrechnung im Umfange der Brüche von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{12}$ nur das Addieren und Subtrahieren gleichnamiger und ungleichnamiger Brüche, das Multiplizieren und Dividieren der Brüche durch ganze Zahlen, das Reduzieren und Resolvieren. Das Multiplizieren und Dividieren der Brüche durch Brüche kann ganz wegfallen.“[3]) In Baden wird in der That durch eine Verordnung des Oberschulrats vom 20. März 1875 das Rechnen mit Bruchzahlen für einfache Volksschulen eingeschränkt auf Halbe, Viertel, Achtel, Drittel, Sechstel, Neuntel, Fünftel, Zehntel und Hundertstel (mündlich) und auf das Anschreiben und Lesen der Bruchzahlen, Erkennen von Zähler und Nenner, Unterscheidung von echten und unechten Bruchzahlen und gemischten Zahlen, Verwandlung der unechten Bruchzahlen in ganze, beziehentlich gemischte Zahlen und umgekehrt, Abkürzen (Heben) der Bruchzahlen (schriftlich). Auch Schuldirektor Meier in Zwickau, Herausgeber eines „Lehrplans für den Rechenunterricht“, will nur noch einigen Bruchzahlen den Eintritt in die

1) Mauritius a. a. O.
2) Rückbeil a. a. O. 3) Kentenich a. a. O.

Volksschule gestatten. Er sagt: „Obwohl bei unsern Münzen, Maßen und Gewichten dezimale Abstufung stattfindet und das Rechnen mit Dezimalbrüchen angezeigt ist, werden die untern und mittlern Schichten des Volkes noch auf viele Jahre hinaus mit gemeinen Brüchen rechnen, unsere Schüler müssen diese Rechnung also (?) erlernen. Vorbemerkung: a) Nur nachstehende Brüche kommen bei den Aufgaben zur Verwendung: $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$, $\overline{10}$, $\overline{12}$, $\overline{20}$, $\overline{100}$. b) Rechnen mit gemeinen Brüchen ist fast nur Kopfrechnen.“ [4])

Dagegen ist Bartholomäi ein ebenso geschickter als eifriger Verteidiger der „Bruchrechnung“, wie aus seinen wiederholt im „Pädagogischen Jahresberichte“ vorkommenden Bemerkungen hervorgeht. Nach ihm dürfte die Bruchrechnung auch in der Volksschule wohl kaum eine Schmälerung erfahren. Schon 1870 schrieb er mit Beziehung auf die obenerwähnte Schrift von Mauritius in den „Rheinischen Blättern“: „Wie schon gesagt, glaubt Mauritius, daß die Bruchrechnung in nächster Zeit zu Grabe getragen werde. Wir sind anderer Meinung; denn das Leben zerbricht die Ganzen nicht nur nach Zehnteln, sondern auch nach allerlei andern Verhältnissen, die Bruchrechnung ist ein vortreffliches Denkobjekt, und die allgemeine Arithmetik kann, ohne sich selbst aufzugeben, die Brüche nicht entbehren. Mauritius gesteht selbst zu, daß die Bruchrechnung eine vortreffliche Übung und Schulung des Verstandes ist, und sie ist es, weil sie nicht mit Zahlen, sondern mit Funktionen rechnet. Genau genommen ist zwar jede Zahl, die mit mehr als einer Ziffer geschrieben wird, eine Funktion, nämlich eine Summe von der allgemeinen Form $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots$, [5]) aber sie wird nicht als Funktion empfunden, sondern als eine einzige Zahl vorgestellt, während der Bruch durch zwei Zahlen, durch seine Zahl (Zähler) und durch das Verhältnis seiner Eins zur Ur-Eins (Nenner) gedacht werden muß. Die Differenz muß zwar auch durch zwei Zahlen gedacht werden, durch die Summe und den einen Summanden; aber da sie immer realisiert, auf eine einzige Zahl zurückgeführt werden kann, so beseitigt das kindliche Vorstellen die Schwierigkeit des Begriffs, indem es ihn selbst beseitigt und für ihn die in dem besondern Falle ihm gleich geltende Zahl setzt. Dieser Übergang ist bei dem Bruche unmöglich, und eben darum ist die Bruchrechnung ein so bedeutendes Mittel zur Entwickelung und Stärkung der Zahlkraft und des arithmetischen Denkens, darum bildet sie psychologisch den Übergang von der speziellen Arithmetik zur allgemeinen, und darum hat sie die Aufgabe, die letztere in der Volksschule zu ersetzen.

Die beiden erstgenannten Gründe sichern der Bruchrechnung das Leben in der Volksschule für alle Zeiten. Das will wohl auch Langenberg andeuten, indem er zwei Aufgaben in französischer Sprache mitteilt, die er dem Rechenbuche von Finance entlehnt hat .... Die

4) Meier a. a. O. S. 77.

5) Für unser Zahlsystem wäre $x = 10$ zu setzen, während $a, b, c, d, e \ldots$ alle Werte von 0 bis 9 annehmen dürften.

kürzere derselben heißt: ‚Combien faudrait-il de mètres de toile à $\frac{12}{15}$ de mètre de large pour doubler 168 mètres $\frac{5}{9}$ de drap à $\frac{21}{25}$ de mètre de large?‘ Die Franzosen haben das metrische Maß und Gewichtssystem lange genug, um sich der gemeinen Brüche zu entwöhnen. Da dies aber nicht geschehen ist, so ist der Erfahrungsbeweis erbracht, daß das metrische Maß- und Gewichtssystem den gemeinen Brüchen nicht so gefährlich ist, als man hier und da wähnen mag.“ [6]).

Sehr eingehend behandelt dieselbe Frage auch Quitzow in seinem Rechenbuche. Da heißt es z. B.: „Man prüfe und überschaue doch einmal das ganze Gebäude des Rechenunterrichts, das fest an- und ineinander gefügt, wie keine andere Disziplin sich dessen rühmen kann, und denke sich aus demselben die Bruchrechnung, das feste Gebälk, auf welchem der Oberbau ruht, und was dem untern mehr Sicherheit und Haltung verleiht, hinweg! Denn führt die Bruchrechnung einerseits zu größerer Klarheit und Gewandtheit in den vier Spezies mit ganzen Zahlen, so bildet sie anderseits die sicherste, ja ich möchte sagen, die einzigst sichere Grundlage, auf welcher fortgebaut werden kann. Man wende hier nicht ein, daß dasselbe vermittelst der Dezimalbrüche erreicht werden soll; die gewöhnlichen Brüche können sie im Rechenunterrichte nicht ersetzen.“ [7]) Und Bartholomäi, um auf diesen noch einmal zurückzukommen, ist der Meinung: „Es steht zunächst fest, daß, wer mit gemeinen Brüchen rechnen kann, kann es auch mit dezimalen, und ebenso, daß, wer nur mit ganzen Zahlen rechnen kann, vor den Operationen mit Dezimalbrüchen ganz ratlos dasteht.“ [8])

Derselben Ansicht muß wohl auch Bartholomäis erster Nachfolger im „Päd. Jahresbericht“, Professor Jos. Haberl in Wien sein. Dieser sagt im 30. Bande im Anschlusse an die Rechenhefte von Gasser: „Infolge der neuen Maßeinteilungen in Deutschland sind manche Schriftsteller sehr geneigt, das Rechnen mit ‚gemeinen Brüchen‘ als kaum mehr nötig zu erklären. Wir sind der Meinung, daß das Rechnen mit gemeinen Brüchen nach wie vor mit gleicher Intensität betrieben werden muß, auch wenn man in der dezimalen Teilung noch viel weiter gehen würde, als es thatsächlich der Fall ist. A. Gasser spricht in seinem Schulrechenbuche gegen eine Vernachlässigung des gemeinen Bruchrechnens mehr energisch als wahr: ‚Es ist schier unbegreiflich, daß immer noch [9]) und auch immer wieder die Frage aufgeworfen wird: Was soll das Rechnen mit gemeinen Brüchen beim Schulunterrichte, da wir ja jetzt die Dezimalbrüche und ein darauf gegründetes Münz-, Maß- und Gewichtssystem haben?‘“ [10])

Es wurde nun oben bereits bemerkt: „Das Richtige liegt wohl in

---

6) Bartholomäi a. a. O. S. 212.

7) Quitzow a. a. O. 2. Teil: Bruchrechnung Jänicke und nach ihm die Herausgeber der „Schuljahre“ schreiben obiges Zitat fälschlich Bartholomäi zu.

8) Bartholomäi a. a. O.

9) Es war im Jahre 1877.

10) A. a. O. S. 197.

der Mitte." Haben wir damit aber unsere Stellung in der vorliegenden Frage andeuten wollen, so möchten wir auch die Gründe, welche für dieselbe bestimmend waren, nicht fehlen lassen. Es sind folgende.

Alle hervorragenderen Erscheinungen auf dem Gebiete des Volksschul-Rechenunterrichts während des letzten Jahrzehnts lassen deutlich erkennen, daß an eine Beseitigung der Bruchzahlen jetzt und später nicht zu denken ist; sie beschränken aber die Behandlung derselben mehr oder weniger. Noch maßgebender als diese Wahrnehmung waren für uns einige aus der Sache selbst und gewissen, mit ihr in enger Verbindung stehenden Verhältnissen sich ergebende Gründe. Nachdem nämlich die mit dem Übergange zu den dezimalen Münzen, Maßen und Gewichten in Verbindung stehenden zeitraubenden und störenden Umrechnungen der alten Maße und Gewichte in neue und umgekehrt glücklich überwunden waren, da klärten sich auch die Ansichten über die Verwertbarkeit der Dezimalzahlen mehr und mehr. Zwar stellte sich ihre Unentbehrlichkeit innerhalb des Gebietes der dezimalen Münzen, Maße und Gewichte zweifellos heraus. Zugleich aber fand man, daß ihre Verwendung außerhalb dieses Gebietes nur eine bedingte sein könne. Und schließlich war es immer so, daß in allen den Fällen, in welchen die Dezimalzahlen sich als unpraktisch erwiesen, die Bruchzahlen einen um so höhern Grad von Brauchbarkeit zeigten. So namentlich bei den nichtdezimalen Maßen, welche neben den dezimalen noch fortbestanden. Es wurde zwar angenommen, daß von denselben im Laufe der Jahre noch mehrere, z. B. die Zählmaße (Schock, Mandeln, Stück, Dutzend, Gros rc.), beseitigt werden würden; vorläufig aber waren sie noch vorhanden, sogar als die volkstümlichsten aller Maße vorhanden. Darin aber wird sich auch in der nächsten Zeit kaum etwas ändern. Ja, was die Zeitmaße, Winkelmaße u. dgl. betrifft, so dürfte wohl schwerlich jemals eine Abänderung nach Potenzen der Zehn erfolgen. Und bewegt sich nicht auch der Zinsfuß des deutschen Geldmarkts, in den Sparkassen und im Privatverkehr mit Vorliebe in einer Reihe gemischter Zahlen, die Halbe, Drittel, Viertel, Fünftel und Achtel enthalten, auf und ab? Wird nicht der Bogen Papier immer in halbe Bogen gebrochen werden, diese in Viertel und weiter in Achtel u. dgl. m.?

Das alles sind Verhältnisse, welche die Berücksichtigung der Bruchzahlen im Volksschulrechenunterrichte fordern. Doch auch die Bruchzahl an sich besitzt nicht wenige Eigenschaften, welche ihr solange das Heimatrecht in der deutschen Volksschule sichern werden, als diese es als ihre Pflicht betrachtet, über den materialen Bildungszwecken die formalen nicht zu vernachlässigen. Daran, daß die Rechnung mit Bruchzahlen eine „vortreffliche Übung und Schulung des Verstandes", ein „vortreffliches Denkobjekt" ist, hat die stärkere Betonung der Dezimalrechnung nichts geändert. Letztere ist ihrer ganzen Natur nach auf schriftliche Darstellung angewiesen; die Bruchrechnung hingegen eignet sich in vorzüglicher Weise auch zum sogenannten Kopfrechnen. Auch deshalb kann sie nicht durch jene ersetzt werden.

Kurz und bündig führt Bartholomäi die der Bruchrechnung eigentümlichen Vorzüge darauf zurück, daß dieselbe strenggenommen nicht mit Zahlen, sondern mit Funktionen rechne. Dieses meint auch Quitzow, wenn er schreibt: „Hat man nun den Begriff (des Bruches in anschaulicher Weise) zum Bewußtsein gebracht, so verläßt man bei der Betrachtung der Bestandteile eines Bruches allmählich das konkrete Feld und wendet sich an das abstrakte Denkvermögen der Kinder. Hierbei leisten die verschiedenen Operationen, welche man mit dem Zähler und Nenner vornehmen kann, so vortreffliche Dienste, daß wohl schwerlich auf dem ganzen Gebiete des Unterrichts eine Brücke, die vom Konkreten zum Abstrakten führt, zu finden sein dürfte, welche das Kind mit solcher Sicherheit und Zuversicht betritt. Das Bewußtsein, etwas absolut Richtiges antworten zu können, an welchem selbst der Lehrer nichts mehr verbessern kann, giebt dem Kinde den Mut, auf der betretenen Bahn vorwärts zu schreiten, und dies ist's, was dem Rechenunterrichte überhaupt, speziell aber der Bruchrechnung zur Schärfung des Verstandes und zur Kräftigung des Charakters einen so unschätzbaren Wert verleiht." 11)

Um es schließlich kurz zu sagen: Wir halten dafür, daß das Rechnen mit Bruchzahlen um der materialen und formalen Bildungszwecke der deutschen Volksschule willen ein im Volksschul-Rechenunterrichte unentbehrliches Glied ist und bleiben wird. Aber, fügen wir gleichzeitig hinzu, in dem Umfange, in dem es vor Einführung des Rechnens mit Dezimalzahlen auftrat, kann es weiterhin nicht mehr auftreten. Das meint wohl auch der Herausgeber des Lehrplans für die einfachen Volksschulen des Königreichs Sachsen, wenn er in den erläuternden Anmerkungen sagt: „Die Rechnung mit gemeinen Brüchen läßt sich auf ein bei geschickter Darstellung leicht verständliches Minimum beschränken, dessen gründliche Erfassung allerdings für den spätern Rechenunterricht der Volksschule von großer Wichtigkeit ist. Es sei nur an die schriftliche Lösung der Regeldetriaufgaben nach dem Einheitsschlusse, welche das Verständnis der Bruchform zur Voraussetzung hat, erinnert." 12) Auf falscher Fährte aber befinden sich die, welche die Beschränkung in der Ausscheidung einzelner Fälle, z. B. der Multiplikation einer Bruchzahl mit einer Bruchzahl, der Division durch eine Bruchzahl u. s. w. gefunden zu haben meinen. Auch die ausschließliche oder doch fast ausschließliche Verwendung von Bruchzahlen mit einstelligem Nenner ist nicht so wesentlich, wie manche Rechenmethodiker annehmen, womit indessen durchaus nicht gesagt sein soll, daß wir großen Nennern das Wort reden wollten.

Für das Königreich Preußen schreiben die „Allgemeinen Bestimmungen rc. vom 15. Oktober 1872" vor: „Pensum der Oberstufe sind die Bruchrechnung, welche bereits auf den unteren Stufen in der geeigneten Weise vorbereitet werden muß, und deren Anwendung in den bürgerlichen Rechnungsarten, sowie eingehende Behandlung der Dezimal-

---

11) Quitzow a. a. O.
12) Kockel a. a. O. S. 69 Anm. 104.

brüche."[13]) Da um die „unteren Stufen" die Unter- und Mittelstufe der Volksschule, also die ersten 4 oder 5 Schuljahre sind, so lag es nahe, mit der geforderten Vorbereitung schon im ersten Schuljahre den Anfang zu machen. Deshalb verlegen auch viele der von preußischen Schulmännern herausgegebenen Rechenbücher und Rechenhefte die erste Behandlung der Bruchzahlen in die Zahlreihe 1 bis 10. So z. B. Büttner, Fickenwirth, Knabe und Ostwald, Kölzsch, Schröter. Andere sind der Ansicht, daß man mit der Einführung zu warten habe, bis Multiplikation und Division innerhalb der Reihe 1 bis 100 vorüber seien, warten also bis gegen das Ende des zweiten Schuljahrs. Zu diesen gehören Kaselitz, Steuer, Knoche, Heinze und Hübner u. a.

Bereits auf der untersten Rechenstufe, also innerhalb der Zahlreihe 1 bis 10, führen auch die beiden Anhänger Tillichs, Bräutigam und Göpfert, die Bruchzahlen ein. Welche Anforderungen ersterer dabei stellt, ersieht man aus folgender Aufgabe: $\frac{2}{3}$ von 9 — $\frac{2}{5}$ von 10 $\times$ 4 — (3 $\times$ 2) + 7 — $\frac{3}{5}$ von 10 : 2.[14]) Auch Lincke, dessen Unterstufe nicht viel mehr als eine Umschreibung der Arbeit Bräutigams ist, gehört dieser Gruppe an. Schneyer dagegen, der vierte Tillichianer, hält die Bruchzahlen den beiden ersten Schuljahren fern.

Eine dritte Gruppe von Rechenmethodikern ist offenbar durch Grubes Beispiel veranlaßt worden, die Bruchzahlen so früh als möglich auftreten zu lassen. So z. B. Berthelt, Wagner, Möbius &c., die Herausgeber der Chemnitzer Rechenhefte u. a. Auch in den Thieme-Schlosserschen Rechenheften hieß es noch bis vor kurzem: „Um das Rechnen mit gemeinen Brüchen von vorn herein anzubahnen, sind die Aufgaben bereits in diesem ersten Hefte in Bruchform gegeben."[15]) In der „neuen Bearbeitung" erst ist mit dieser Auffassung vollständig gebrochen worden. Die Verfasser haben sich auch in diesem Punkte uns angeschlossen.

Sehr verschieden ist die Art der Einführung der Bruchzahlen. Manche Methodiker operieren ohne weiteres mit der unbenannten Zahl, andere halten es mit der Linienteilung, eine dritte Gruppe zieht die Teilung von Äpfeln, Kuchen u. s. w. vor, eine vierte Gruppe fordert Bruch-Rechenmaschinen, eine fünfte Gruppe hält Mark, Meter und Hektoliter für geeignet, die Halben, Viertel &c. zu veranschaulichen, eine sechste Gruppe erklärt dieses als unzulässig und zieht die nichtdezimalen Zähl- und Zeitmaße heran.

Von den neuern Methodikern beschäftigen sich z. B. Büttner, Kentenich, Räther u. a. mit der „ersten Einführung" der Brüche. Bei Büttner heißt es: „Wie führen wir den Schüler zu der nötigen Einsicht in die Bildung der Bruchzahlen? a. Die ersten Anschauungen in der Bruchbildung geben wir an einem Bogen Papier, an Strichen —

13) Allgemeine Bestimmungen a. a. O. § 28. S. 17.
14) Bräutigam a. a. O. S. 31.
15) Thieme-Schlosser a. a. O.

kurz an Größen, die vor den Augen der Kinder möglichst genau in gleiche Teile geteilt werden. b. Überaus wichtig ist es für die Einsicht in die Bruchbildung, die kleineren Münzen, Maße und Gewichte als Teile größerer Benennungen auffassen zu lehren. c. Die sprachliche Gewandtheit im Bruchrechnen wie die Einsicht in die Bedeutung der Bruchvorstellungen, welche Grundlage jener Gewandtheit ist, wird mächtig gefördert, wenn man bei gewissen Operationen mit ganzen Zahlen statt der gewöhnlichen Ausdrucksweise eine solche wählt, welche die Kinder zum Bilden von Bruchvorstellungen veranlaßt. Anstatt: der 5. Teil von 20 ist 4, läßt man z. B. bei der Division sagen: $\frac{1}{5}$ von 20 ist 4 ... d. Ganz vortrefflich ist die Anwendung des Maßstabes fürs Bruchrechnen. Es ist einzig, wie durch Zeichnen und Messen von Linien mit bestimmter Länge die Kinder in der anregendsten Weise gefördert werden, klare Bruchvorstellungen zu gewinnen, dieselben im Verhältnis zu einander und zum Ganzen aufzufassen, wie sie im Rechnen mit Brüchen in allen 4 Spezies eine große Fertigkeit ohne alles Regelwerk erhalten." [16])

Kentenich und Frohn, welche die Bruchzahlen erst gegen das Ende der Behandlung der Reihe 1 bis 100 einführen, lassen zunächst nur Brucheinheiten (Stammbrüche) auffassen. Sie sagen darüber: „Auf der Unterstufe hat der Schüler beim eigentlichen Teilen die Form des Stammbruches kennen gelernt. $\frac{1}{4}$ von 20, $\frac{1}{6}$ von 36. Er hat gelernt, daß $\frac{1}{6}$ gelesen wird, „der sechste Teil" oder „ein Sechstel". Hier lernt er leichte Aufgaben der Resolution lösen: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ ℳ (hl) = ? ₰ (l); $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ Dutzend (Jahr) = ? Stück (Monat). Verfahren: $\frac{1}{2}$ v. 8 = 4; $\frac{1}{2}$ ℳ oder die Hälfte von 1 ℳ = 50 ₰; $\frac{1}{4}$ von 12 = 3; $\frac{1}{4}$ ℳ oder der vierte Teil von 1 ℳ = 25 ₰. Das Kind lernt also den Stammbruch auffassen als den sovielten Teil einer Größe, als der Nenner angiebt. Von der Entstehung des Bruches, von Zähler und Nenner ist selbstverständlich auf dieser Stufe keine Rede. Von der Berechnung der Werte von Zweigbrüchen ($\frac{3}{4}$ ℳ, $\frac{5}{6}$ Dutzend) sehen wir einstweilen ab".[17])

Bei Räther lesen wir: „Wo ist sie (die Bruchrechnung) zu treiben? Die ‚Allgemeinen Bestimmungen' fordern, daß die Bruchrechnung ‚bereits auf den untern Stufen in geeigneter Weise vorbereitet wird'. Auf den untern Stufen, das heißt auf der Unter- und Mittelstufe; die Unterstufe bearbeitet nach den ‚Allgemeinen Bestimmungen' die Zahlreihe 1 bis 100. Also in diese Zahlreihe müssen Vorbereitungen der Bruchrechnung treffen, in das zweite Schuljahr. Viele Methodiker führen im 1. Schuljahre, in der Zahlreihe 1 bis 10 und 1 bis 20, schon Brüche ein; wir empfehlen indes, die Kinder hier noch mit Brüchen zu verschonen; die Sache kommt im 2. Schuljahre zurecht, und die Kleinen haben mit den ganzen Zahlen vollauf zu thun. In welcher Ausdehnung ist die Vorbereitung der Bruchrechnung zu treiben? Hierüber gehen die Ansichten sehr auseinander. Man halte sich gegenwärtig, daß wir es hier mit einem Nebenzwecke zu

16) Büttner a. a. O. S. 19.
17) Kentenich und Frohn a. a. O. S. 96.

thun haben. Ist es zweifelhaft, ob der Hauptzweck erreicht werden kann, dann sind die Übungen für den Nebenzweck aufs äußerste zu beschränken".[18]) Nach diesem bestimmt **Räther** den Stoff, Halbe, Drittel . . . Zehntel, dazu die Stelle, an welcher er auftreten soll. „Diesen Stoff behandeln wir im Anschluß an die Divisionsreihen des Einmaleins dergestalt, daß bei der Zweierreihe die Halben, bei der Dreierreihe die Drittel, bei der Viererreihe die Viertel ꝛc. auftreten. Zunächst geben wir nur Stammbrüche ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$), bis zur Zehnerreihe und den Zehnteln; erst nach Absolvierung aller Reihen lassen wir, bei der Schlußwiederholung, Zweigbrüche ($\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$) auftreten. Bei ungünstigen Schulverhältnissen schließe man die Zweigbrüche ganz aus." [19])

Die Stellung, welche wir selbst in der vorliegenden Frage einnehmen, ergiebt sich aus unserm „Rechenbuche". Wie bei den Dezimalzahlen, so unterscheiden wir auch bei den Bruchzahlen die **Einführung** von der **zusammenhängenden Behandlung**. Erstere erfolgt in unserm „Rechenbuche" früher als diejenige der Dezimalzahlen. Freilich nicht schon bei Behandlung der Zahlreihe 1 bis 10, wie es anderwärts geschieht. Es heißt im Begleitworte zur ersten Auflage des „Rechenbuches" in dieser Hinsicht: „Auch in Bezug auf die **erste Behandlung der gewöhnlichen oder gemeinen Brüche** haben wir Ansichten, welche von den sonst üblichen mehrfach abweichen. Wir meinen z. B., daß die häufig anzutreffende beliebte Kuchen-, Apfel- u. s. w. Teilerei im Zahlraume 1 bis 10 nur den Schein der Anschaulichkeit für sich hat, daß sie für das spätere Rechnen mit Brüchen nahezu, wenn nicht ganz wertlos ist, daß überhaupt jede ausgedehntere Anwendung der Brüche auf der Unterstufe gegenüber den Vorteilen, die sie bringen soll, ein viel zu großes Zeitopfer beansprucht u. dgl. m."

Und so erscheinen denn in unserm Rechenbuche die Bruchzahlen erst auf der dritten Stufe, nach Erledigung der Multiplikations- und Divisions-Reihen für die Zahlen 2 bis 10, als Ergebnisse von Divisionen und Verbindungen von Multiplikation und Division. Dabei schließen sie sich in ähnlicher Weise an die nichtdezimalen Maße (Zähl- und Zeitmaße) an, wie die Dezimalzahlen an die dezimalen Münzen, Maße und Gewichte. Es kommt z. B. $\frac{1}{2}$ als $\frac{1}{2}$ Schock, $\frac{1}{2}$ Dutzend, $\frac{1}{2}$ Stunde u. s. w., $\frac{1}{3}$ als $\frac{1}{3}$ Schock, $\frac{1}{3}$ Mandel, $\frac{1}{3}$ Tag u. s. w. vor, wobei der Wert der Bruchzahl stets durch die nächstniedern Einheiten anzugeben ist. Weiterhin treten Formen auf, wie diese: $\frac{2}{3}$ Schock, $\frac{3}{4}$ Dutzend, $\frac{2}{5}$ Mandel, $\frac{5}{6}$ Stunde, $\frac{4}{7}$ Woche, $\frac{3}{8}$ Tag u. s. w. Dann erst folgen Aufgaben in unbenannten (reinen) Zahlen, z. B. $\frac{1}{2}$ von 56, $\frac{2}{3}$ von 36, $\frac{3}{4}$ von 64, $\frac{3}{5}$ von 35 u. s. w. Zum Nachdenken regen Aufgabengruppen folgender Art an: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ Schock, Stunde, Minute; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ Schock u. s. w., wobei die Auflösung in niedere Einheiten im ersten Falle die Gleichheit, im zweiten Falle die Abnahme des Wertes der Bruchzahlen anzeigt. Auch

18) Räther a. a. O. S. 98.
19) Ebenda S. 99.

Aufgaben, wie: „Suche die Zahlen auf, von denen man a) Halbe und Drittel, b) Halbe und Viertel u. s. w. berechnen kann, ohne daß ein Rest bleibt; desgleichen die Zahlen, von denen man a) Halbe, Drittel und Viertel; b) Halbe, Drittel und Fünftel u. s. w. berechnen kann“ — sollen demselben Zwecke dienen.

Auf der vierten Stufe (Zahlraum 1 bis 1000) findet eine Erweiterung der Rechnung mit Bruchzahlen nur insofern statt, als letztere auf die Zahlreihe 1 bis 1000 Anwendung erleiden. Denn auf dieser Stufe werden im Anschlusse an die dezimalen Münzen, Maße und Gewichte die Dezimalzahlen eingeführt. Neue Operationen mit Bruchzahlen würden nur die wünschenswerte Konzentration erschweren, wenn nicht unmöglich machen. Dagegen werden die vier letzten methodischen Einheiten der fünften Stufe, welche sich mit den mehrfach benannten Zahlen beschäftigen, in den Dienst der Rechnung mit Bruchzahlen gestellt. Hier treten die Zeit- und Zählmaße im Zusammenhange auf. Der Lehrgang ist folgender: Erste Abteilung: Sortenverwandlung. A. Multiplikation: Verwandlung höherer Sorten in niedere = Erweitern und Einrichten.[20]) a) Unsere Zeit- und Zählmaße. b) Rechnen mit denselben. I. Erweitern. II. Einrichten. c) Bruchzahlen. d) Angewandte Aufgaben. B. Division: Verwandlung niederer Sorten in höhere = Heben oder Kürzen.[21]) a) Rechnen mit Zeit- und Zählmaßen. b) Bruchzahlen. c) Angewandte Aufgaben. Zweite Abteilung: Die vier Grundrechnungen. A. Addition. B. Subtraktion. C. Multiplikation. D. Division. a) Teilen. b) Messen.

Besonders die Übungen der Ersten Abteilung bilden eine ganz vorzügliche Einführung in die Rechnung mit Bruchzahlen. Denn wenn die Aufgabe vorkommt: „Wieviel Monate sind $\frac{3}{4}$ Jahr?“ so ist das eine Erweiterungsaufgabe, welche in reinen Bruchzahlen ausgedrückt lauten würde: Verwandle $\frac{3}{4}$ in Zwölftel! Oder wenn gefordert wird: „Verwandle in Stunden $4\frac{2}{3}$ Tag!“ so liegt dem die Aufgabe in reinen Bruchzahlen zu Grunde: Richte ein und erweitere sodann zu 24steln $4\frac{2}{3}$! Die Aufgabe: „Wieviel Schock sind 39 Mandeln?“ lautet in reinen Bruchzahlen: Wieviel Ganze und Viertel sind $\frac{39}{4}$? u. dgl. m.

Die Übungen der zweiten Abteilung führen noch einen Schritt weiter. Hier werden im Grunde genommen schon ungleichnamige Bruchzahlen addiert und subtrahiert. Denn es kommen Aufgaben folgender Art vor: „Wieviel Stunden und Minuten sind $7\frac{1}{2}$ Std $+$ $9\frac{2}{3}$ Std $+$ $13\frac{3}{4}$ Std $+$ $15\frac{5}{6}$ Std $+$ $23\frac{5}{10}$ Std?“ „$\frac{3}{4}$ Jahr — $\frac{1}{3}$ Jahr sind wieviel Monate?“ u. s. w. Unter den Multiplikationsaufgaben treten auf: „$9\frac{2}{3}$ Dutzend mal 8; $15\frac{5}{8}$ Gros mal 16“ u. s. w. Unter den Divisionsaufgaben findet man: „$8\frac{1}{3}$ Mdl : 5; $36\frac{5}{6}$ Gros: 24; $5\frac{1}{4}$ Dutzend : $\frac{3}{4}$ Dutzend; $2\frac{5}{6}$ Schock : $2\frac{4}{15}$ Mandeln“ u. s. w.

So vorbereitet gelangt der Schüler auf der sechsten Stufe zur

20) In Norddeutschland ist dafür bis jetzt der Name Resolution (Auflösung), in Süddeutschland Reduktion (Zurückführung) gebräuchlich gewesen.

21) In Norddeutschland ist dafür bis jetzt der Name Reduktion (Zurückführung), in Süddeutschland Resolution (Auflösung) gebräuchlich gewesen.

Rechnung mit den Bruchzahlen im Zusammenhange. Der Lehrgang ist hier folgender: VII. Bruchzahlen. A. Unsere nicht dezimalen Maße. B. Rechenübungen. a) Vorübungen.[22]) b) Halbe, Viertel, Achtel. c) Drittel, Sechstel, Zwölftel. d) Fünftel, Zehntel, Zwanzigstel. e) Beliebige Bruchzahlen. Zusammenfassungen. VIII. Addition und Subtraktion mit Bruchzahlen. Erste Abteilung: Die Bruchzahlen sind gleichnamig. A. Kleine Einkäufe. B. Rechenübungen. a) Addition. b) Subtraktion. c) Addition und Subtraktion in Verbindung. IX. Multiplikation und Division. Erste Abteilung: Multiplikator und Divisor sind ganze Zahlen. A. Von der Sparkasse. B. Rechenübungen. a) Multiplikation. b) Division. c) Verbindung von Multiplikation und Division. Das Kürzen und Gleichnamigmachen der Bruchzahlen. X. Addition und Subtraktion. Zweite Abteilung: Die Bruchzahlen sind ungleichnamig. A. Von der Zeit. B. Rechenübungen. a) Addition. b) Subtraktion. c) Addition und Subtraktion in Verbindung. XI. Multiplikation und Division. Zweite Abteilung: Multiplikator und Divisor sind Bruchzahlen. A. Zinsrechnung. B. Rechenübungen. a) Die zwei Fälle der Multiplikation: 1) Ganze Zahl mal Bruchzahl. 2) Bruchzahl mal Bruchzahl. b) Die zwei Fälle der Division: 1) Ganze Zahl durch Bruchzahl (Messung). 2) Bruchzahl durch Bruchzahl (Messung). XII. Verbindung von Multiplikation und Division. A. Hauswirtschaftliches. B. Rechenübungen. a) Bruchansätze. b) Durchschnittsrechnung. c) Schlußrechnung.

Aus diesem Lehrgange ergiebt sich zunächst, daß Halbe, Viertel, Achtel, Drittel, Sechstel, Zwölftel, Fünftel, Zehntel und Zwanzigstel eine bevorzugte Stellung einnehmen. Sodann, daß bestimmte Sachgebiete mit den Bruchzahlen in engere Verbindung treten: Kleine Einkäufe, die Zeit, die Sparkasse. Beides ist wohlerwogen. Die aufgeführten Bruchzahlen kommen nicht nur am häufigsten vor, sondern es läßt sich mit ihnen auch in der Volksschule am leichtesten operieren, da sie der Veranschaulichung keine Schwierigkeiten bereiten. Man denke nur an ihre Beziehungen zu den Zeit- und Zählmaßen. Die Sachgebiete aber erleichtern nicht nur die Konzentration in hohem Grade, sondern sie beleben auch das Interesse des Kindes für den Rechenstoff außerordentlich. Unmittelbar vor Weihnachten kommen Addition und Subtraktion mit gleichnamigen Bruchzahlen an die Reihe; da sind es die Weihnachtseinkäufe nach Schock, Mandel, Gros, Dutzend und Stück, die das Sachgebiet abgeben. Nach Weihnachten, wenn das neue Jahr begonnen hat, dürfte eine Beschäftigung mit den Zeitmaßen gewiß am Platze sein. Weiter schließen sich Multiplikation und Division an die Sparkasse an, deren Einrichtungen und Zwecke erfahrungsgemäß jedes Kind interessieren, und welche gestatten, die oft so ganz in der Luft schwebenden Aufgaben aus der Zinsrechnung auf Verhältnisse, die dem Kinde naheliegen, zu übertragen. Dabei

22) Dieselben bestehen in einer knappen Zusammenfassung des auf den beiden vorhergehenden Stufen Dagewesenen.

ist der Umstand, daß die Sparkasse mit Bruchteilen der Mark und des Pfennigs rechnet, von besonderer Wichtigkeit, wie ja überhaupt die Multiplikation und Division mit Bruchzahlen eine ihrer wichtigsten Anwendungen in der Zinsrechnung (im weitern Sinne: Prozentrechnung) findet.

Hierüber noch eine Bemerkung psychologischer Natur. Nach unserm Plane fällt die zusammenhängende Behandlung der Bruchzahlen in das sechste, die Einführung der Bruchzahlen in das dritte, vierte und fünfte Schuljahr. Insofern es nun richtig ist, überall darauf zu achten, daß die Volksschullehrstoffe der Natur des kindlichen Geistes entsprechen, dürfte diese Stoffverteilung als eine naturgemäße sich durchaus empfehlen. Denn das elfte und zwölfte Lebensjahr des Kindes ist die Entwickelungsstufe des aufstrebenden Verstandes, das dreizehnte und vierzehnte Lebensjahr die Stufe des vorherrschenden Verstandes[23]). Mit andern Worten: Es besitzt jetzt erst das Kind die erforderliche geistige Reife, um die mit einer zusammenhängenden Behandlung der Bruchzahlen in Verbindung stehenden Abstraktionen ausführen zu können.

§ 12.

Die Rechenstufen.

Litteratur. Adam, R. Der Rechenlehrer 2c. Bergner, Materialien. Leipzig 1884. Bräutigam, H. Methodik 2c. Büttner, A. Anleitung 2c. Dörpfeld, F. W. Grundlinien einer Theorie des Lehrplans. Gütersloh 1873. Göpfert, E. Der Rechenunterricht 2c. Griesmann, J. Der Rechenunterricht in der Volksschule. Leipzig 1890. Grube, A. W. Leitfaden 2c. Hartmann-Ruhsam, Rechenbuch 2c. Hentschel-Költzsch, Lehrbuch 2c. Jänicke, E. Geschichte 2c. Kaselitz, F. Wegweiser 2c. Kehr, K. Die Praxis der Volksschule. 3. Aufl. Gotha 1872. Magnus, K. H. L. Lehrerheft zu Ferdinand Heuers Rechenbuch. Erster Teil. Das Zahlengebiet von 1 bis 100. Hannover 1890. Mittenzwey, L. Die Darstellungsformen im Rechnen. Gotha 1891. Rein, Pickel und Scheller, Theorie 2c. Das 1., 2. und 3. Schuljahr. 2. Aufl. Dresden 1882 f. Schneyer, F. Der erste Rechenunterricht 2c. I. und II. Heft. Koburg 1879 und 1876. Steuer, W. Methodik des Rechenunterrichts 2c. Thieme und Schlosser, Rechenübungen 2c. Außerdem die zu §§ 10 u. 11 aufgeführte Litteratur.

Es ist noch nicht so lange her, daß der Rechenunterricht mit Zifferschreiben, Vor- und Rückwärtszählen, mechanischen Lösungen umfangreicher Additionsaufgaben u. s. w. begonnen wurde. Ein uns vorliegendes, von einem Schulknaben im Anfange der fünfziger Jahre geführtes Rechenbuch beginnt: „Rechnen heißt: Mit Zahlen umgehen. Wer dieses lernen will, muß zunächst Zahlen kennen, schreiben und aussprechen lernen. Schreibe also: 1, 2, 3, 4 . . . . . . 100.“ Hierauf folgt: „Addition oder Zusammensetzung der Zahlen. Sie lehrt, viele Zahlen oder Posten in eine Summe bringen.“ Dann werden Aufgaben mit zwei-, drei- u. s. f. bis siebenstelligen Zahlen gelöst. Den Beschluß macht folgende Aufgabe:

23) Vergleiche: Hartmann, Die Auswahl des Volksschul-Lehrstoffes a. a. O.

```
  7654321
  8765432
  9012345
  2109876
  3456789
  6543210
  7890123
 45432096
```

Es folgt weiter die Subtraktion, welche lehrt: „Von einer größern Zahl oder Summe eine kleinere abziehen.“ Hier wird mit zweistelligen Zahlen begonnen, Aufgaben mit drei- und mehrstelligen folgen, zuletzt steht:

```
30021004
10098765
19922239
30021004
```

Der Knabe, welcher das Rechenbuch führte, stand im dritten Schuljahre. Gewiß, mit Kindern dieses Alters so zu rechnen, das kommt uns auch für jene Zeit recht sonderbar vor. Deshalb, weil ja die Arbeiten Pestalozzis und seiner Nachfolger über den Rechenunterricht damals allen deutschen Volksschullehrern zugänglich waren. Aber man sieht da wieder einmal, wie schwer es hält, alte Gewohnheiten zu beseitigen. Und wenn es gegenwärtig um den Rechenunterricht besser bestellt ist, so ist das gewiß nur dadurch, daß neue kräftige Anregungen gegeben wurden, ermöglicht worden. So betrachtet, erhöht sich insbesondere das Verdienst Grubes ganz wesentlich. Denn Grube namentlich war es, welcher mit Nachdruck darauf hinwies, daß das Kind, ehe es rechnen, d. h. aus zwei oder mehreren bekannten Zahlen neue finden könne, sich klare und deutliche Zahlanschauungen und Zahlvorstellungen erworben haben müsse. Grube war es insbesondere auch, der dann zeigte, wie außerordentlich reich der Rechenstoff schon für die Zahlreihe 1 bis 10 sei, sodaß man gar nicht nötig habe, im ersten Schuljahre darüber hinauszugehen. Das war ein äußerst fruchtbarer Gedanke. Denn daraus, daß man meinte, bereits auf der Unterstufe könne das Kind mit großen Zahlen rechnen, daraus, daß man das Kind nötigte, die unbegrenzte Zahlreihe nach den Regeln der vier Spezies zu durchlaufen, bevor es sich Zahlvorstellungen erworben hatte, ging ja der ganze Mechanismus des frühern Rechenunterrichts hervor. Es bedeutete also einen großen Fortschritt, als man endlich dazu kam, dem Kinde zunächst kleinere Abschnitte, eng begrenzte Zahlreihen darzubieten, um es in denselben recht heimisch zu machen. Dieses umsomehr, als man gleichzeitig bestrebt war, gewisse Stoffe (wie z. B. das Rechnen mit Dezimal- und Bruchzahlen, die sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten u. s. w.) nach den Gesetzen der Propädeutik schon auf den untern Stufen heranzuziehen u. dgl. m. Kurz, daß man das that, was heutzutage jeder verständige Rechenlehrer für selbstverständlich hält, daß man den Volksschulrechenstoff unter sorgfältiger

Berücksichtigung des Objekts und Subjekts in eine Anzahl von „Stufen“ zerlegte, die sich entweder an die üblichen Schuljahre, oder an die Schul-Organisation (Gliederung, Klasseneinteilung), oder an beide zugleich im einzelnen Falle anschlossen.

Von Pestalozzi wissen wir, daß er die Zahlreihe 1 bis 100 mit großer Ausführlichkeit behandelte. Diese Behandlung läßt keinen Zweifel darüber aufkommen, daß er bereits gründlich mit dem Verfahren, gleich von vorn herein dem Kinde die unendliche Zahlreihe als Arbeitsfeld anzuweisen, gebrochen hatte. Von Tillich ist bekannt, daß derselbe die eingehende und allseitige Behandlung der Zahlreihe 1 bis 10 als die Grundlage alles Rechnens betrachtete [1]). Joseph Schmid nahm seine Übungen zunächst innerhalb der Zahlreihe 1 bis 20, dann 1 bis 100 vor. Ebenso Rebs, welcher überdies noch mehr als Tillich und Schmid den Lehrstoff um einzelne Zahlen gruppierte oder (in gewissem Sinne) konzentrierte. Auch Türk beginnt (und zwar ohne Ziffern anzuwenden) mit dem Rechnen von 1 bis 10 und 1 bis 20, geht darauf erst zum Zifferrechnen, dann zum Rechnen mit benannten Zahlen, der mündlichen und schriftlichen Rechnung mit Brüchen, zuletzt zu den „Verhältnissen oder der sogenannten Regeldetri“ über. Kawerau dehnt seine ersten Übungen nur auf die Zahlreihe 1 bis 20 aus. So die unmittelbaren Nachfolger Pestalozzis. Daß Harnisch (dem es, wie wir oben nachwiesen, vorbehalten war, einen Ausgleich zwischen den Forderungen der Pestalozzianer und Nicht-Pestalozzianer herbeizuführen) denselben methodischen Anschauungen huldigte, läßt sich schon aus seinem Verhältnisse zu Tillichs Lehrbuch schließen. [2]) Diesterweg verteilt im I. Teile seines „Handbuches“ den Rechenstoff für die ersten Schuljahre auf folgende neun Stufen: Zählen, Addieren und Subtrahieren innerhalb 1) der Zahlreihe 1 bis 10, 2) 10 bis 100 und 3) der unbegrenzten Zahlreihe; 4) Vervielfältigen; 5) Teilen; 6) Resolvieren und Reduzieren; 7) und 8) die vier Grundrechnungsarten in mehrfach benannten Zahlen; 9) Bruchrechnung. Wie sich Diesterweg über „die Hauptstufen des Rechenunterrichts“ in seinem „Wegweiser“ ausspricht, ist bereits mitgeteilt worden. [3]) Dort fordert er sogar Behandlung der Zahlreihen 1 bis 10, 10 bis 20, 20 bis 100, 100 bis 1000, 1000 bis 100000 und „höher hinauf“. Danach folgen bei ihm: Anwendung der vier Spezies auf größere angewandte Aufgaben, Bruchrechnung, Regeldetri, Zins-, Rabatt- und andere Rechnungen.

Wenn nun aber auch aus alledem hervorgeht, daß die auf Gewinnung der richtigen Stufen des Rechenunterrichts abzielenden Bestrebungen keineswegs neuern Datums sind, so muß doch gleichwohl zugegeben werden, daß dieselben erst nach dem Erscheinen von Grubes „Leitfaden“ die Aufmerksamkeit der deutschen Volksschullehrerwelt in größerm Umfange auf sich lenkten. Grubes monographische Zahlbehandlung brachte es

1) Vergl. S. 64 f.
2) Vergl. S. 76 f.
3) Vergl. S. 83 f.

fertig, daß für die Zahlreihe 1 bis 100 hundert Stufen entstanden.[4]) Dadurch wurde die Frage, wie es die Volksschule in Betreff der Rechenstufen halten wolle, zu einer „brennenden". Ja — nach den neuern und neuesten Erscheinungen auf dem Gebiete der Rechenlitteratur zu schließen — sie blieb es (in gewissem Sinne) bis auf den heutigen Tag. Denn wenn auch die Überzeugung, daß dem Kinde auf der Unter- und Mittelstufe nicht sofort und auch nicht zubald die unbegrenzte Zahlreihe darzubieten sei, eine allgemeine ist, hat man sich doch über die praktische Behandlung gewisser Einzelheiten innerhalb der begrenzten Zahlreihen noch keineswegs geeinigt. Um es gleich kurz zu sagen: Es handelt sich am Anfange hauptsächlich um die aus Grubeschen, Nicht-Grubeschen und gemischten Standpunkten hervorgehenden Auffassungen der Zahlen innerhalb ihrer Reihe, weiterhin um die Einführung der Rechnung mit Dezimalzahlen und Bruchzahlen, danach um das Rechnen mit benannten Zahlen und das angewandte Rechnen. Auf alle diese Punkte wollen wir hier eingehen. Doch sollen zunächst wieder einige der bedeutenderen neuern Rechenmethodiker gehört werden, bevor wir unsern eigenen Standpunkt darlegen.

Was Grube selbst anlangt, so verteilt derselbe den Rechenstoff auf die vier ersten Schuljahre wie folgt:

„Erster Kursus (1. und 2. Schuljahr). Das Rechnen mit den ganzen Zahlen von 1 bis 100. Erstes Jahr: Im Zahlraume von 1 bis 10. Zweites Jahr: Im Zahlraume von 10 bis 100. Zweiter Kursus (3. Jahr). Das Rechnen mit den ganzen Zahlen über 100. Erstes Semester: Zahlraum von 100 bis 1000. Allseitige Anschauung. Zweites Semester: Beliebige Zahlräume. Übung in den einzelnen Operationen. Dritter Kursus (4. Jahr). Das Rechnen mit den Bruchzahlen. Erstes Semester: Allseitige Anschauung. Zweites Semester: Übung in den Spezies als solchen.[5])

Es sind das nur die äußern Umrisse der Grubeschen Stoffverteilung, und man hat sich dabei stets zu vergegenwärtigen, daß die allseitige Betrachtung der Zahlindividuen den Fortschritt innerhalb der einzelnen Kurse bestimmt.

Ganz anders ist das bei Bräutigam, Göpfert und Schneyer, deren Arbeiten wir oben als eine Frucht des akademisch-pädagogischen Seminars zu Jena bezeichneten. Die drei Genannten stellen sich in bewußten Gegensatz zu Grube, indem sie nicht einzelne Zahlen, sondern dekadische Zahlgruppen (1 bis 10, 1 bis 100 und 1 bis 1000) als methodische Einheiten aufstellen und allseitig bearbeiten. Am entschiedensten thut dieses Bräutigam. Dabei benutzen alle drei in ausgiebigster Weise den Tillichschen Rechenkasten als Veranschaulichungsmittel, weil Grubes Verfahren „durch die vielerlei Veranschaulichungsmittel eine Menge fremder Vorstellungen hereinzieht, die den Schüler

4) Vergl. S. 93 f.
5) Grube a. a. O. S. 25.

an Form, Farbe, Geschmack, Stoff etc. des betreffenden Gegenstandes erinnern, welche die Vorstellung der Zahlengröße mehr trüben als klären." [6])

Bräutigams Rechenstufen für die drei ersten Schuljahre sind folgende: Erste Stufe: Zahlreihe 1 bis 10. A. Bestimmen (Abschätzen) der Stäbchen. B. Bestimmen der Reihenfolge (Zählen). C. Vergleichen der Stäbchen. (Addition und Subtraktion.) D. Zerlegen der Stäbchen. I. Zerlegen der Stäbchen in beliebige Größen (Addition und Subtraktion). II. Zusammensetzen der Stäbchen aus gleichen Größen und Zerlegen in gleiche Größen (Multiplikation und Division). III. Zerlegen der Stäbchen in mehrere gleiche Größen und eine ungleiche Größe (Division mit Rest). Zweite Stufe: Zahlreihe 1 bis 100. A. Aufbau der zweiten Ordnung aus reinen Zig und Operationen damit: I. Zählen, Schreiben und Lesen. II. Addition und Subtraktion. III. Multiplikation und Division. B. Aufbau der zweiten Ordnung in gemischten Zig und Operationen damit: I. Entstehung, Schreiben und Lesen. II. Addition und Subtraktion. 1. Reine Zig plus oder minus Einer. 2. Gemischte Zig plus oder minus reine Zig. 3. Reine Zig plus oder minus gemischte Zig. 4. Gemischte Zig plus oder minus Einer. 5. Gemischte Zig plus oder minus gemischte Zig. III. Multiplikation und Division. 1. Zehnerreihe und Fünferreihe. 2. Zweier-, Vierer- und Achterreihe. 3. Dreier-, Sechser- und Neunerreihe. 4. Siebenerreihe. IV. Division mit Rest. Dritte Stufe: Zahlreihe 1 bis 1000. A. Aufbau der dritten Ordnung aus reinen Hunderten und Operationen damit. I. Zählen, Schreiben und Lesen. II. Addition und Subtraktion. III. Multiplikation und Division. B. Aufbau der dritten Ordnung aus gemischten Hunderten ohne Einer. I. Zählen, Schreiben und Lesen. II. Addition und Subtraktion. III. Multiplikation und Division. C. Aufbau der dritten Ordnung aus gemischten Hunderten mit Einern. I. Zählen, Schreiben und Lesen. II. Addition und Subtraktion. III. Multiplikation und Division.

Göpferts Arbeit, welche sich ebenfalls nur auf die drei ersten Schuljahre bezieht, hat zwar viele Berührungspunkte mit derjenigen Bräutigams, ist aber die ältere und schließt sich jedenfalls am engsten der Praxis des Jenenser Seminars an. Es heißt darin: „Es handelt sich darum, daß die Schüler die Zahlen auffassen nach ihrem Begriff, d. i. den Wert der Zahlgröße, dann aber nach ihrem Verhältnis zu einander, d. i. die Zahlreihe. Hiernach ergeben sich folgende zwei Stufen: 1. Auffassen und Abschätzen der Zahlstäbe; 2. Einüben der Reihenfolge. Daran schließen sich als 3. Stufe das Vergleichen und als 4. Stufe das Zerlegen der Zahlstäbe." [7]) Damit ist der Rechenstoff für das erste Halbjahr des ersten Schuljahrs begrenzt. Im zweiten Halbjahre gelangen die vier Spezies der Zahlreihe 1 bis 10 zur Behandlung. Dem zweiten Schuljahre wird die Zahlreihe 1 bis 100 zugewiesen. Doch soll dieselbe nicht vollständig erledigt werden. Denn es heißt: „Die Übungen dieses Raumes gehören nur der Addition und Subtraktion an.

6) Bräutigam a. a. O. S. 3.
7) Göpfert a. a. O. S. 1.

Als Multiplikation und Division im Zahlraume von 1 bis 100 gilt die Bildung der kleinen Reihen oder des kleinen Einmaleins; diese aber ist die Aufgabe des ganzen nächsten, also dritten Schuljahrs."[8]) In der That wird im dritten Schuljahre auch nicht über die Zahlreihe 1 bis 100 hinausgegangen. Nur die Einführung in das Münz-, Maß- und Gewichtssystem schließt sich noch an, und einige nichtdezimale Maße, wie Dutzend, Jahr und Monate finden Beachtung.

Von Schneyer liegt eine Bearbeitung des Rechenstoffes für die zwei ersten Schuljahre vor. Für das erste Schuljahr ist die Zahlreihe 1 bis 10, für das zweite die Zahlreihe 1 bis 100 bestimmt. Schneyer läßt namentlich auch fleißig nach den Würfeln des Tillichschen Rechenkastens zeichnen. Im ersten Schuljahre beginnt er mit dem Kennenlernen der Bausteine, welchen sich die Reihenfolge (das Zählen), das Vergleichen (größer — kleiner) und Zerlegen anschließen. Weiterhin folgen die vier Spezies innerhalb der Zahlreihe.[9]) Für das zweite Schuljahr bestimmt er: „1) Die vier Spezies in reinen Zig. 2. Reine Zig plus und minus Einer ohne Übergang in ein anderes Zig. 3) Gemischte Zig plus und minus Einer ohne Übergang in ein anderes Zig. 4) Gemischte Zig plus und minus reine Zig; reine Zig plus und minus gemischte Zig. 5) Gemischte Zig plus und minus Einer mit Übergang in ein anderes Zig. 6) Gemischte Zig plus und minus gemischte Zig. Zusammenstellung sämtlicher Reihen und vollständige Einübung derselben. 7) Die vier Spezies im Zahlraume von 1 bis 100."[10]) Da Schneyer die kleinen Reihen bereits im zweiten Schuljahre bildet und vollständig einübt, so nähert sich sein Lehrgang demjenigen Bräutigams ebensoweit, als er sich von dem Göpferts entfernt. Eigentümlich ist Schneyer die vollständige Ausscheidung von Aufgaben mit benannten Zahlen, wie sie bei Bräutigam und Göpfert, und von eingekleideten Aufgaben, wie sie bei Bräutigam (wenn auch nur vereinzelt) vorkommen.

Auch Hentschel zieht die allseitige Behandlung dekadischer Zahlgruppen derjenigen einzelner Zahlen vor. Nur schreitet er rascher vorwärts als die ebengenannten drei Rechenmethodiker. Denn nach ihm sind im ersten Schuljahre die Grundrechnungsarten mit den Zahlen 1 bis 20 in den Abschnitten 1 bis 5, 1 bis 10 und 1 bis 20, im zweiten Schuljahre die Grundrechnungsarten mit den Zahlen von 1 bis 100, im dritten Schuljahre die Grundrechnungsarten mit größeren Zahlen in zwei Abschnitten 1 bis 1000 und höherer Zahlraum, im vierten Schuljahre die Grundrechnungsarten in mehrfachbenannten Zahlen zu behandeln. Als weitere Stufen schließen sich denselben für die übrigen Schuljahre an: Gemeine und Dezimalbrüche; Verhältnisse (Regeldetri, Vielsatz); Zins- und Terminrechnung; Abzugsrechnungen (Rabatt- und Tararechnung); Gesellschafts- und Mischungsrechnung; Raumrechnungen, Quadrate, Kuben, Wurzeln.[11])

8) Ebenda S. 10.
9) Schneyer a. a. O. Heft 1.
10) Schneyer a. a. O. Heft 2.
11) Hentschel a. a. O.

Kaselitz, der sich in seinem „Wegweiser für den Rechenunterricht in deutschen Schulen" eingehend mit Grubes Verfahren beschäftigt und insbesondere hervorhebt, daß dasselbe „nicht ein Rechnen mit der Zahl, die er gerade behandelt, sondern ein Betrachten derselben in ihrer Eigentümlichkeit" sei, daß Grube wohl versucht habe, den Rechenstoff aus dem Wesen der Zahl heraus zu gliedern, daß er aber das mathematische Objekt und nicht die Operation zum Einteilungsprinzip gemacht habe, behandelt den Rechenstoff so, daß eine gleichzeitige Erweiterung nach drei Richtungen hin stattfindet: Bezüglich der operativen Zahl, der Zahlkreise und der Sachverhältnisse.[12]) Daher kommt es, daß Kaselitz anfangs „streng nach dem Grubeschen Prinzip" verfährt, „solange es sich nur darum handelt, Vorstellungen und Begriffe von den Grundzahlen (1 bis 10) durch häufiges Anschauen von Gruppen der Zahl nach gleicher Einzeldinge und durch allseitiges Betrachten und Messen, Auflösen und Wiederzusammensetzen der Grundzahlen dem Kinde zuzuführen", daß er aber dieses Prinzip aufgiebt, „sobald zum wirklichen Rechnen übergegangen wird."

Hiernach gruppiert sich der Rechenstoff bei Kaselitz z. B. für das erste Schuljahr wie folgt:[13])

„1. Vierteljahr:

Herbeischaffung der Vorstellungen und Begriffe von den Grundzahlen.

2. Vierteljahr:

a) Operative Zahl.	b) Zahlenkreis.	c) Sachverhältnisse.
Die Zahl 1.	1 — 10.	Die einfachsten Münzen, Maße und Gewichte. Mark, Pfennig, Meter, Kilogramm, Gramm, Pfund, Dutzend, Stück, Schock, Mandel.
Die Zahl 2.	1 — 10.	
Die Zahl 3.	1 — 15.	
Die Zahl 4.	1 — 20.	
Die Zahl 5.	1 — 25.	

3. und 4. Vierteljahr.

a) Operative Zahl.	b) Zahlenkreis.	c) Sachverhältnisse.
1	1 — 10	Resolvieren, Reduzieren: Ganz einfache Münz-, Maß- und Gewichtsverhältnisse. Regeldetri: Einfache Abhängigkeit. Aufgaben in algebraischer Form: Es ist nur eine Operation auszuführen."
2	1 — 20	
3	1 — 30	
4	1 — 40	
5	1 — 50	
6	1 — 60	
7	1 — 70	
8	1 — 80	
9	1 — 90	
10	1 —100	

12) Kaselitz a. a. O. S. 28 f.
13) Kaselitz a. a. O. S. 35.

Ähnliches findet man für das zweite Schuljahr, dem der „Zahlenkreis“ 1 bis 1000 zugewiesen wird. Im dritten Schuljahre wird das „Zahlsystem“ betrachtet und der „Zahlenkreis“ erweitert. Hier kommen die vier Spezies mit unbenannten und einfach benannten Zahlen im „unendlichen Zahlenkreise“ vor, dazu angewandte Aufgaben (Regeldetri, Zinsrechnung, algebraische Aufgaben), das Münz-, Maß- und Gewichtssystem. Aufgaben nach den vier Spezies schließen sich an, angewandte Aufgaben, auch solche aus der Flächen-, Tara-, Rabatt- und Gesellschaftsrechnung, folgen denselben. Dem vierten Schuljahre wird das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen zugewiesen. Weiterhin folgen (für die noch übrigen Schuljahre): Dezimalbrüche, bürgerliche Rechnungsarten, Buchstabenrechnung, Wurzelausziehung. — Eins namentlich fällt bei Kaselitz auf: der rasche Fortschritt von einer Stufe zur andern. Er behandelt im ersten Schuljahre die Zahlreihe 1 bis 100, an welche sich keiner der vorigen Methodiker vor dem zweiten Schuljahre heranwagt, und mit der zusammenhängenden Behandlung der Bruchrechnung ist er bereits zu Ende, bevor die andern damit angefangen haben. —

Ein vielbenutztes Rechenwerk ist gegenwärtig „Ferdinand Heuers Rechenbuch für Stadt- und Landschulen.“ Dieses bestimmt für die Unterstufe der Volksschule das „Zahlengebiet“ von 1 bis 100 in den drei Abteilungen: 1 bis 10, 1 bis 20 und 1 bis 100; für die Mittelstufe den „Zahlenkreis“ von 1 bis 1000 und von 1 bis zu den Einermillionen aufwärts, anderseits bis zu den Tausendsteln abwärts; für die Oberstufe das Rechnen mit gemeinen Brüchen und mit Dezimalzahlen, die Zeitrechnung und die Rechnungsarten des bürgerlichen Lebens, sowie Aufgaben aus den übrigen Unterrichtsgegenständen.[14])

Büttner unterscheidet folgende acht Stufen: 1) Der „Zahlenraum“ von 1 bis 10. 2) Desgleichen von 1 bis 20. 3) Desgleichen von 1 bis 100. 4) Das Rechnen mit größern Zahlen und der Zahlenraum bis 1000. 5) Das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen, vorzugsweise mit solchen in dezimaler Schreibung. 6) Dezimalbruchrechnung. 7) Die Bruchrechnung im Zusammenhange. 8) Die Rechnungsarten des bürgerlichen Lebens. Dabei verweist er die drei ersten Stufen auf die ersten zwei Schuljahre, die vierte und fünfte (unter günstigen Verhältnissen auch die sechste) Stufe auf die mittlern drei, die übrigen Stufen auf die letzten drei Schuljahre.[15])

In Kehrs „Praxis der Volksschule“ befindet sich folgender „Lehrplan für den Unterricht im Rechnen“: „Der Gang des Unterrichts und die Gliederung des Stoffes wird nach dekadischen Kreisen bestimmt. Zahlkreis: a) von 1 — 10; b) von 1 — 20; c) von 1 — 100; d) von 1 — 1000; e) der unbegrenzte Zahlenraum. Innerhalb jedes dieser Gebiete ist der Schüler in allen Arten und Formen der Zahlenbildung und Zahlenveränderung zu üben, soweit diese dem Grade seiner geistigen

14) Magnus a. a. O.
15) Büttner a. a. O.

Fähigkeiten entsprechen. Jedes neue Zahlengebiet gestaltet sich zu einer Weiterentwickelung des vorhergegangenen und bringt immer reichere Entfaltung der verschiedensten Zahlenkombinationen, deren Keime im Boden des ersten Zehners liegen. So ordnet sich der Unterricht, von der Eins ausgehend und allmählich in immer weiter gezogenen konzentrischen Ringen fortschreitend, zu einem organisch zusammengefügten Ganzen mit drei Hauptstufen: Fundament, Stockwerk, Dach, die der Dreiteilung der Volksschule und der Entwickelung des kindlichen Geistes kongruent sind: 1) die Unter- oder Anschauungsstufe, der grundlegende Unterricht (1.—3. Schuljahr), enthält die Operationen in den Zahlenkreisen von 1 — 10, 1 — 20, 1 — 100. 2) Die Mittel- oder Vorstellungsstufe, der weiterführende Unterricht (4.—5. Schuljahr), umfaßt die Operationen im ersten Tausend und im unbegrenzten Zahlenraume. 3) Die Ober- oder Urteilsstufe, der abschließende Unterricht (6.—8. Schuljahr), giebt eine zusammenfassende und tiefgehende Spezialbehandlung der Bruchrechnung, sowie die Rechnungen des bürgerlichen Lebens." [16])

Steuer stellt nachstehenden „Stoffverteilungsplan" auf: „I. Unterklasse, 3 Abteilungen. 1. Schuljahr. Die einfachen oder Grundrechnungen mit ganzen Zahlen in reinen und angewandten Aufgaben im Zahlenkreis 1 — 5, 1 — 10 und 1 — 20. Von den Halben, Vierteln und Dritteln. 2. Schuljahr. Die einfachen oder Grundrechnungen mit ganzen Zahlen in reinen und angewandten Aufgaben im Zahlenkreis 1 — 50 und 1 — 100. Leichte Übungen mit gemeinen Brüchen. Anfang der Dezimalbrüche. 3. Schuljahr. Die einfachen oder Grundrechnungen mit ganzen Zahlen im Zahlenkreis 1 — 1000. Fortsetzung der Übungen mit gemeinen Brüchen. Rechnung mit ein- und zweistelligen Dezimalbrüchen. Überall reine und angewandte Aufgaben. II. Mittelklasse, 2 Abteilungen. 4. Schuljahr. Die einfachen oder Grundrechnungen mit ganzen Zahlen im unbegrenzten Zahlenkreis (schriftlich etwa bis zu den Zehnermillionen), Fortsetzung der Übungen mit gemeinen Brüchen. Rechnung mit ein- bis dreistelligen Dezimalbrüchen. Überall reine und angewandte Aufgaben; unter den letztern Berechnung des Quadrats und des Rechtecks. 5. Schuljahr. Übungen mit gemeinen Brüchen. Die einfachen oder Grundrechnungen mit Dezimalbrüchen. Wiederholung der Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen. Überall reine und angewandte Aufgaben. Berechnung des Quadrats und des Rechtecks. Zeitrechnung. III. Oberklasse, 2 Abteilungen. 6. Schuljahr. Wiederholungsweise einfache Aufgaben aus den Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und gemeinen und Dezimalbrüchen zur Berechnung von Preisen, des Gewinnes, der Zinsen, des Abzugs, der Entschädigung, des Quadrats und des Rechtecks. Zusammengesetzte Aufgaben, entstanden durch Wiederholung derselben Grundrechnungsart oder durch natürliche und zweckmäßige Verknüpfung verschiedener Grundrech-

16) Kehr a. a. O. S. 243 f.

nungsarten, und zwar zu Preisberechnungen, zu Zins-, Rabatt-, Durchschnitts-, Gesellschafts- und Raumrechnungen. Algebraische Aufgaben. 7. und 8. Schuljahr. Im allgemeinen wie im sechsten Schuljahre — mit Erweiterungen und Ergänzungen. Berechnungen. Wenn möglich: Verhältnis-, Diskont- und Kurs- und Wechselrechnung." [17])

Adams „Rechenlehrer" hält folgende Stoffverteilung ein: A. Unterstufe. 2 Jahre. a) Kopfrechnen. Addition und Subtraktion im Zahlraume von 1 bis 10. Multiplikation und Division desgleichen. Addition und Subtraktion im Zahlraume 1 bis 20. Multiplikation und Division desgleichen. Der Zahlraum 1 bis 100. b) Schriftliches Rechnen. „Schriftliche Wiederholung der Übungen des Kopfrechnens, und zwar mit Ausschluß derjenigen Übungen, in denen Bruchformen und benannte Zahlen auftreten. Von der Form, welche das eigentliche schriftliche Rechnen beobachtet, wird hier gänzlich abgesehen." B. Mittelstufe. — 3 Jahre. a) Kopfrechnen. I. Der Zahlraum 1 bis 1000. II. Der unbegrenzte Zahlraum (zunächst bis zu den Millionen). III. Fortführung der einfachsten Übungen des Rechnens mit Brüchen. b) Schriftliches Rechnen. Dieselben Zahlgebiete. C. Oberstufe. — 3 Jahre. „Bei jedem der zu behandelnden Rechenfälle wird mit Kopfrechnen begonnen und erst später zum schriftlichen Rechnen übergegangen." Dezimalbruchrechnung. Rechnen mit gemeinen Brüchen. Zeit- und Durchschnittsrechnung. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri. Rechnungsarten des bürgerlichen Lebens. Flächen- und Körperrechnung. [18])

Die von Thieme und Schlosser herausgegebenen „Rechenübungen" bringen in ihrer neuen Bearbeitung folgende Stufen: 1. Heft. Zahlraum 1 bis 20 in den Abteilungen 1 bis 10 und 1 bis 20. Es heißt dort: „Das umgearbeitete Heft bietet darum einen nicht nur wesentlich erweiterten, sondern auch in Bezug auf den methodischen Aufbau vereinfachten Übungsstoff, der sich in vier Abschnitte: in die Zahlenräume 1 bis 5, 1 bis 10, 10 bis 20 und 1 bis 20 gliedert. Diese Anlage ermöglicht einen zweifachen Gang durch diese Gebiete, nämlich so, daß die vier Grundrechnungsarten nacheinander oder die Zahlen auch monographisch behandelt werden können." 2. Heft. Zahlraum 1 bis 100. 3. Heft. Zahlraum 1 bis 1000 und 1 bis 10000. 4. Heft. Bruchrechnung. 5. Heft. Bürgerliche Rechnungsarten. 6. Heft. Bürgerliche Rechnungsarten. (Das 6. Heft ist ein Ergänzungsheft und zugleich mit für die Fortbildungsschule bestimmt.) [19])

Eine besondere Stellung nehmen den vorigen gegenüber Griesmann und Mittenzwey insofern ein, als sie für das erste Schuljahr die Behandlung der Zahlreihe 1 bis 12 fordern. Griesmann sagt: „Meine Erfahrung bestimmt mich, die Bewältigung des Zahlenraumes 1—12 für das erste Jahr als Aufgabe hinzustellen. Ich habe es stets für gut gefunden, über den ersten Zehner hinauszugehen." Dem zweiten Schul-

17) Steuer a. a. O. S. 30 f.
18) Adam a. a. O. S. 41 f.
19) Thieme und Schlosser a. a. O.

jahre weist Griesmann „Kenntnis der vier Rechenarten im Raume 1—100“ zu, dem dritten „Kenntnis des Zahlenraumes bis 1000.“[20]) Bei Mittenzwey heißt es: „Das Stoffgebiet für das 1. Schuljahr ist der Zahlraum von 1 bis 12 und zwar in der Hauptsache nach ‚Grubescher Methode‘; von einer Behandlung der Bruchform kann jedoch (bis auf Halbe und Viertel) abgesehen werden; nicht ‚allseitige‘ Behandlung der Zahl, wie Grube will, sondern eine ‚vielseitige‘ Behandlung derselben.“ Für die Zahlreihe 1 bis 100 setzt Mittenzwey $1\frac{1}{2}$ Schuljahre an.[21])

In dem von Ziller geleiteten akademisch-pädagogischen Seminar zu Leipzig erstreckte sich das Rechnen im ersten Schuljahre auf die Zahlreihe 1 bis 10. Im zweiten Schuljahre wurde die Zahlreihe 1 bis 100 behandelt und dabei das „kleine Einmaleins“ besonders betont, im dritten Schuljahre die Zahlreihe über 100 hinaus unter Hervorhebung der Multiplikation und Division mit Einern, Zehnern, Hunderten und schließlich beliebigen zwei- und dreistelligen Zahlen durchgearbeitet. Für das vierte Schuljahr lauteten die Bestimmungen: „Multiplikationen und Divisionen mit Zahlen, die aus Zehnern und Einern gemischt sind, und weiterhin mit Hilfe der Anfänge des großen Einmaleins, wie 11 (als Einleitung zu 12), 12 (Dutzend), 15 (Mandel), 25 (ein Vierteljahrhundert). Damit die Reihe nicht zu lang werde, sind später Zahlen an die frühere anzuschließen, wie 24 zu 12, 60 (Schock) zu 15, 50 u. s. w. zu 25. . . . Das Multiplizieren und Dividieren mit solchen Zahlen ist das fachwissenschaftliche Ziel für den Rechenunterricht im vierten Schuljahre, außerdem ist Zahlschreiben bis zur Million mit doppeltem Komma und dem Lesen der geschriebenen Zahlen — beides nach dem ersten Lernen auch in Verbindung mit den zu stellenden Aufgaben und deren Lösung fort und fort zu üben.“ . . . Dem fünften Schuljahre wurde die schriftliche Bruchrechnung überwiesen u. s. w. Der Umstand, daß das Rechnen „stets von den Sachgebieten (Gesinnungs- und naturkundlichen, bez. geographischen Stoffen) aus durchzuarbeiten“ ist, verleiht den speziellen Ausführungen auf jeder Rechenstufe ein eigenartiges Gepräge.[22])

Nach Herbart-Zillerschen Grundsätzen ist auch der Rechenunterricht in „Reins Schuljahren“ bearbeitet worden. „Die Rechenübungen des ersten Schuljahres zur Gewinnung der fundamentalen Zahlvorstellungen bewegen sich in der ersten grundlegenden Zahlreihe 1—10. Innerhalb dieser Reihe sind in der Form allseitiger Betrachtung der Zahlen die vier Grundrechnungsarten an jeder einzelnen Zahl zu lehren und zu üben.“ Mit andern Worten: Für die Zahlreihe 1—10 wird das Grubesche Verfahren als das geeignetste herübergenommen. „Im zweiten Schuljahre sollen die Kinder in die beiden ersten Stufen des Zehnersystems eingeführt werden, nachdem sie im ersten Schuljahre die Elemente hierzu, die Grundzahlen von 1 bis 10, sich erworben haben. Nicht tritt von nun an mehr die einzelne Zahl als Ganzes für sich, als

20) Griesmann a. a. O.
21) Mittenzwey a. a. O.
22) Bergner a. a. O. S. 29. 39. 60. 76.

Zahlindividuum, auf; vielmehr will jede derselben von da ab in erster Linie als Glied des Systems und im Sinne des Systems erkannt und begriffen sein." Es wird also das Grubesche Verfahren für die zweite Rechenstufe aufgegeben. „Das Rechnen im dritten Schuljahre ist die unmittelbare Fortsetzung der im zweiten Schuljahre begonnenen Übungen. Aus Gründen, die im ‚zweiten Schuljahr' (S. 80) dargelegt wurden, ist mit der Multiplikation und Division nur erst ein Anfang gemacht worden, die Fortführung und der Abschluß dieser Übungen wird dem dritten Schuljahre zugewiesen. Dieser Anfang besteht in der Bildung der Zehner- und Einer- bis Sechserreihe vom kleinen Einmaleins und in Lösungen von Multiplikations- und Divisionsaufgaben mit Hilfe dieser Reihen. Das dritte Schuljahr hat also zunächst die Bildung der übrigen Reihen vom kleinen Einmaleins und Lösungen von leichtern und schwierigern Aufgaben mittels dieser Reihen zu besorgen." Sonach wird im dritten Schuljahre anfangs nicht über die Zahlreihe 1 bis 100 hinausgegangen. Dieses geschieht vielmehr erst im weitern Verlaufe des dritten Schuljahrs und im vierten Schuljahre, in welchem das Rechnen mit unbenannten und einfach benannten (abstrakten und reinen konkreten dekadischen) Zahlen seine Erledigung findet. Dem fünften Schuljahre wird das Rechnen mit gemischten konkreten Zahlen und im Anschlusse daran das Rechnen mit Dezimalzahlen zugewiesen. Das sechste Schuljahr beschäftigt sich mit den Bruchzahlen; für die beiden letzten Schuljahre bleiben die auf die Schlußrechnung sich stützenden Rechnungsarten übrig.[23]) Die „Schuljahre" betonen auf allen Stufen des Rechnens, ganz wie Ziller, die Notwendigkeit des Anschlusses an bestimmte Sachgebiete. Daher zeigt auch in ihnen die Behandlung des Stoffes (namentlich auf der Unter- und Mittelstufe) manche Eigentümlichkeit, welche von den Gepflogenheiten anderer Rechenwerke mehr oder weniger abweicht.

Aus den vorstehenden Darlegungen, welche durch Heranziehung weiterer Rechenwerke leicht noch fortgeführt werden könnten, entnehmen wir folgendes: 1) Alle neuern Rechenmethodiker stimmen darin überein, daß das Rechnen auf der Unterstufe sich nur auf eng begrenzte Zahlreihen erstrecken dürfe. 2) Die meisten der neuern Rechenmethodiker fordern für diese Zahlreihen die Heranziehung der üblichen vier Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen, mehrere auch in Bruchzahlen und einige sogar in Dezimalzahlen. 3) Als begrenzte Zahlreihen treten auf 1—10, 1—20, 1—100, 1—1000. 4) Für das erste Schuljahr erachten Grube, Bräutigam, Göpfert, Schneyer, Ziller und Rein (Pickel, Scheller) die Zahlreihe 1—10 als vollkommen ausreichend, während Griesmann und Mittenzwey 1—12 fordern und Hentschel, Kehr, Steuer, Adam, unter Umständen auch Heuer, Büttner, und Thieme-Schlosser der Zahlreihe 1—20 den Vorzug geben. Nur Kaselitz ist für Behandlung der Zahlreihe 1—100. 5) Für das zweite Schuljahr fordern alle genannten Rechenmethodiker (mit Ausnahme von

23) Rein a. a. O. 1. Schuljahr S. 151. — 2. Schuljahr S. 81. — 3. Schuljahr S. 160 ff.

Kaselitz, der die Reihe 1—1000 annimmt) die Behandlung der Zahlreihe 1—100; dieselbe ist aber bei Göpfert, Kehr, Mittenzwey und Rein (Pickel, Scheller) keine abschließende. 6) Im dritten Schuljahre gehen nicht über die Zahlreihe 1—100 hinaus: Göpfert und Kehr; nicht über 1—1000: Rein, Bräutigam, Heuer, Büttner, Steuer, Griesmann, Mittenzwey, Thieme-Schlosser; über 1000 hinaus: Grube, Hentschel, Kaselitz und Ziller. 7) Vom vierten Schuljahre ab zeigen sich weniger auf begrenzte Zahlreihen als auf Heranziehung benannter Zahlen, Bruch- und Dezimalzahlen bezügliche Unterschiede.

Diese Darlegungen dürften geeignet sein, einen zuverlässigen Maßstab für die Brauchbarkeit der im „Rechenbuch für Stadt- und Landschulen“ aufgestellten Rechenstufen abzugeben; insbesondere geeignet sein, zu ermitteln, inwieweit letztere der heutigen Rechenpraxis gegenüber in Rücksicht auf allgemein pädagogische Forderungen einen Fortschritt bedeuten.

Unser „Rechenbuch für Stadt- und Landschulen“ verteilt den für die Volksschule (dieselbe von ihrer einfachsten bis zu ihrer reichsten Gliederung berücksichtigend) überhaupt in Betracht kommenden Rechenstoff, entsprechend den in Nord- und Mitteldeutschland üblichen acht Schuljahren, auf acht Stufen. Es sind dieses: 1) Die Zahlreihe 1 bis 10. 2) Die Zahlreihe 1 bis 100. (Addition und Subtraktion.) 3) Die Reihen der Zahlen 1 bis 10 innerhalb der Zahlreihe 1 bis 100. (Multiplikation und Division.) 4) Die Zahlreihe 1 bis 1000. 5) Die unendliche Zahlreihe. 6) Dezimal- und Bruchzahlen. 7) und 8) Schlußrechnung und deren Anwendungen.

Der im ersten Schuljahre zu behandelnde Rechenstoff zerfällt in zwölf Abschnitte, deren jeder ein Unterrichtsganzes, eine methodische Einheit, bildet. In der ersten methodischen Einheit tritt die Zahl Eins auf, die nachfolgenden methodischen Einheiten entstehen durch Hinzunahme je einer weitern Eins und erscheinen gleichzeitig als Zahlindividuen (wie bei Grube) und Zahlreihen (wie bei Hentschel, Bräutigam, Göpfert u. s. w.). In jedem Abschnitte (jeder Einheit) wird außerdem eine wichtige Rechenoperation, welche in den spätern Abschnitten als bekannt vorausgesetzt wird, behandelt. Alle Rechenoperationen zusammengenommen ergeben das, was als bleibender Besitz in die folgenden Schuljahre mit hinübergenommen werden soll. Dabei tritt jede Rechenoperation, solange sie ein Neues ist, in den Mittelpunkt des Abschnitts. Sie erhält eine Vorbereitung, welche ihre klare Auffassung thunlichst begünstigt, es wird auf ihre sichere Einübung Bedacht genommen, sie wird mit bereits Bekanntem verknüpft und schließlich möglichst vielseitig angewandt. Mit andern Worten: Es werden mit ihr alle Stufen eines psychologisch richtigen Lernprozesses durchlaufen. Als Lehrmittel dient der Tillichsche Rechenkasten (wie bei Bräutigam, Göpfert, Griesmann und Schneyer). Die Beziehungen auf Verhältnisse innerhalb der dem Kinde nicht nur psychologisch, sondern auch räumlich naheliegenden Sachgebiete werden durch dieses Lehrmittel aber keineswegs (wie es z. B. bei den eben genannten Methodikern geschieht) beeinträchtigt. Denn jede der zwölf methodischen Einheiten läßt gleichzeitig mit der ihr eigentümlichen Rechenoperation ein bestimmtes Sachgebiet in den Vordergrund der Übungen treten, welches der Vorbereitung als Ausgangspunkt dient und für die angewandten Aufgaben den wünschenswerten Zusammenhang herbeiführt. Es zerfällt daher jede methodische Einheit in folgende vier Unterabteilungen: A. Sachgebiet. B. Vorübungen: erst innerhalb des Sachgebietes, dann am Tillichschen Rechenkasten. C. Die im Mittelpunkte des Abschnittes stehende Rechenoperation, deren klare Auffassung, Einübung und Verknüpfung mit bereits bekannten Operationen. D. Anwendung des bisher Erlernten unter thunlichster Berücksichtigung des betreffenden Sachgebietes.

Auf der zweiten Stufe werden folgende zwölf Einheiten unterschieden: 1) Wiederholungsaufgaben. 2) Reine Zehner. 3) Zahlreihe 1 bis 20. 4) Zahlreihe 1 bis 30. 5) Zahlreihe 1 bis 40. 6) Zahlreihe 1 bis 50. 7) Zahlreihe 1 bis 60. 8) Zahlreihe 1 bis 70. 9) Zahlreihe 1 bis 80. 10) Zahlreihe 1 bis 90. 11) Zahlreihe 1 bis 100 (erste Abteilung). 12) Zahlreihe 1 bis 100 (zweite Abteilung). Auch auf dieser Stufe wird jeder methodischen Einheit ein bestimmtes Sachgebiet, das dem Kinde psychologisch und räumlich nahe liegt, nebst einer bestimmten Rechenoperation zugewiesen. Ebenso zerfällt jeder Abschnitt in die von der ersten Stufe her bekannten Unterabteilungen: Sachgebiet, Vorübungen (innerhalb des Sachgebiets und am Tillichschen Rechenkasten), Rechenoperation, Anwendungen.

Die dritte Stufe bringt folgende zwölf Einheiten: 1) Wiederholungsaufgaben. 2) Die Fünferreihe. 3) Die Zweierreihe. 4) Die Viererreihe. 5) Die Achterreihe. 6) Die Dreierreihe. 7) Die Sechserreihe. 8) Die Neunerreihe. 9) Die Siebenerreihe. 10) Reihen einiger zweistelligen Zahlen. 11) Messen und Teilen mit Rest. 12) Einführung der Bruchzahlen.

Die vierte Stufe zerfällt in zwölf Einheiten: 1) Wiederholungsaufgaben. 2) Reine Hunderte. 3) bis 6) Hunderte und Zehner. Dabei Einführung der dezimalen Schreibweise. 7) Die Reihen der Zehnerzahlen. 8) und 9) Hunderte, Zehner und Einer. 10) Addition und Subtraktion mit dem Stellenwerte der Ziffern. (Schriftliche Addition und Subtraktion). 11) Erweiterung der Reihen der Grundzahlen und Reihen für 11 bis 20. 12) Multiplikation und Division mit dem Stellenwerte der Ziffern. (Schriftliche Multiplikation und Division.)

Die fünfte Stufe besteht aus folgenden zwölf Einheiten: 1) Wiederholungsaufgaben. 2) Erweiterung der Zahlreihe: a) 1 bis 1000. b) 1 bis 100000. c) 1 bis 1000000. 3) Addition. 4) Subtraktion. 5) Addition und Subtraktion in Verbindung. 6) Multiplikation. 7) Division. 8) Multiplikation und Division in Verbindung. (Schlußrechnung.) 9) Mehrfach benannte Zahlen. (Verwandlung höherer Sorten in niedere.) 10) Mehrfach benannte Zahlen. (Verwandlung niederer Sorten in höhere.)

11) Addition und Subtraktion mit mehrfach benannten Zahlen. 12) Multiplikation und Division desgleichen.

Die sechste Stufe enthält in zwölf Einheiten: 1) Wiederholungsaufgaben. 2) Dezimalzahlen. 3) bis 6) Rechnen mit Dezimalzahlen. 7) Bruchzahlen. 8) bis 12) Rechnen mit Bruchzahlen.

Die siebente und achte Stufe erstrecken sich auf folgende zwölf Einheiten: 1) Wiederholungsaufgaben. 2) und 3) Schlußrechnung. 4) bis 6) Prozentrechnungen. 7) Zu den Grundrechnungsarten (Erweiterungen und Ergänzungen). 8) Zur Schluß- und Prozentrechnung (desgleichen). 9) Für besondere Lebensverhältnisse (Bürgerliches, Landwirtschaftliches, Gewerbliches, Kaufmännisches). 10) Aus andern Unterrichtsfächern (Geschichte und Erdkunde). 11) Aus andern Unterrichtsfächern (Naturkunde, Raumlehre). 12) Ausländische Münzen, Maße und Gewichte.

Eine vergleichende Gegenüberstellung des in unserm „Rechenbuche" und den vorerwähnten Rechenwerken Gebotenen ergiebt folgendes: 1) Das „Rechenbuch" hält an dem Grundsatze fest, daß der Volksschulrechenunterricht nicht darin seine Aufgabe zu suchen habe, sobald als möglich zur unbegrenzten Zahlreihe fortzuschreiten, sondern vielmehr darin, innerhalb der begrenzten Zahlreihen (1 — 10, 1 — 100, 1 — 1000) größtmögliche Sicherheit und Fertigkeit zu erzielen. 2) Zur gründlichen Behandlung der Zahlreihe 1 bis 10 fordert es ein Jahr, das erste Schuljahr; für die Zahlreihe 1 bis 100 werden zwei Schuljahre, das zweite und dritte, für die Zahlreihe 1 bis 1000 ein Schuljahr, das vierte, als nötig erachtet. Dann erst folgt die Behandlung der unendlichen Zahlreihe. 3) Alles Rechnen geht von wirklichen Dingen aus und kehrt zu solchen wieder zurück. Es treten diese Dinge aber nicht in bunter, zerstreuender Mischung auf, sondern es wird in jedem Abschnitte (jeder methodischen Einheit) ein bestimmtes Sachgebiet vorherrschend behandelt. 4) Die Einführung der Münzen, Maße und Gewichte, insbesondere der Währungszahlen derselben, ist eine streng planmäßige, steht überall in Verbindung mit sachlichen Belehrungen und entspricht den jeweiligen Rechenoperationen. 5) Während auf der Unterstufe die Sachgebiete hauptsächlich herangezogen werden, um die Zahlvorstellungen zu erzeugen, handelt es sich auf der Mittelstufe vorwiegend um Kenntnis der Münzen, Maße und Gewichte, auf der Oberstufe aber um weitere Durchdringung einzelner Sachgebiete (Erweiterung der Sachkenntnis) mit Hilfe der erlernten Rechenoperationen. 6) Überall, namentlich aber auf der Unter- und Mittelstufe, sind die Aufgaben so angeordnet, daß der ganze Lernprozeß in psychologisch richtiger Weise verlaufen muß, d. h. es sind für denselben die bekannten „formalen Unterrichtsstufen" möglichst berücksichtigt worden.

Hiernach stimmt das „Rechenbuch" mit Grube darin überein, daß es innerhalb der Zahlreihe 1 bis 10 auf Behandlung von Zahlindividuen Gewicht legt. Es vermeidet aber das Grubesche zerstreuende

Allerlei, indem es sich bei jeder Zahl auf ein bestimmtes Sachgebiet beschränkt, die Würfel des Tillichschen Rechenkastens als konstantes Zwischenmittel heranzieht, nach Gewinnung der Zahlvorstellung sich mit der bis an die neue Zahl reichenden Zahlreihe beschäftigt und eine bestimmte Rechenoperation in den Mittelpunkt der Übungen stellt. Letzteres findet sich zwar auch bei Bräutigam, Göpfert und Schneyer vor. Doch vernachlässigen diese drei Methodiker in ganz auffälliger Weise die Sachgebiete: fast nur der Tillichsche Rechenkasten findet Gnade vor ihren Augen. Dadurch aber bekommt ihr Rechenunterricht etwas Trockenes, Monotones und — was das Bedenklichste ist — die Einführung der Kinder in das Rechnen mit benannten Zahlen, ganz besonders aber die Lösung eingekleideter Aufgaben mit benannten Zahlen, welche bei ihnen erst im dritten und vierten Schuljahre stattfindet, hält dann ungemein schwer.

Was die Begrenzung des Rechenstoffes für das erste Schuljahr betrifft, so halten wir mit Bräutigam entschieden daran fest, daß es das methodisch richtigste ist, die Zahlreihe 1 bis 10 nicht zu überschreiten. Bräutigam sagt: „Vielen scheint der Raum bis 10 nur etwas zu eng und der bis 100 gar zu weit; sie glauben das Richtigste zu treffen, wenn sie als Ziel den Zahlraum von 1 bis 20 festsetzen. Wir schließen uns fest der ersten, verbreitetsten Ansicht an und halten es für einen methodischen Fehler, im ersten Schuljahre über den Zahlraum 1 bis 10 hinauszugehen, denn: 1) ist diese Ordnung die natürlichste Grundlage des ganzen Zehnersystems und sind ja alle größern Zahlen im Grunde nur Wiederholungen dieser ersten Ordnung; 2) bietet dieser Zahlraum bei allseitiger und gründlicher Verarbeitung auch reichlichen Stoff für das erste Schuljahr. — Selbst in Bürgerschulen mit einjährigem Kursus sollte daran festgehalten werden; denn was hier an Zeit durch die Gleichheit der Altersstufe der Schüler etwa gewonnen wird, das dürfte, soweit dies nicht durch eine längere Verarbeitung mit einer größern Schülerzahl zurückgefordert werden sollte, dem übrigen Unterrichte zugute kommen." 24)

Hinsichtlich der Begrenzung des Zahlmaterials für das zweite Schuljahr halten wir zwar auch mit der großen Mehrzahl der Rechenmethodiker an der Zahlreihe 1 bis 100 fest, es zeigt aber unser „Rechenbuch" bezüglich des innern Ausbaues der zweiten Stufe so erhebliche Abweichungen, daß die Zahlreihe 1 bis 100 auch noch die dritte Rechenstufe, also das dritte Schuljahr, für sich beansprucht. Es ist das eine einfache Konsequenz der Einsicht, daß die Zahlreihe 1 bis 100 thatsächlich alle Elemente in sich schließt, welche für das gesamte Volksschulrechnen, mündliches wie schriftliches, von Bedeutung sind, und daß ohne Sicherheit und Fertigkeit in diesen Elementen gute Resultate von dem Rechenunterrichte überhaupt nicht erwartet werden können. Zunächst

24) Bräutigam a. a. O. S. 2. Vergleiche dazu auch das, was später von uns über die Behandlung der Zahlreihe 1 bis 20 als Zwischenstufe bemerkt wird.

handelt es sich um das „Einsundeins", danach um das „Einsvoneins", d. h. um alle möglichen Fälle der Addition und Subtraktion innerhalb der Zahlreihe 1 bis 100. Diese müssen so vollständig von dem kleinen Rechenschüler beherrscht werden, daß derselbe jede einfache und zusammengesetzte Aufgabe nicht nur sicher und geläufig zu rechnen vermag, sondern auch imstande ist, sein Verfahren zu begründen. Läßt sich von einem solchen Können einerseits erwarten, daß es sich als fester Unterbau für den weitern Rechenunterricht bewähre, so liegt in ihm anderseits auch die einzige Möglichkeit vor, den Kindern zum „frohen Fleiße", dieser schönsten Blüte des erziehenden Unterrichts, zu verhelfen. Denn „froher Fleiß" kann sich nur dann beim Kinde einstellen, wenn das Kraftgefühl desselben stetig wächst. Dieses aber hängt wesentlich von der Leichtigkeit, mit welcher das Kind die Elemente des Faches beherrscht, ab. Und solche Leichtigkeit soll sich das Kind nach unserm „Rechenbuche" erwerben, bevor die Zahlreihe über 100 hinaus erweitert wird. Das halten wir für methodisch richtiger, als das gegenteilige Verfahren. Schon deshalb, weil es psychologisch falsch ist, eine neue Schwierigkeit an das Kind herantreten zu lassen, bevor die vorausgehende alte überwunden ist. Es kann aber, sobald man das wahre durchschnittliche Maß geistiger Kraft unserer Volksschüler kennt, keinem Zweifel unterliegen, daß das „Einsundeins" und „Einsvoneins" innerhalb der Zahlreihe 1 bis 100, wenn beide vollkommen beherrscht werden sollen, ausreichenden Stoff für das ganze zweite Schuljahr liefern. Natürlich setzen wir voraus, daß auch hier nicht die trockene abstrakte Zahl allein behandelt, auch nicht das Lehrmittel (Veranschaulichungsmittel) als ausreichend betrachtet wird, sondern daß dem Kinde psychologisch und räumlich naheliegende Sachgebiete als Ausgangs- und Zielpunkte dienen, daß das Lehrmittel nur als Zwischenmittel auftritt, und daß die abstrakte Zahl ihren Zweck erfüllt hat, sobald mit ihrer Hilfe die Rechenoperation in reinster Form aufgefaßt worden ist.

Wenn wir innerhalb der Zahlreihe 1 bis 10 Zahlindividuen in Grubescher Weise auftreten lassen, so kommt das bei der Zahlreihe 1 bis 100 nicht mehr vor. Denn sobald mit den Zahlen gerechnet werden soll, sind dieselben nicht als Individuen, sondern als Glieder der Zahlreihe aufzufassen. Doch stimmen wir auch hierin nicht ganz mit Bräutigam, Göpfert, Schneyer u. a. überein. Diese führen gleich in die ganze Zahlreihe 1 bis 100 ein. Wir entwickeln dieselbe, nachdem das für die Zahlreihe 1 bis 10 Erarbeitete auf die Zehnerreihe 10, 20, 30 . . . 100 übertragen worden ist, in den Abschnitten 1 bis 20, 1 bis 30 . . . 1 bis 100. Am meisten nähert sich hierin das „Rechenbuch" der in den „Schuljahren" durchgeführten Behandlung der Zahlreihe 1 bis 100, wie es überhaupt mit den beiden ersten Teilen der „Schuljahre" mehr Berührungspunkte hat, als mit einem der übrigen Teile.[25]) Es stimmt z. B. ganz mit unserer Auffassung der zweiten Rechenstufe überein,

25) Rein &c. Das zweite Schuljahr, S. 76 ff.

wenn es im „zweiten Schuljahre" heißt: „Das Rechnen im zweiten Schuljahre bewegt sich naturgemäß in dem Zahlraume von 1 bis 100. Aber was soll aus dem immerhin schon reichen Gebiete für diesen zweiten Jahreskursus entnommen werden? Fast durchweg wird in den Lehrbüchern und Lehrplänen für diese Stufe die Durcharbeitung der vier Grundrechnungsarten, mündlich und schriftlich, innerhalb des gedachten Zahlraumes verlangt. . . . Nach unsern Erfahrungen ist das erstgedachte oben angegebene Pensum für das zweite Schuljahr zu umfangreich und wird auch meist gar nicht oder nur scheinbar bewältigt. Ist doch schon die Subtraktion mit gemischten Zehnern für sieben- bis achtjährige Kinder keineswegs so leicht, als es nach den glatten Darstellungen der Rechenanweisungen den Anschein gewinnt. Wieviel Zeit und Mühe beansprucht dann weiter die Entwickelung und Einprägung des Einmaleins, ohne welches die Multiplikationen und Divisionen in der Luft schweben. Und welche Schwierigkeiten bietet nicht das Dividieren mit Resten innerhalb der Zahlen bis 100, wenn mehr als ein bloßes mechanisches Thun erzeugt werden soll! Wir stehen daher nicht an, gegen die allgemein übliche Praxis ein Veto einzulegen und wie für das erste, so auch für das zweite Schuljahr im Interesse einer frischen, gesunden Geistesentwickelung, wie eines gründlichen Rechenunterrichts eine Reduktion des Rechenlehrstoffes für diese Stufe zu fordern."[26])

Neben dem „Einsundeins" und „Einsvoneins" giebt es innerhalb der Zahlreihe 1 bis 100 aber auch ein „Einsmaleins" und ein „Einsdurcheins." Beide sind nicht minder wichtig für das Volksschulrechnen, als die beiden ersten. Und so kann es sich bei ihnen auch nicht nur um eine flüchtige Kenntnis oder um ein mühsames Überlegen und Finden des einzelnen Falles handeln. Sicherheit und Geläufigkeit, vollkommene Beherrschung aller einschlagenden Formen, das ist's, was gebraucht wird. Soll das aber erreicht werden, so bedarf es der Übung, der Übung und abermals der Übung. Jede Übung erfordert natürlich Zeit — und so bietet die Zahlreihe 1 bis 100, wegen ihres „Einsmaleins" und „Einsdurcheins" auch noch ausreichenden Stoff für das g a n z e d r i t t e Schuljahr. „Die Schuld, daß selbst in den Oberklassen gehobener Volksschulen gar häufig eine erschreckende Unsicherheit in den Operationen des ersten Hunderts zutage tritt, liegt allein in dem unsoliden, schwankenden, nicht tief und fest gelegten Untergrunde. Man ist über den ersten Zehner, in dem doch die Präexistenz aller Zahlveränderungen liegt, ebenso schnell hinweggegangen, wie über die Grundaufgaben des zweiten. Man hat versäumt, die Resultate derselben bis zur äußersten Fertigkeit und absoluten Sicherheit einzuüben und gedächtnismäßig einzuprägen. Es fordert eben auch das Rechnen, wie jeder andere Unterricht, seine Memorierstoffe, d. h. ein gewisses Maß positiven Wissens und unverlierbaren Eigentums, ein immer parates Handwerkszeug. Nicht bloß im Einsmaleins und Einsdurcheins, sondern auch im Einsundeins und Einsvoneins muß sofortiges,

---

26) Rein &c. a. a. O. S. 80.

schlagfertiges Können erzielt werden. In dieser völligen Beherrschung der ‚vier Einsen‘, in der fast bewußtlosen, mechanischen Geläufigkeit der elementaren Operationen mit den Grundzahlen, in dem gedächtnismäßigen Angeben aller Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten im Bereiche des ersten Hunderts liegt das ganze Geheimnis aller Rechensicherheit und Rechenfertigkeit in den Operationen mit größern Zahlen.“ 27) Das sind wahrhaft goldene Worte eines erfahrenen Rechenmethodikers, wohl wert, von allen Rechenlehrern beachtet zu werden. Sage aber niemand, daß er sie in rechter Weise beachte, wenn er die abschließende Behandlung der Zahlreihe 1 bis 100 in den Rahmen des zweiten Schuljahres zwängt.

Unser „Rechenbuch“ bestimmt also zwei Schuljahre, das zweite und dritte, für Behandlung der Zahlreihe 1 bis 100 und unterscheidet sich insofern von fast allen übrigen Rechenwerken. Denn selbst die „Schuljahre“, welche doch, wie wir oben gesehen haben, einer sorgfältigen Grundlegung das Wort reden, treten im dritten Schuljahre noch in die Behandlung der Zahlreihe 1 bis 1000 ein. Nur Göpfert und Kehr gehen auch im dritten Schuljahre nicht über 100 hinaus. Während aber Göpfert das Hauptgewicht auf die Behandlung der kleinen Reihen (Einsmaleins und Einsdurcheins) legt und in das Münz-, Maß- und Gewichtssystem einführt, ist bei Kehr als Ziel angegeben: Die vier Spezies im Zahlraume 1 bis 100 in mehrfach benannten Zahlen und zwar im ersten Semester Addieren und Subtrahieren, im zweiten Multiplizieren, Dividieren und Weiterführung des Bruchrechnens.[28]) Auch unser „Rechenbuch“ legt für das dritte Schuljahr das Hauptgewicht auf die Behandlung der Reihen für die Zahlen 2 bis 10, stimmt also mit dem Göpfertschen Gange überein; aber es berücksichtigt auch ein- und mehrfach benannte Zahlen und wendet auf diese alle vier Grundrechnungsarten an, nähert sich also zugleich dem Kehrschen Plane. Über Göpfert und Kehr hinaus weisen der Konzentrationsgedanke, der durch planmäßige Heranziehung bestimmter Sachgebiete zu verwirklichen gesucht wird, sowie die formalen Unterrichtsstufen, welche ohne alle Künstelei bei uns durchgeführt sind. Die Verbindung von Multiplikation und Division führt auf die Bruchzahlen, welche hier zum ersten Male, aber nach dem, was vorhergegangen, in eingehenderer und zusammenhängenderer Weise als anderwärts auftreten. Neuerdings sind uns auch hierin einige Rechenbuchverfasser gefolgt, so z. B. Thieme und Schlosser.

Nach einer Durcharbeitung der Zahlreihe 1 bis 100, wie sie das „Rechenbuch“ fordert, kann die Durcharbeitung der Zahlreihen 1 bis 1000 und weiter nennenswerte Schwierigkeiten nicht mehr bieten. Aber so soll es ja auch sein: das Kind soll zu „frohem Fleiße“ gelangen! Gleichwohl beschränken wir das Pensum des vierten Schuljahres auf die Zahlreihe 1 bis 1000. Einerseits, weil diese Reihe für das mündliche

27) Jänicke a. a. O. S. 411 (erste Aufl.).
28) Praxis 2c. S. 246.

oder Kopfrechnen von hervorragender Bedeutung ist, indem sich ja dieses außer in der Zahlreihe 1 bis 100 vorwiegend in ihr bewegt; anderseits, weil diese Reihe den für die Auffassung unseres Zahlsystems noch fehlenden dritten Hauptbestandteil (die Hunderte) bringt. In jeder der sechsgliedrigen Ordnungen unseres Zahlsystems folgen aufeinander: Einer, Zehner, Hunderte. Die Auffassung dieser Folge ist daher die Grundbedingung der richtigen Auffassung größerer Zahlen überhaupt. Letztere wieder bildet die Vorbedingung für jedes wahrhaft rationelle schriftliche Rechnen. Diesen Punkt aber ins Auge gefaßt, erweist sich die Zahlreihe 1 bis 1000 in hervorragender Weise geeignet, zum schriftlichen Rechnen, d. h. zum Rechnen mit Ziffern, denen ein bestimmter Stellenwert zukommt, überzuleiten. Wir sagen überzuleiten, denn es soll hier keineswegs das schriftliche Rechnen in größerm Umfange auftreten. Damit hat es noch Zeit bis zur nächsten Stufe, für welche die unbegrenzte Zahlreihe, das eigentliche Gebiet des schriftlichen Rechnens, bestimmt ist. Besonders auch deshalb, weil das schriftliche Rechnen nur auf Kosten des mündlichen oder Kopfrechnens an dieser Stelle eingehender behandelt werden könnte.

Um noch einen Punkt hervorzuheben: Manche Rechenmethodiker, so auch die Verfasser der „Schuljahre,“ begründen die Notwendigkeit, die Zahlreihe 1 bis 1000 besonders zu behandeln, namentlich damit, daß sie dieselbe als das Gebiet der großen Reihen, des „großen Einmaleins,“ bezeichnen. Dieses Einsmaleins erachten sie nämlich als von der größten Wichtigkeit für das weitere Rechnen; es soll dem Schüler die spätere Arbeit wesentlich erleichtern. So heißt es z. B. bei Rein: „Welchen Vorteil das große Einmaleins bei der Multiplikation und Division (der schriftlichen sowohl als der mündlichen) bietet, leuchtet sofort ein. Wie kümmerlich wird z. B. eine Division durch 192 ausfallen, wenn der Schüler nicht wenigstens 19 . 1 = 19 bis 19 . 9 = 171 auswendig weiß? Wir haben öfter gesehen, daß einzelne Schüler bei der leidigen Division dieses Hilfsmittels sich ohne Anweisung, vielleicht gegen den Willen des Lehrers, bedienten, indem sie den Divisor 1 bis 9 mal ausrechneten und aufschrieben, bevor sie die Division begannen. Dem Urteile eines ebenso kompetenten Fach- als Schulmannes stimmen wir deshalb vollkommen bei: ‚Die Einführung des großen Einmaleinses in die Volksschule halte ich für einen wesentlichen Fortschritt, welcher nur intensiv, nicht extensiv Vermehrung bringt. Es kann und muß erstrebt werden, daß dann die schriftliche Multiplikation und Division mit den Zahlen 12 bis 19 gerade ebenso ausgeführt wird, wie die mit den Zahlen 2 bis 9.‘ Viele Rechenlehrer der ältern und neuern Zeit haben dieselben oder ähnliche Ansichten.“ [29]) Wir verkennen durchaus nicht die Bedeutung des großen Einsmaleins für das spätere Rechnen, können aber gleichwohl nicht zugeben, daß ohne vollkommene Beherrschung desselben z. B. eine Division durchaus „kümmerlich“ ausfallen müsse. Um bei dem obigen

29) Rein rc., Drittes Schuljahr, S. 161.

Beispiele gleich anzuknüpfen: Eine Division, wie die durch 192, haben wir öfter beobachtet, geht bei dem Schüler viel besser von statten, wenn er angehalten worden ist, sich 192 als 200 — 8 vorzustellen und vorläufig durch 200 zu dividieren, als wenn man ihn in der Neunzehnerreihe auf- und abzusteigen gelehrt hat. Wer überdies weiß, wieviel Zeit erforderlich ist, um die Reihen für 2 bis 9 mit den Schülern bis zu vollkommener Sicherheit und möglichster Geläufigkeit einzuüben, und wie doch trotzdem selbst bei bessern Schülern immer wieder Fehlgriffe vorkommen, der fragt sich gewiß, ob der Nutzen des bis zur „Vollkommenheit“ eingeübten großen Einsmaleins wirklich der aufgewandten Zeit und Mühe entspricht. Wir sind also nicht für eine derartige Behandlung, halten übrigens aber auch dafür, daß eine vollkommene Beherrschung und Ausbeutung des kleinen Einsmaleins, wie wir sie fördern, die von dem großen Einsmaleins erwarteten Vorteile mit in sich schließt. Eine Ausnahmestellung räumen wir aus naheliegenden Gründen den Währungszahlen 12 und 15 ein; auch betonen wir die Reihe für 25.

So vorbereitet, tritt auf der fünften Stufe die unbegrenzte Zahlreihe an den Schüler heran. Es erfolgt die Einführung in dieselbe wieder in Verbindung mit einem geeigneten Sachgebiete, diesmal dem Papiergelde. Und auch jeder der nachfolgenden vier Grundrechnungsarten ist ein besonderes Sachgebiet zugewiesen. Ganz neu sind die Flächenmaße, welche mit der Multiplikation und Division verbunden auftreten. Damit aber wird die planmäßige Einführung in unser dezimales Münz-, Maß-, und Gewichtssystem bis auf die Körpermaße, welche der sechsten Stufe zugeteilt sind, beendet. Die zusammenhängende Behandlung der nichtdezimalen Maße (Zeit- und Zählmaße) giebt insbesondere noch Veranlassung, die Vorbereitung der Rechnung mit Bruchzahlen in zweckmäßigster Weise weiterzuführen. Selbstverständlich kommt auf der fünften Stufe dem schriftlichen Rechnen eine ungleich größere Bedeutung zu als auf den vorhergehenden Stufen. Und deshalb sorgt auch das „Rechenbuch“ dafür, daß jede Rechenoperation an sich volle Berücksichtigung findet. Überall wird das Normalverfahren in den Vordergrund gestellt, und dabei wird es mit der Form äußerst genau genommen. Letzteres bestimmte unter anderm, die ausgeführten Beispiele zahlreicher als sonst üblich auftreten zu lassen.

Über die sechste Stufe, auf welcher Dezimal- und Bruchzahlen im Zusammenhange behandelt werden, haben wir uns oben schon ausführlicher verbreitet. Die siebente und achte Stufe endlich erhält ihre Bedeutung durch eine Reihe neuer und wichtiger Sachgebiete, deren Kenntnis, wie schon einmal bemerkt worden ist, vom Standpunkte der Zahl aus vertieft und erweitert werden soll. Dabei ist namentlich auch der Zusammenhang mit den übrigen Unterrichtsfächern, insbesondere mit Geschichte, Erdkunde, Naturgeschichte und Naturlehre, in ausgiebiger Weise gepflegt worden. Dieses im Sinne Dörpfelds, welcher fordert: „Wo in der Naturkunde, Geographie und Geschichte irgend etwas zur Berechnung sich eignet, da soll man nicht versäumen, es heranzuziehen. . . . .

Dieser nachbarliche Verkehr zwischen dem Rechnen und den Wissensgebieten ist für beide Teile vorteilhaft. Der Vorteil der Wissenfächer besteht darin, daß dort die betreffenden Verhältnisse durch das Hineinleuchten der Zahlen klarer, anschaulicher werden. Es ist ein eigentümlich Ding um die Zahl: es wohnt ihr eine eigenartige Leuchtkraft bei. Bei den Zahlen hört nicht nur — wie man zu sagen pflegt — die ‚Gemütlichkeit' auf, sondern auch das Nebeln und Schwebeln; sie bringen Klarheit, Bestimmtheit — wie sich unten genauer zeigen wird. Der Vorteil des Rechenunterrichts besteht darin, daß er mannigfaltiger, belebter, interessanter wird." [30]) Dabei herrscht auf der siebenten und achten Stufe bezüglich der Rechenoperationen die größte Einfachheit. Im Mittelpunkte derselben steht die Schlußrechnung, diese wird gründlich behandelt und alles Übrige wird auf sie bezogen. So bleiben unserm „Rechenbuche" auch die vielen Namen fern, welche sich anderwärts leider noch immer recht breit machen, und die nicht wenig zur Verdunkelung an und für sich einfacher Verhältnisse beitragen. Alles in allem: die beiden letzten Stufen zeigen in materieller wie formeller Hinsicht eine Durchführung des Konzentrationsgedankens, wie sie andere Rechenwerke bis jetzt nicht aufzuweisen haben. Es wird sich im nächsten Paragraphen Gelegenheit bieten, auf diesen Punkt ausführlicher zurückzukommen.

§ 13.

Die Sachgebiete des Rechnens.

Litteratur. Ackermann, E. Pädagogische Fragen. Nach den Grundsätzen der Herbartschen Schule bearbeitet. Erste Reihe. Dresden 1884. Beetz, K. O. Kritische Beiträge zu den Tagesströmungen im elementaren Rechenunterricht. Gotha 1891. Beetz, K. O. Der vereinfachte Rechenunterricht. Jena 1891. Bergner, M. Materialien zur speziellen Pädagogik von Tuiskon Ziller. (3. Aufl. des Leipziger Seminarbuchs.) Dresden 1886. Conrad, P. Ein Handbuch für den Rechenunterricht. (In: Schweizerische Blätter für Erziehenden Unterricht. 7. Jahrgang.) Frauenfeld 1888. Dörpfeld, F. W. Grundlinien einer Theorie des Lehrplans. Gütersloh 1873. Dörpfeld, F. W. Der didaktische Materialismus. Gütersloh 1879. Dörpfeld, F. W. Evangelisches Schulblatt. 32. Jahrg. 2. Heft. Gütersloh 1888. Grabs, H. Einige wichtige Fragen, betreffend den ersten Rechenunterricht. (In: Deutsche Blätter f. erz. U. 15. Jahrg. Nr. 4. 5.) Langensalza 1888. Grosse, H. Hartmanns methodisches Handbuch für den Rechenunterricht. (In: Ev. Schulblatt. 33. Jahrg. 7. Heft.) Gütersloh 1889. Hartmann, B. Zur Förderung des Rechenunterrichts in der Volksschule. (In: Just, Praxis der Erziehungsschule. 4. Jahrg.) Altenburg 1890. Hartmann, B. Zur Diskussion über den elementaren Rechenunterricht. (In: Neue Bahnen. 2. Jahrg.) Gotha 1881. Heiland und Muthesius, Rechenbuch für Volksschulen. 3. Heft. Ausgabe für Lehrer. Weimar 1892. Herbart, J. F. Pädagogische Schriften. (Ausgabe von Willmann.) 2 Bde. Leipzig 1875. Honke: J. Wie kann das Rechnen zur Veranschaulichung sachunterrichtlicher Verhältnisse dienen? (In: Kehr-Schöppa, Päd. Blätter. Bd. XV.) Gotha 1886. Jetter, J. L. Biblische Rechenaufgaben. (In: Just, Praxis d. Erz.-Sch. 3. Jahrg.) Altenburg 1889. Just, K. Das Rechnen im ersten Schuljahre. (In: Jahrb. d. V. f. wiss. Päd. 9. Jahrg.) Langensalza 1877. Just, K. Konzentration oder konzentrische

30) Dörpfeld, Theorie des Lehrplans. S. 79 f.

Kreise? (In: Jahrb. d. V. f. wiss. Päd. 20. Jahrg.) Dresden 1888. Kaselitz, F. Wie muß sich die Methode des Rechenunterrichts gestalten ꝛc. Kern, H. Grundriß der Pädagogik. 4. Aufl. Berlin 1887. Krusche, G. Beiträge zur Methodik des Rechenunterrichts. (In: Deutsche Bl. f. erz. U. 9. Jahrg.) Langensalza 1882. Lomberg, A. Rechenaufgaben für das 4. Schuljahr im Anschluß an den geographischen Unterricht. (In: Ev. Schulbl. 33. Jahrg. 6. u. 8. Heft.) Gütersloh 1889. Lomberg, A. Sachrechnen. (In: Rein, Päd. Studien. Neue Folge. XI. u. XII. Jahrg.) Dresden 1890/91. Männel, B. Der mathematische Unterricht in der Volksschule. (In: Kehr-Schöppa, Päd. Bl. Bd. XV.) Gotha 1886. Muthesius, K. Über die Stellung des Rechenunterrichts im Lehrplan der Volksschule. (In: 10. Bericht über das Schullehrerseminar zu Weimar.) Weimar 1893. Ranitzsch, H. Der Unterricht in der Volksschule. (Weimarer Seminarbuch.) Weimar 1888. Räther, H. Theorie und Praxis ꝛc. Rein (Pickel und Scheller), Theorie und Praxis ꝛc. Roßbach, F. Über eine notwendige Ergänzung des Rechenunterrichts in der Oberklasse der Mädchenschule. (In: Just, Praxis der Erz.-Sch. 4. Bd.) Altenburg 1890. Roßbach, F. Beiträge zum Rechenunterrichte. (In: Die Mädchenschule. 3. Jahrg.) Bonn 1890. Sachse, L. Rechenunterricht und Rechenbuch. (In: Jahresbericht über das Gymnasium zu Jena.) Jena 1884. Schröter, R. Beiträge zur Methodik des Rechenunterrichts. Wittenberg 1887. Sterner, M. Programm ꝛc. Stucki, G. Das Rechnen im Anschluß an den Real-Unterricht. Bern 1892. Teupser, J. K. Das Rechnen im zweiten Schuljahr. (In: Jahrb. d. V. f. wiss. Päd. 21. Jahrg.) Dresden 1889. Teupser, J. K. Dasselbe. (Fortsetzung und Schluß.) (Ebenda. 23. Jahrg.) Dresden 1891. Thrändorf, Konzentration oder konzentrische Kreise? (In: Barth, Erziehungsschule. 5. Jahrg.) Leipzig 1885. Wendt, H. Die Sachgebiete des Rechnens. (In: Deutsche Bl. f. erz. U. 16. Jahrg.) Langensalza 1889. Wigge und Martin, Die Unnatur der modernen Schule. Leipzig 1888. Wiget und Florin, Vademecum zum vaterländischen Lesebuche. (In: Bündner, Seminarblätter, 5. Jahrg.) Davos 1886. Wilk, E. Allgemeine und besondere Bemerkungen zum Unterricht in der Algebra. (In: Jahrb. d. V. f. wiss. Päd. 23. Jahrg.) Dresden 1891. Ziller, T. Das Leipziger Seminarbuch. (In: Jahrb. d. V. f. wiss. Päd. 6. Jahrg.) Leipzig 1874. Ziller, T. Allgemeine Pädagogik. (2. Aufl. der „Vorlesungen über allgemeine Pädagogik".) Leipzig 1884. Ziller, T. Grundlegung zur Lehre vom erziehenden Unterricht. 2. Aufl. Leipzig 1884.

Die Unklarheiten und Zweifel, welche vordem über die Bedeutung und Aufgabe des Rechenunterrichts herrschten, sind durch Pestalozzi, Herbart und Grube endgiltig beseitigt worden. Der Rechenunterricht wird jetzt allgemein als notwendiger Teil des erziehenden Unterrichts anerkannt. Es bestehen nur noch Unklarheiten und Zweifel über die Mittel und Wege, welche einzuschlagen sind, um der Bedeutung und Aufgabe des Rechenunterrichts in allen Stücken zu genügen. Sie zu beseitigen, blieb den gegenwärtigen und künftigen Methodikern vorbehalten, und es fragt sich höchstens noch: Wer kann und soll die damit ausgesprochene Forderung erfüllen? Der „Pädagog" oder der „Mathematiker"? Darüber gehen die Ansichten zur Zeit allerdings noch auseinander. Aber ohne jeden stichhaltigen Grund, wie leicht einzusehen ist. Denn was hier zu leisten ist, das hat viel weniger die Mathematik als die Pädagogik und deren Hilfswissenschaften zur Voraussetzung. Selbstverständlich geht es ohne mathematisches Wissen und Können nicht ab. Der Pädagog muß die Mathematik mindestens soweit, als sie Schulwissenschaft ist, beherrschen. Wie sehr aber im vorliegenden Falle das pädagogische Element überwiegt, das dürfte schon die bekannte Thatsache lehren, daß ein Mann, dessen mathematisches Vermögen nicht über die

Division mit ganzen Zahlen hinausreichte, der Reformator des Rechenunterrichts werden konnte. Auch dürfte die nicht selten gemachte Erfahrung, daß selbst tüchtige Mathematiker schlechte Rechenlehrer waren, Beachtung verdienen. Andere mögen anderer Meinung sein. Wir halten daran fest: Sobald es gilt, den Rechenunterricht zu einem erziehlichen zu gestalten, ihn also seinem Hauptzwecke entgegenzuführen, da liegt viel mehr eine pädagogische als eine fachwissenschaftliche Arbeit vor.

In gleichem Sinne haben wir schon wiederholt die Aufgabe des Rechenmethodikers gekennzeichnet. Wenn wir hier aber nochmals darauf zurückkommen, so geschieht es in der besondern Absicht, die Art der Behandlung einer neuerdings viel umstrittenen Frage von vornherein zu kennzeichnen: der Frage nach dem Werte oder Unwerte der „Sachgebiete des Rechnens“. Würde diese Frage lediglich oder auch nur vorwiegend fachwissenschaftlich behandelt, es dürfte schwerlich ein befriedigendes Ergebnis erzielt werden. Hat es doch das eigentliche Rechnen streng genommen nur mit Formen und nicht mit Sachen zu thun. Und scheint es doch, als ob die nächste Aufgabe des Rechenunterrichts eher eine Erschwerung als eine Erleichterung erfahren müsse, wenn man den Sachen eine größere Bedeutung als bisher beilege. Erst die pädagogische Behandlung giebt Veranlassung, sich auf das Wesen des einzelnen Unterrichtsfaches zu besinnen, die Beziehungen desselben zu den übrigen Fächern fortdauernd im Auge zu behalten, neben dem allen gemeinsamen Unterbaue auch den gemeinsamen Zweck niemals außer acht zu lassen. Und dieses eben ist es, was wir hier brauchen.

Durch den Unterricht kann zunächst nur ein Wissen erzeugt werden. Soll dasselbe Wert erlangen, so muß es ein klares und lebendiges sein. Soll es die Erreichung des obersten Erziehungszweckes vermitteln helfen, was ja die Hauptsache ist, so muß es zum Interesse für die Gegenstände des Wissens führen. Durch die verschiedenen Unterrichtsfächer soll ein vielseitiges Wissen, das zu einem vielseitigen Interesse führt, erzeugt werden. Immer aber soll unter den einzelnen Zweigen des Interesse Gleichgewicht herrschen: „Gleichschwebende Vielseitigkeit des Interesse“, wie sich Herbart ausdrückt, soll das nähere Ziel des Unterrichts sein. Wie ist das beim Rechnen zu verstehen?

„Das Wort Interesse bezeichnet im allgemeinen die Art von geistiger Thätigkeit, welche der Unterricht veranlassen soll, indem es bei dem bloßen Wissen nicht sein Bewenden haben darf. Denn dieses denkt man sich als einen Vorrat, der auch mangeln könnte, ohne daß der Mensch darum ein anderer wäre. Wer dagegen sein Gewußtes festhält und zu erweitern sucht, der interessiert sich dafür.“ [1]) Hiernach und im Zusammenhange mit andern Stellen versteht Herbart unter Interesse „die innige Hingabe an die Gegenstände des Wissens in Verbindung mit dem anhaltenden Streben, das Gewußte nicht allein festzuhalten, sondern auch

1) Herbart a. a. O. I. S. 533.

immer vollkommener zu gestalten"[2]). Und diese Hingabe und dieses Streben, sie sollen sich auf alle Wissenszweige gleichmäßig verteilen.

Das Interesse kann aber ein doppeltes sein: ein unmittelbares und ein mittelbares. Ersteres wird durch den Gegenstand des Wissens an sich, letzteres durch den Vorteil oder Nachteil, welchen die Beschäftigung mit demselben bringen kann, hervorgerufen. Ist hiernach aber das unmittelbare Interesse das entschieden wertvollere, so hat auch der Unterricht nach ihm vor allem zu streben. Das mittelbare Interesse ist schon mehr ein Begehren und muß, sobald es stärker hervortritt, notwendig zur Selbstsucht und niedrigen Lust führen. Das unmittelbare Interesse allein ist frei von allen Nebenabsichten.

„Nun sind allerdings überall im Leben Mittel zu den Zwecken notwendig, und solcher Mittel bedarf man auch dann, wenn man einen an sich wertvollen Zweck verfolgt. Denn ein jeder muß wegen der Abhängigkeit, worin er zu andern und zur Natur steht, auf die Notwendigkeiten, ja auf die Notdurft des Lebens Rücksicht nehmen und sich danach einrichten. Ein jeder muß auch schon viel früher, als er seine äußern Bedürfnisse wirklich befriedigt, sich dazu fähig gemacht haben, um es einst thun zu können, er muß mit anderen Worten beizeiten die hierfür erforderlichen Kenntnisse und Geschicklichkeiten sich erworben haben. Das mittelbare Interesse ist folglich keineswegs etwas für den Menschen Entbehrliches und Gleichgiltiges. . . Aber damit das Streben nach dem Nützlichen nicht tadelnswert sei, muß das Nützliche nicht nur an sich selbst tadellos sein, sondern auch dem an und für sich Würdigen, das allein herrschen soll, immer dienen. . . Wird das Nützliche nicht so untergeordnet, daß darauf der Wert eines herrschenden, das Wollen und Handeln seinem Endzwecke nach bestimmenden Würdigen sich überträgt, so entstellt und verdirbt es den Menschen, indem es ihn ins Gemeine herabzieht. Darum darf das mittelbare Interesse auch nicht der Zweck des Unterrichts sein." [3])

Das gilt für jeden Unterricht, also auch für den Rechenunterricht. Und so treten hier zwei Fragen an uns heran. Erstens: Ist der Rechenunterricht an und für sich imstande, unmittelbares Interesse zu erzeugen? Zweitens: Wenn nicht, was muß geschehen, um trotzdem auch durch ihn zum unmittelbaren Interesse zu gelangen?

Die erste Frage läßt sich kurz beantworten. Da Formen und Zeichen nicht nur anfangs, sondern auch weiterhin unmittelbares Interesse nur ausnahmsweise wecken, das Rechnen an und für sich aber es mit Formen und Zeichen zu thun hat, so kann bei dem auf sich allein angewiesenen Rechenunterrichte unmittelbares Interesse auch mit nur einiger Sicherheit niemals erwartet werden. Ein großer Irrtum wäre es also, wenn jemand meinte, mit den Rechenstoffen im engern Sinne

2) Hartmann, Die Analyse des kindlichen Gedankenkreises. 2. Aufl. Annaberg 1890. S. 13.

3) Ziller, Grundlegung a. a. O. S. 355 f.

auszukommen. „Die Zeichen (und Formen) sind für den Unterricht eine offenbare Last, welche, wenn sie nicht durch die Kraft des Interesse für das Bezeichnete gehoben wird, Lehrer und Lehrling aus dem Gleise der fortschreitenden Bildung herauswälzt.“ 4)

Anders als mit den Zeichen und Formen verhält es sich mit den Sachen. Diese erregen selbst ohne unterrichtliche Behandlung unmittelbares Interesse. Wievielmehr durch eine solche. Bekannt ist, wie der geschichtliche und naturkundliche Unterricht die Entstehung des unmittelbaren Interesse begünstigt. Damit aber ist auch schon gesagt, wie die zweite Frage zu beantworten ist. Soll das Interesse für die Formen und Zeichen, mit denen es der Rechenunterricht zunächst zu thun hat, zu einem unmittelbaren werden, so müssen dieselben mit Sachen verbunden auftreten. Nicht nur im Anfange, sondern auch weiterhin. Denn geschieht letzteres nicht, so liegt die Gefahr vor, daß das durch den Unterricht erregte unmittelbare Interesse wieder schwindet.

„Selbstredend leisten nicht alle Sachen dieselben Dienste. Stets hat man sein Augenmerk auf solche zu richten, welche schon Bestandteile des kindlichen Gedankenkreises bilden, sei es, daß sie aus Erfahrung und Umgang oder aus andern Zweigen des diese beiden natürlichen Bildungsquellen künstlich erweiternden Unterrichts stammen. Und jeder Lehrer hat schon erfahren, daß ein Unterricht, der sich an den vorhandenen Gedankenkreis wendet und diesen bearbeitet, bei den Schülern die regste Teilnahme findet und dabei die Wahrheit des psychologischen Gesetzes erkannt, daß das Interesse vorab in allem Individuellen wurzelt. Es kann daher nicht zweifelhaft erscheinen, daß ein Unterricht, welcher angewandte Aufgaben, einem dem Kinde geistig naheliegenden Sachgebiete entnommen, den Aufgaben mit reinen Zahlen vorausschickt, die Weckung des Interesse unendlich leichter vollbringt, als ein solcher, der umgekehrt verfährt“. 5)

So dient also die Verbindung des Rechnens mit geeigneten Sachgebieten dazu, demselben das unmittelbare Interesse des Zöglings zuzuwenden, d. h. dieses Interesse für die Rechenstoffe im engern Sinne rege zu machen. Das aber ist ein großer Gewinn. Deshalb, als ja nicht ausbleiben kann, daß daraus umgekehrt auch für die Sachgebiete sich sehr beachtenswerte Vorteile ergeben.

Die Sachgebiete treten in den sachunterrichtlichen Fächern der Schule auf, in der Naturkunde, Erdkunde, Geschichte, auch der biblischen Geschichte. Sie erscheinen ferner in den mancherlei Gewerben, den Industrieen, dem Handel und jedweden auf Förderung menschlicher Interessen gerichteten Verkehre. Für alle aber gilt, was Dörpfeld sagt: „Wo in der Naturkunde, Geographie und Geschichte irgend etwas zur Berechnung sich eignet, da soll man nicht versäumen, es heranzuziehen. . . Dieser nachbarliche Verkehr zwischen dem Rechnen und den Wissensgebieten ist für beide Teile vorteilhaft. Der Vorteil der Wissensfächer (der Sachgebiete) besteht

4) Herbart a. a. O. I. S. 410.
5) Conrad a. a. O. S. 5.

darin, daß dort die betreffenden Verhältnisse durch das Hineinleuchten der Zahlen klarer, anschaulicher werden. Es ist ein eigentümlich Ding um die Zahl: es wohnt ihr eine eigenartige Leuchtkraft bei. Bei den Zahlen hört nicht nur — wie man zu sagen pflegt — die ‚Gemütlichkeit' auf, sondern auch das Nebeln und Schwebeln; sie bringen Klarheit, Bestimmtheit, wie sich unten genauer zeigen wird. Der Vorteil des Rechenunterrichts besteht darin, daß er mannigfaltiger, belebter, interessanter wird".[6])

Demselben Gedanken begegnen wir bei Ziller in folgender Stelle: „In demselben verwandten und untergeordneten Verhältnis, in welchem Sprache und Litteratur zur historischen Seite des Unterrichts stehen, steht die Mathematik zu der naturwissenschaftlichen Seite desselben . . . Die Mathematik ist ja die formale Seite der Naturwissenschaft. Zahl, räumliche Gestalt und Bewegung, diese mathematischen Grundformen, kommen in der That bei allen Naturgegenständen und Naturerscheinungen vor, und diese können nicht scharf und deutlich aufgefaßt werden, wenn nicht zugleich gezählt, gemessen und gewogen, wenn nicht Gestalt und Bewegung genau bestimmt, wenn nicht das Formale der Art mindestens nach dem Mehr oder Weniger, Größer oder Kleiner, Näher oder Ferner u. s. w. sorgfältig geschätzt wird. Die darauf bezüglichen Vorstellungen sind den naturkundlichen daher ursprünglich beigemischt, die qualitativen naturkundlichen Vorstellungen können folglich ohne die formalen, die mathematischen, nicht in ein richtiges Verhältnis zu dem ethisch-religiösen Ziele des Unterrichts gesetzt werden, und die mathematischen Vorstellungen sondern sich auch von jenen erst allmählich ab, wie sich die Vorstellungen der Muttersprache allmählich von allen übrigen Gedankenkreisen absondern, um einen besondern Gedankenkreis zu bilden".[7])

Wie aller Unterricht, so hat auch der Rechenunterricht, soll er den Forderungen der Psychologie genügen, von der Anschauung auszugehen. Fragen wir aber, was angeschaut werden kann und soll, so treffen wir abermals auf die Sachen. Wir dürfen daher auch gleich bestimmter setzen: Der Rechenunterricht hat von geeigneten Sachgebieten auszugehen! Das gilt für den gesamten Volksschul-Rechenunterricht, ganz besonders aber für den Anfang desselben, für die Zeit, in welcher die Zahlvorstellungen und einfachen Zahlverknüpfungen (Rechenoperationen) gewonnen werden sollen. Denn die Zahl ist ein Abstraktum, der Zahlbegriff ein Beziehungsbegriff, welcher dem Kinde nicht als etwas Fertiges dargeboten werden kann. Die Zahlvorstellungen wollen erworben sein. Da nun die Zahlbildung, wie wir später sehen werden, eine recht zusammengesetzte Geistesarbeit ist, so will für den naturgemäßen Verlauf derselben auch recht gut gesorgt sein. Dieses aber wird nur durch angemessene Verwertung geeigneter Sachgebiete möglich. „Die Zahlvorstellungen an sich haben keinen realen Vorstellungsinhalt. Sie drücken nur Beziehungen der verschiedenen Sachvorstellungen zu einander aus, sind darum eng mit

---

6) Dörpfeld, Grundlinien a. a. O. S. 79.
7) Ziller, Allgemeine Pädagogik a. a. O. S. 220.

diesen verknüpft und können nur begrifflich von ihnen getrennt werden, woraus schon erhellt, daß schon zum bloßen Kennenlernen jener (räumlichen und zeitlichen) Größenverhältnisse ihre Verknüpfung mit den Sachvorstellungen nicht unberücksichtigt bleiben darf, weil sonst eine begriffliche Abstraktion nicht erfolgen könnte".[8])

Das sind die hauptsächlichsten psychologischen Gründe, welche die Verbindung des Rechnens mit den Sachgebieten in unserm Sinne nicht allein rechtfertigen, sondern fordern. Es sprechen aber auch ethische Gründe für diese Verbindung. Sie ist nötig, weil sich der sittliche Charakter bethätigen soll.

Unter Charakter verstehen wir ein entschiedenes Wollen (oder Nichtwollen), welches unter gleichen Verhältnissen dasselbe bleibt. Der Charakter findet sonach im Wollen seinen Ausdruck. Die Vorstufe des Wollens ist das unmittelbare Interesse. Soll sich aber der Charakter im Leben, im Verkehre mit Natur und Menschenwelt als sittlicher Charakter bethätigen, worauf es schließlich doch ankommt, so ist zweierlei erforderlich: Klare Einsicht in die Schönheit und den Wert der ethischen Gesetze und ein sicheres Urteil über die Möglichkeit ihrer Verwirklichung. Jene kann und soll der Gesinnungsunterricht zeitigen. Dieses wird erlangt, wenn der Mensch die Mittel und Kräfte, welche fördernd oder hemmend auf seine Handlungen wirken, genau kennen und gebrauchen lernt. Wo aber sind diese Mittel und Kräfte zu suchen? „Aus dem Umstande, daß die Größenverhältnisse nur die formelle Seite eines realen Vorstellungsinhaltes sind, folgt, daß ihre Wirkungen auf das menschliche Handeln nur in ihren Verknüpfungen mit Sachverhältnissen beruhen und daher auch diese Wirkungen nur durch eine genaue Betrachtung jener Verknüpfungen erkannt werden können. Auch im Hinblicke auf das nachahmende Wollen, welches der erziehende Unterricht anzustreben sucht, ist demnach die Einsicht in die Verknüpfungen der Größenverhältnisse mit den entsprechenden Sachverhältnissen eine unbedingte Notwendigkeit".[9])

Daß die das menschliche Handeln beeinflussenden Mittel und Kräfte zum großen Teile außerhalb des handelnden Individuums, und zwar in der äußern Natur liegen, ist bekannt. Daß es aber sehr falsch wäre, daraus zu folgern, es sei nun lediglich Sache des naturkundlichen Unterrichts, für alles weitere Sorge zu tragen, kann nicht genug betont werden. Die alleinstehende Naturkunde vermag da ebensowenig, wie der alleinstehende Rechenunterricht. Nur verbunden leisten beide, was zu leisten ist.

„Wie aber die Sprachkunde an die Geschichte, so muß sich die Mathematik an die Naturwissenschaften anschließen. Denn ohne durch diese zusammengefaßt und zusammengehalten zu werden, zerfallen die Naturkenntnisse in Bruchstücke. So muß man schon von rein wissenschaftlichem Standpunkte aus über das Verhältnis der Mathematik zur Naturwissenschaft urteilen, und das geschieht von allen Kennern. Am wenigsten kann

8) Rein ꝛc. a. a. O. 1. Schuljahr S. 270.
9) Rein ꝛc. a. a. O. S. 270.

uns aber da mit Bruchstücken gedient sein, wo ein Totaleffekt erreicht werden soll, damit das Wissen zum Wollen werde. Freilich darf man nicht daran denken, auf allen Stufen des Unterrichts oder in allen Schulen eine solche mathematische Behandlung des naturwissenschaftlichen Stoffes eintreten zu lassen, wie sie die wissenschaftliche Physik, die wissenschaftliche Mechanik und Astronomie fordern. Es sollen auch keineswegs in einen jeden naturkundlichen Unterricht die streng wissenschaftlichen Formeln und Ausdrücke eingeführt werden. Aber wenigstens an scharfen, genauen Bestimmungen durch Zählen, Messen, Wägen bei der Betrachtung der Gestalten darf es nirgends, auch nicht in der Volksschule, bei dem naturkundlichen Unterrichte fehlen, insoweit muß immer die Mathematik zu Gebote stehen und benutzt werden, welche die formale Seite der Naturwissenschaft in dreifacher Hinsicht, in Bezug auf Zahl, Gestalt und Bewegung ist".[10])

Wie sehr Mathematik und Naturkunde, wenn sie der Bethätigung des Charakters dienen sollen, auf einander angewiesen sind, erhellt auch noch aus folgendem Grunde. Jedes menschliche Handeln ist an Zeit und Raum gebunden. Zielbewußtes, festes Handeln hat deshalb die klare Erfassung der Beziehungen zwischen dem menschlichen Handeln und den räumlichen und zeitlichen Verhältnissen zur Voraussetzung. Da es jedoch die Naturkunde nur mit der qualitativen, die Mathematik nur mit der quantitativen Seite des in Raum und Zeit vorkommenden Mannigfaltigen zu thun hat, so bildet das eine Fach in der That die notwendige Ergänzung des andern.

Daß dem so ist, sagt uns das vielgestaltige Menschenleben mit seinem Mühen um das materielle Wohl ja auch selbst. Denn die mancherlei Berufsarten, die Gewerbe, die Industrieen, der Handel und jedweder Verkehr, alles, was zunächst die materiellen Interesse fördern soll, es weist auf diesen Zusammenhang hin. Da sich aber der Charakter des Zöglings besonders im praktischen Leben bethätigen soll, wie könnte die Erziehungsschule auf ebendiesen Zusammenhang verzichten? Es ist sicher so, erst die planmäßige Verbindung mit den Sachgebieten befähigt den Rechenunterricht, auf das praktische Leben in zweckmäßigster Weise vorzubereiten. Und es wird auch dadurch erst den Absichten voll und ganz entsprochen, welche mit bestimmten, den Rechenunterricht in den Lehrplan der Volksschule aufzunehmen. „Eine wahrhaft praktische Fertigkeit soll sich der Schüler aneignen. Sie ist für sein späteres Fortkommen unentbehrlich, und jede Unfähigkeit in dieser Kunst straft sich empfindlich. Um dieses Ziel zu erreichen, muß der Rechenunterricht den Rechenstoff genau so nehmen, wie ihn das Leben bietet. Nun kommen im Leben Zahlen und Rechenoperationen niemals selbständig, isoliert und inhaltsleer vor, sondern sie treten in steter Verbindung mit Vorstellungen sachlichen Inhalts auf; dürre, nackte und tote Formen kennt das Leben nicht, alle

10) Ziller, Grundlegung a. a. O. S. 275.

Zahlen haben Bezug auf Sachverhältnisse. Das Schulrechnen, welches auf das Leben vorbereiten soll, muß daher seinem Zwecke gemäß auf diese Verbindung volle Rücksicht nehmen. Es darf nicht Zahl und Sache auseinanderziehen und jene für sich allein bearbeiten. Denn dann bildete sich ein isoliertes Wissen, eine mechanische Fertigkeit, die im Leben sich nicht zu helfen wüßte. Die konsequente Verknüpfung von Zahl und Sache dagegen macht den Geist praktisch, den Kopf anstellig. Die praktische Nützlichkeit des Rechnens tritt unmittelbar hervor; der Schüler begreift, warum man das Rechnen lernen und wozu man es brauchen soll. Er bekommt Respekt vor den Zahlen; er lernt einsehen, wie die unerbittliche Logik des Rechnens in alle Verhältnisse des Lebens einschneidet. Das nimmt ihm die überspannten Vorstellungen hinweg, schützt ihn vor Irrtum und Waghalsigkeit und erzieht ihn zur nüchternen Besonnenheit".[11])

Ist aber die Verbindung des Rechnens mit geeigneten Sachgebieten die rechte, so stellt sie sich schließlich auch — und zwar in bewußter Weise — in den Dienst der Konzentrationsidee. Nach dieser ist es bekanntlich Aufgabe jedes Unterrichtsfaches, dafür Sorge zu tragen, daß die Einheit des Gedankenkreises des Zöglings gewahrt bleibe. Im Rechnen aber geschieht dieses am besten durch den Anschluß an solche Sachgebiete der Natur und des Menschenlebens, welche dem kindlichen Verständnisse bereits erschlossen worden sind und welche das kindliche Interesse schon für sich haben. Wesentlich gefördert wird daher die Einheit des Gedankenkreises durch gleichzeitige oder vorgängige Behandlung derselben Stoffe, welche der Rechenunterricht verwertet, im Sachunterrichte.

Sehr vorteilhaft erweist sich das Verweilen bei ein und demselben Sachgebiete namentlich auch für die einzelnen Aufgabengruppen. Zwar könnte es scheinen, es habe sich das „Sachallerlei" in den Volksschulen bewährt, weil es die Regel in der Mehrzahl der Volksschul-Rechenbücher bildet, und manche Rechenlehrer sind vielleicht heute noch der Ansicht, daß die Abwechslung in den Sachgebieten erfrischend wirke; allein es gilt hier dasselbe, was Ziller von den unvermittelten, raschen Übergängen aus einem Gedankenkreise in den andern überhaupt sagt: „Es darf nicht ein rascher Übergang aus einem Gedankenkreise in den andern, eine rasch wechselnde Beschäftigung bald mit einem Gegenstande des einen, bald mit einem Gegenstande des andern Gedankenkreises stattfinden. Dies übt wohl anfangs einen Reiz aus und scheint eine Steigerung der Kräfte herbeizuführen. Aber die Abspannung und Erschlaffung kann nicht ausbleiben, weil zu verschiedenartige Stoffe zusammenkommen, und der Gegensatz der Kräfte Hemmungen aller Art herbeiführt. In der That muß von Anfang des Unterrichts an auf Einheitlichkeit des Gedankenkreises und der von den Interessen abhängigen Gefühlsstimmung in jeder Lehrstunde streng gehalten werden; denn Klarheit, Aufmerksamkeit und die Spannung des Interesses verringern sich notwendig, wenn zu

11) Lomberg, Sachrechnen a. a. O. S. 213.

heterogene Vorstellungen und Vorstellungsbewegungen sich berühren".[12]) Das „Sachallerlei" ist ein flüchtiges Reizmittel, kein nachhaltiges Nahrungsmittel.

Eine Konzentration, wie sie Ziller insbesondere für das Rechnen vorschwebte, wird zwar nicht so bald, wenn überhaupt, zustande kommen. Setzt sie doch die Annahme seiner beiden andern Ideen, besonders der viel umstrittenen Kulturstufenidee, voraus. Trotzdem wird es keine verlorene Mühe sein, auch der Zillerschen Konzentrationsidee weiter nachzudenken, denn die Verwirklichung der Konzentrationsidee überhaupt ist und bleibt eine der vornehmsten Aufgaben der heutigen Pädagogik, weil von ihr hauptsächlich die Einwirkung des Unterrichts auf die Einheit des Gedankenkreises des Zöglings abhängt. Und ohne diese Einheit ist ein wahrhaft sittlicher Charakter doch überhaupt nicht denkbar.

Überblicken wir nach diesem das Gefundene noch einmal, so ergiebt sich, daß dem Anschlusse des Rechnens an geeignete Sachgebiete allerdings ein hoher Wert zukommt. Denn durch diesen Anschluß wird:

a) das unmittelbare Interesse auch für die Rechenstoffe im engern Sinne geweckt;

b) größere Klarheit und Bestimmtheit für die Sachgebiete selbst erzielt;

c) der psychologische Gang des Rechenunterrichtes begünstigt;

d) die Bethätigung des sittlichen Charakters angebahnt;

e) die Verwirklichung der Konzentrationsidee gefördert.

Zugleich zeigt diese Zusammenfassung den Unterschied, welcher zwischen dem Sachrechnen Erzingers, Goltzsch' u. a. und der Verwertung der Sachgebiete des Rechnens vom Standpunkte des „erziehenden Unterrichts" aus besteht.

Wir behaupten natürlich nicht, daß eine Berücksichtigung der Sachgebiete im Rechenunterrichte erst ganz neuerdings, geschweige durch uns allein, stattgefunden habe. Zeigt doch unser Abriß der Geschichte des Rechenunterrichts, daß schon seit den Zeiten des vielgenannten Annaberger Rechenmeisters, Adam Ries, einzelne Methodiker dem Gegenstande ihre Aufmerksamkeit widmeten. Aber der neuern und neuesten Zeit blieb es vorbehalten, die pädagogische Bedeutung des Anschlusses des Rechnens an Sachgebiete gebührend zu würdigen. Und darauf wollen auch unsere Litteraturangaben hinweisen. Dieselben besagen, daß es besonders der Herbartschen Pädagogenschule angehörige Rechenmethodiker waren, welche, von dem Konzentrationsgedanken ausgehend, diese Bedeutung hervorhoben. Nicht wenige derselben haben sich dabei in praktischen Ausführungen versucht. Und so besitzen wir, Dank der Bemühungen derselben, heute schon ein wertvolles Material, auf dem sich weiterbauen läßt.

---

12) Ziller, Allgem. Päd. S. 228.

Die Grundlagen finden wir natürlich bei Herbart selbst. Da heißt es: „Der pädagogische Wert des gesamten mathematischen Unterrichts hängt hauptsächlich davon ab, wie tief derselbe in das Ganze des Kreises der Gedanken und Kenntnisse eingreife. Manche reizt schon die reine Mathematik, besonders wenn Geometrie und Rechnung gehörig verbunden werden. Aber sicherer wirkt angewandte Mathematik, wenn der Gegenstand der Anwendung schon das Interesse für sich gewonnen hat. Dafür muß auf anderem Wege gesorgt sein.“[13]) Darauf aber hat namentlich Ziller fortgebaut.

Neben den bereits angezogenen Aussprüchen Zillers erscheinen noch folgende bemerkenswert: „Aber auch im gemeinen Rechnen ist nicht in der Weise Fertigkeit im Gebrauche der Zahlen und in der Lösung von Rechenaufgaben zu erzielen, daß der Stoff als eine unwesentliche Einkleidung erscheint. Vielmehr handelt es sich darum, daß der Zögling die Zeit- und Raumverhältnisse des wirklichen Lebens, der Geschichte und Natur, die Beziehungen des einzelnen zum Verkehre, zur Gesellschaft, zum Staate, die auf quantitative Bestimmungen führen (was sehr wesentliche Seiten von Natur- und Menschenwelt sind) auffassen lernt.“[14]) Ferner: „Damit aber die Gegenstände um so leichter als ein Empfundenes und Belebendes in das Gemüt eindringen, muß Mathematisches, Sprachliches und überhaupt aller Unterricht über Zeichen und Formen aufs engste an Gesinnungs- und Naturverhältnisse angeschlossen werden, weil dafür das Interesse am frühesten erwacht, und alles Fremde und Entlegene in der Menschen- und Naturerkenntnis, überhaupt alles Synthetische an das Individuelle, weil darin ein ursprüngliches lebendiges Gefühl wohnt.“[15]) Dann: „Der Stoff der Sprache und Mathematik als solcher steht in einem ähnlichen Abhängigkeitsverhältnis zu den Realien, den Sachen des Unterrichts, wie die Erscheinungswelt zu dem ihr zu Grunde liegenden Reellen oder Realen. Die Abhängigkeit bewirkt, daß ursprünglich dem sprachlichen und mathematischen Stoffe als solchem ein mittelbares, dem naturkundlichen und geschichtlichen Stoffe, sowie dem durch Sprache und Zeichen dargestellten, ein unmittelbares Interesse entgegenkommt. Nur bei Sprach- und mathematischen Talenten scheint das anders zu sein, weil bei ihnen die Heraussonderung des sprachlichen und mathematischen Gedankenkreises aus dem historischen und naturkundlichen rascher erfolgt, ja der Schein entsteht, als ob bei ihnen jene beiden Gedankenkreise von Anfang an isoliert beständen und folglich auch ein Gegenstand eines unmittelbaren Interesses wären, was sie in der That bei allen Zöglingen werden sollen; denn alle Teile des Gedankenkreises sollen ja in einem gleichschwebenden Verhältnisse zu den sittlich-religiösen Zwecken stehen. Werden aber die beiden Gedankenkreise voreilig, also vor ihrer Aussonderung aus den Gedankenkreisen, denen sie ursprünglich angehören,

13) Herbart, Umriß a. a. O. II. S. 626.
14) Ziller, Grundlegung S. 281.
15) Ziller a. a. O. S. 157.

als isolierte Vorstellungsmassen behandelt, wie schon im Mittelalter durch die Trennung des Trivium und Quadrivium, so entsteht ein Druck auf den Geist des Zöglings, weil bei ihm ein Teil des Gedankenkreises für sich leisten soll, was er nur in Verbindung mit einem andern Gedankenkreise zu leisten vermag. Die Beschäftigung fällt dann dem Zöglinge zur Last, die er nur so lange trägt, als er sich ihr aus andern Gründen nicht zu entziehen vermag."[16])

Auf die Arbeiten der Sachrechenmethodiker, welche eine Gruppe für sich bilden, gehen wir hier nicht wieder ein,[17]) sondern wenden uns gleich zu den einschlägigen Beiträgen von Kaselitz (1867), Dörpfeld (1873), des Leipziger Seminarbuchs (1874), von Just (1877) und Krusche (1882).

Kaselitz äußert unter anderm: „Da im Leben überhaupt Zahlvorstellungen und Zahlverhältnisse nie isoliert vorkommen, sondern stets nur in Verbindung mit Vorstellungen sachlichen Inhalts irgend einer Art: so kann wenigstens darüber gar kein Zweifel obwalten, daß der Rechenunterricht sich auch auf die Sache und auf Sachverhältnisse erstrecken müsse. Dieser Sachunterricht muß dem Kinde verhelfen zur Kenntnis des Wortes der verschiedenen Dinge der Außenwelt, des Gebrauches, der im Leben von ihnen gemacht wird, und der davon abhängigen Wertbestimmung derselben. Das Kind muß belehrt werden über alle Arten Maße, Münzen und Gewichte, über die Abhängigkeit des Wertes der Arbeit von Kraft und Zeit, über Miete, Pacht, Zinsen u. s. w., und zwar nicht bloß, weil das Leben gebieterisch diese Forderung an die Schule stellt, sondern weit mehr noch, weil die Übereinstimmung der Einsicht und des Handelns zur Sittlichkeit gehört, unser Handeln sich aber in letzter Instanz immer auf andere bezieht und bedingt ist durch die richtige Auffassung und Anschauung des Verhältnisses, in welchem wir zu andern stehen. Daher muß sich der Mensch Einsicht darüber verschaffen, in welchem Verhältnisse er zu andern steht. Diese Einsicht ist aber bedingt durch eine richtige Wertschätzung der verschiedenen Dinge der Außenwelt und ihrer Beziehungen zu- und aufeinander. Diese richtige Wertschätzung der verschiedenen Dinge der Außenwelt und ihrer Beziehungen zu- und aufeinander wird aber wiederum gewonnen durch einen mit Übungen im Zahlbilden verbundenen Sachunterricht. Auch die Erweiterung und Vervollständigung der Sachkenntnisse ist darum ein vollberechtigtes Ziel des Rechenunterrichts in der Volksschule."[18])

Von Dörpfelds Forderungen war schon oben die Rede. Sie treten bei demselben aber auch noch in knapper Zusammenfassung in einem „Grundsatze" auf: „Auch das anscheinend isolierte Rechnen und die Kunstfertigkeiten (Singen und Zeichnen) müssen sowohl um ihrer selbst als um der

16) Ziller, Päd. S. 225.
17) Vergl. S. 102 ff.
18) Kaselitz a. a. O. S. 6.

Wissensfächer (des Sachunterrichts) wollen zu diesen letztern in enge Beziehung treten." [19])

Im „Leipziger Seminarbuche", welches unter Zillers Leitung erschien, heißt es: „Beide Disziplinen (Rechnen und Geometrie) sind stets von den Sachgebieten (Gesinnungs- und naturkundlichen resp. geographischen Stoffen) aus durchzuarbeiten, denen sie genauere Bestimmungen in Bezug auf die formale Seite der Natur beifügen. Dadurch gewinnen die Sachgebiete an Bestimmtheit und Deutlichkeit und die Disziplinen selbst an Interesse. Im Rechnen ist daher von der sogenannten benannten Zahl zur unbenannten überzugehen (wo z. B. ausführlich von Landwirtschaft die Rede ist, bezieht sich auch das Rechnen zweckmäßig darauf), und die Geometrie hat zum Beispiel von dort vorkommenden Formen (in der Schulstube, an Gebäuden, Geräten u. s. w.) die Gesichtspunkte herzunehmen, nach denen die Betrachtung fortschreiten muß . . . Wenn aber auch die Konzentrationsstoffe zu den Sachgebieten hinführen, so ist doch immer von den analogen Verhältnissen des Individualitätskreises und der darin enthaltenen Bedürfnisse auszugehen. Der Zögling darf also nicht etwa mit Überspringung derselben in ganz entlegene und völlig fremdartig scheinende Sphären versenkt werden." [20])

Just, ein hervorragender Schüler Zillers, hat in diesem Sinne „das Rechnen im ersten Schuljahre" bearbeitet. Er sagt da einleitend: „Nachstehende Bearbeitung des Rechnens im 1. Schuljahre geht von dem Grundsatze aus, daß das Rechnen die Sachgebiete zu bearbeiten hat, welche im Leben oder im anderweitigen Unterrichte des Kindes vorkommen . . . So lange man dieser Forderung nicht nachkommt, so lange werden auch die Klagen dauern über Interesselosigkeit und ungenügende Erfolge in dem Gebiete des Rechnens. Denn die Sachgebiete sind es, von denen aus dem Kinde die apperzipierenden Vorstellungen kommen, ohne welche das Lernen unmöglich ist. Die Sachgebiete sind gewissermaßen die heimatlichen Sphären im Geiste des Kindes, welche allein die nötige Sicherheit verleihen, wenn die Aufmerksamkeit auf Neues und Fremdes gelenkt werden soll. Auf sie muß stets zurückgegangen werden, wenn irgend eine Schwankung, irgend eine Verirrung innerhalb der abstrakten Zahlreihen vorkommt. Die Sachgebiete gehören einmal den übrigen Unterrichtsfächern an. Sie werden sowohl dem Gesinnungsunterrichte als der Geographie und Naturkunde entnommen werden können. Besonders aber liegen die Sachgebiete für das Rechnen innerhalb der heimatlichen Verhältnisse, die von dem Kinde ein Zählen und Rechnen verlangen." [21])

Krusche, welcher sich über „Mängel im angewandten Rechnen" verbreitet, bemerkt unter anderm: „Bei vergleichender Durchsicht einer großen Zahl von angewandten Aufgaben in Hand- und Übungsbüchern

19) Dörpfeld a. a. O. S. 10.
20) Seminarbuch a. a. O. S 202.
21) Just a. a. O. S. 183.

treten besonders zwei Mängel auf, welche nicht nur dem Zwecke des Rechnens, sondern auch der Bildung des Gedankenkreises der Schüler überhaupt in hohem Grade nachteilig sein müssen. Es sind dieses: 1. die Zusammenhäufung von Aufgaben aus allen möglichen Gebieten des Wissens und Könnens mit zum Teil unmöglichen Voraussetzungen — Konglomerat. ... Ein zweiter Grund für die angeführten Erscheinungen ist in der herkömmlichen Stellung des Rechnens als eines isolierten Unterrichtsfaches vorhanden. Alle jene Bestimmungen lassen den Gedanken vermissen, daß jedes Unterrichtsfach Anknüpfungen an das angrenzende zu gewinnen suchen muß, also auch das Rechnen (so weit als thunlich) in engen Zusammenhang mit den Sachgebieten, in welchen der Schüler unterrichtet wird, treten muß. Denn die Fertigkeit im Gebrauche der Zahlen und in der Lösung der Rechenaufgaben ist nicht in der Weise zu erzielen, daß der Stoff als eine zufällige oder willkürliche Einkleidung erscheint, wie dies bei der oben bezeichneten Art der Aufgabensammlungen thatsächlich der Fall ist. Vielmehr handelt es sich vor allem darum, daß der Zögling die Zeit- und Raumverhältnisse des Lebens, der Geschäfte und Natur, die Beziehungen des Einzelnen zum Verkehr, zur Gesellschaft, zum Staate, die auf quantitative Bestimmungen führen (was sehr wesentliche Seiten von Natur und Menschenwelt sind) auffassen lernt."[22])

Weiterhin mehren sich die der Verwertung von Sachgebieten im Rechnen zustimmenden Erklärungen der Rechenmethodiker in rascher Folge, und wir dürfen uns daher auf die beachtenswertesten derselben beschränken. Als solche betrachten wir die Beiträge von Rein, Pickel und Scheller (1881), Ackermann (1884), Sachse (1884), Thrändorf (1885), Honke, Wiget und Florin (1886), Kern (1887), Conrad, Grabs, Just, Wigge und Martin, Wendt (1888), Grosse, Lomberg, Wendt, Teupser (1889), Wilk, Roßbach (1890), Beetz, Sterner, Stucki, Räther (1891), Heiland und Muthesius (1892) u. a. m.

Bei Rein (Pickel und Scheller) haben wir es bekanntlich mit dem ersten größern Versuche, die Herbart-Zillersche Pädagogik in die Volksschulpraxis einzuführen, zu thun. An Stelle des bisherigen „Lehrplanaggregats" soll ein „Lehrplansystem" treten. Deshalb erfolgt die Stoffauswahl und Stoffanordnung nach kulturhistorischen Stufen, die Verbindung der Lehrfächer nach der Konzentrationsidee und die Bearbeitung des Lehrstoffes nach den Formalstufen. Auch das Rechnen wird durch die Konzentrationsidee beeinflußt. Schon für das erste Schuljahr gilt: „Das Rechnen wird an die behandelten Sachgebiete des Gesinnungsunterrichts und der Naturkunde angeknüpft."[23])

Ackermann kommt in seiner Abhandlung „Über die Konzentration des Unterrichts" zu folgendem Ergebnisse: „Rechnen und Formenlehre haben in erster Linie den konkreten Stoff, dessen sie bedürfen, dem Sachunterrichte, das Fehlende aber dem kindlichen Erfahrungskreise zu ent-

---

22) Krusche a. a. O. S. 401.
23) Rein rc. a. a. O. 1. Schuljahr S. 86. Vgl. auch oben S. 179.

nehmen." 24) In der vorausgehenden Begründung sagt er unter anderm: „Nimmt man den konkreten Stoff, dessen die Größenlehre, in unserm Falle das Rechnen und die Formenlehre, bedarf, vorzugsweise da, wo er sich am natürlichsten bietet, also da, wo der sonstige Unterricht mit Zahlen und Formen zu thun hat, vor allem in der Naturkunde, dann aber auch in der Geographie und Geschichte, so kommt dieser an sich trockenen Materie das für die Sachen bereits gewonnene Interesse entgegen." 25)

Sachse empfiehlt in einer sehr lesenswerten Programmarbeit, den Rechenunterricht nach Herbartschen Grundsätzen zu betreiben. Dabei heißt es: „Soll aber den andern Fächern (durch den Rechenunterricht) gleichzeitig ein Vorteil erwachsen, so muß das schreckliche Durcheinander der eingekleideten Aufgaben, wie es bisher in den Rechenbüchern stattfand, gänzlich aufhören. Es muß eine Reihe wohlgeordneter Aufgaben aus der Heimatkunde vorangehen, dieser eine andere aus der Naturkunde, dann eine aus der Geographie und Geschichte u. s. w. folgen. Es ergiebt sich hieraus, daß die Überfülle von Aufgaben aus der Krämerpraxis auf ein berechtigtes Maß beschränkt wird." 26)

Thrändorf berührt unsern Gegenstand im Zillerschen Sinne in seinem Aufsatze: „Konzentration oder konzentrische Kreise?" Da heißt es z. B. „Unsere gewöhnlichen Rechenbücher bieten zwar auch sogenannte eingekleidete Aufgaben, d. h. Aufgaben aus dem praktischen Leben, aber sie durchlaufen die verschiedensten Sachgebiete in buntestem Wechsel, sodaß wieder keine Konzentration des Geistes zustande kommt, sondern die allergrößte Zerstreuung und als Folge davon ein höchst oberflächliches Wissen in Bezug auf die Sachgebiete, in deren Bereich sich der Rechenunterricht bewegt. So kommt es, daß die Schüler, wenn sie die Schule verlassen, zwar sehr fertig dividieren und multiplizieren, selbst mit Zahlgrößen, besonders mit Brüchen, die im Leben niemals vorkommen, daß sie aber bei einem gegebenen praktischen Beispiel oft nicht wissen, ob sie zu dividieren oder zu multiplizieren haben." 27)

Von Honke liegt ein Aufsatz vor, welcher die Frage beantwortet: „Wie kann das Rechnen zur Veranschaulichung sachunterrichtlicher Verhältnisse dienen?" Darin wird gezeigt, wie die Steuern, der Gemeindehaushalt, die Landwirtschaft, die Haushaltung, die heimatliche Statistik, die Witterungserscheinungen u. s. w., die Geschichte und Geographie, die Naturkunde und selbst der Religionsunterricht viele Stoffe enthalten, welche der rechnerischen Behandlung bedürfen, wenn sie verstanden werden sollen. Als ausgeführtes Beispiel bringt er 22 sehr interessante Aufgaben, welche von den Bienen handeln. 28)

Wiget und Florin verbreiten sich im wesentlichen zwar nur über das Rechnen im vierten Schuljahre, dem sie „Alle vier Operationen mit

24) Ackermann a. a. O. S. 52.
25) Ebenda S. 48.
26) Sachse a. a. O. S. 21.
27) Thrändorf a. a. O. S. 16.
28) Honke, Päd. Bl. a. a. O. S. 483 f.

ganzen Zahlen im unbegrenzten Raume" zuweisen. Sie wollen aber: „Es soll auf die Sachgebiete hingewiesen werden, an welche sich das Rechnen im vierten Schuljahre anzulehnen hat, um daraus diejenigen Belehrungen über Werte aus dem Gebiete der Landwirtschaft, des Verkehrslebens u. s. w. zu schöpfen, die der betreffenden Altersstufe verständlich sind." Alsdann bringen sie eine größere Reihe von Beispielen, um zu zeigen, daß auch „das Rechnen von der Konzentrationsidee berührt werden kann." Von einer „Verknüpfung des Rechnens mit den übrigen Unterrichtsfächern, besonders mit Geographie und Naturkunde", erwarten sie für das Rechnen selbst reichen Gewinn. „Durch eine solche Verknüpfung wird dem Rechnen auf Schritt und Tritt eine konkrete Unterlage geschaffen. Die Operationen vollziehen sich an einem bekannten und interessanten Inhalte ... Durch die vorgeschlagene Benutzung der Sachgebiete lernen die Kinder nicht nur rechnen im arithmetischen Sinne, sie lernen auch rechnen in dem Sinne, wie man das Wort braucht, wenn man sagt: der versteht zu rechnen. Erst durch die Verknüpfung des Rechnens mit dem übrigen Gedankenkreis vermag dasselbe wirklich praktisch zu werden ... Aber nicht nur das Rechnen gewinnt durch die Konzentration, sondern auch die Unterrichtsfächer, auf welche sich dieselbe bezieht."[29])

Kern macht, was die Stellung der Mathematik in der Erziehungsschule betrifft, die Zillersche Auffassung zu der seinigen. Er ist also ebenfalls für eine Verknüpfung des Rechnens mit den Sachgebieten der übrigen Fächer, insbesondere der Naturkunde. „Sie wird von selbst eintreten, wenn der Lehrer nie vergißt, daß die pädagogische Bedeutung der Mathematik in erster Linie auf ihrer Bedeutung für die Naturerkenntnis beruht. Ganz besonders förderlich für die Verbindung des mathematischen und naturkundlichen Unterrichts sind solche Unterrichtsfächer, die man ebensogut als mathematische wie als naturwissenschaftliche betrachten kann, die mathematische Geographie und die Mechanik."[30])

Conrads Stellung zu den Sachgebieten des Rechenunterrichts ist schon oben durch einige Citate gekennzeichnet worden. Gelegentlich einer eingehenden Besprechung der ersten Auflage des vorliegenden Handbuchs urteilt derselbe über die bisherigen Rechenbücher: „Einen Mangel zeigen sie aber alle in höherm oder geringerm Grade; er liegt in der unrichtigen Stellung und ungenügenden Behandlung der Sachgebiete. Es ist daher gewiß mit Freuden zu begrüßen, wenn ein mitten in der Praxis stehender Mann, wie Schuldirektor Dr. Hartmann, sich bemüht, in dieser Richtung endlich Wandel zu schaffen, und sein Handbuch für den Rechenunterricht darf deshalb wohl, vorzüglich nach dieser Seite hin, einer eingehenden Besprechung unterworfen werden. ... Die Vorzüge des Hartmannschen Rechenunterrichts in Bezug auf die Sachgebiete bestehen mithin darin, daß 1. eine einläßliche sachliche Besprechung dem eigentlichen Rechnen vorausgeht und 2. die sich an-

29) Wiget und Florin a. a. O. S. 187.
30) Kern a. a. O. S. 87.

schließenden Aufgaben diesem Sachgebiete entnommen sind und auch die spätern Übungen sich nicht bei jeder Aufgabe auf neue Stoffe beziehen. Es kommt hier also zu dem, was der Rechenunterricht gewöhnlich bietet, noch etwas Wesentliches hinzu, das ist die genaue Kenntnis aller wichtigen sachlichen Verhältnisse, bei denen das Rechnen zur Verwendung kommt, und dadurch erhält die Behauptung, daß ein solcher Unterricht auch den Anforderungen des Lebens besser entspreche, eine neue Stütze. Daß auf solche Weise außerdem die Bildung des unmittelbaren Interesse ungleich leichter gelingt, wurde schon früher nachgewiesen."[31])

Grabs schließt sich der Reinschen Auffassung an, besonders auch für den ersten Rechenunterricht[32]), Just zeigt, daß Kulturgeschichte und Naturkunde eine Fülle sachlicher Verhältnisse aufweisen, welche eine rechnerische Durcharbeitung nicht nur gestattet, sondern fordert[33]), Wigge und Martin kommen bei Besprechung der psychologischen Grundlagen für das abstrakte Rechnen, der Stellung desselben zum Konzentrationsprinzip und der formalen Stufen wiederholt auf den hohen Wert der Sachgebiete des Rechnens zurück. Dann fahren sie fort: „Die gegenwärtige Reformbewegung erstreckt sich auch auf das Gebiet der angewandten Aufgabe. Praktiker, wie Steuer, erstreben Vereinfachung mit Rücksicht auf das spätere Bedürfnis der einer Anstalt überwiesenen Schüler. ‚Nicht für die Schule, sondern für das Leben'! ist ihre Devise. Es bedarf aber dieser Satz einer Ausdeutung, wenn er nicht falsch oder unvollständig angewandt werden soll. Nicht der Rechenunterricht kann in das Leben einführen, das kann nur der Sachunterricht thun; jener kann nur die gesammelten Anschauungen durch seine Zahlverhältnisse verdeutlichen, er kann, in Zahlen denkend, in seiner Weise die reale Welt analysieren lehren. Er bringt dem Kinde nicht etwa Dinge, die unabhängig vom Sachunterrichte erst aufzufassen wären, sondern beschäftigt den Geist mit solchen, die, durch jenen gegeben, gegenwärtig in ihm lebendig sind und sein Interesse fesseln. Der Sachunterricht aber nimmt volle Rücksicht auf das praktische Leben und seine Gestaltungen. Was dieser aus dem Leben in die Schule getragen, das verwendet jener für das Leben. In diesem Sinne fasse man jenes Wort, dann kann auch das Rechnen in den Konzentrationsunterricht mit aufgenommen werden."[34])

Wendt wies 1888 auf der vierten Generalversammlung des niederrheinischen Vereins für Herbartsche Pädagogik auf die Sachgebiete des Rechnens mit den Worten hin: „Während man in dem verwandten Sprachunterrichte (Grammatik rc.) angefangen hat, ‚aus ganzem Holze zu schneiden' (Goethe), d. h. die sprachlichen Belehrungen an wertvolle zusammenhängende Darstellungen zu knüpfen, deren sachlicher Inhalt den Schülern bereits zu geistigem Eigentum gemacht worden ist, legt man im

---

31) Conrad a. a. O. S. 2 ff.
32) Grabs a. a. O. S. 29 ff.
33) Just a. a. O. Jahrb. XX. S. 245.
34) Wigge und Martin a. a. O. S. 240.

Rechenunterrichte nur ein sehr geringes Gewicht auf den sachlichen Inhalt der Aufgaben, hält es vielfach sogar für genügend, die mathematischen Lehren an Gruppen von Aufgaben in reinen Zahlen zu knüpfen und hinterher erst eine Anzahl von bunt durcheinander gewürfelten sogenannten eingekleideten Aufgaben darzubieten. Ein solches Verfahren ist als Formalismus zu bezeichnen . . . Den Ausgangspunkt einer mathematischen Betrachtung müssen stets die Realien des Unterrichts und die zu diesen in Beziehung zu setzenden Verhältnisse des praktischen Lebens bilden. Dadurch tritt auch die Verwendbarkeit des Rechnens im wirklichen Leben viel schärfer hervor; der Schüler begreift, warum man das Rechnen lernt, und wozu man es brauchen muß."[35])

Ausführlicher kommt Wendt auf die „Sachgebiete des Rechnens" in einem spätern Aufsatze zurück, welcher sich in den deutschen Blättern von Mann, Jahrgang 1889, befindet. Dort zeigt er den großen Reichtum geeigneter Rechenstoffe, welche Physik, Chemie, Mineralogie, Botanik, Zoologie und Geographie liefern, darunter das, was Bedeutung hat für die einzelnen Handwerke und Gewerbsarten, den Ackerbau, den Verkehr überhaupt, den Gemeinde- und Staatshaushalt. Zuletzt liefert er den Beweis für die Richtigkeit der Forderung: „Das Rechnen hat auf allen Punkten seines Entwickelungsganges von bestimmten Sachgebieten auszugehen, und der Inhalt der Rechenaufgaben ist aus diesen Sachgebieten zu gewinnen." Bemerkenswert erscheint unter anderm bei ihm das, was über die sogenannten „eingekleideten" Aufgaben gesagt wird. „Eingekleidet, was will das auffallende Wort besagen? Das will besagen, daß diese Aufgaben in den Augen des Verfassers eigentlich ebenso nackt sind, wie die ihnen gewöhnlich massenhaft vorausgehenden reinen Zahlen, daß der Autor aber, um den Schein praktischer Anwendung hervorzubringen, ihnen ein dünnes, dürftiges Sach-Mäntelchen umgehängt hat. Aber die Knaben und Mädchen sind klüger, als der Autor glaubt. Sie kümmern sich nicht um das Sach-Mäntelchen, lesen die Worte flüchtig oder gar nicht, prüfen vielmehr geschwind, raten auch wohl, welche von den vorkommenden Zahlen Divisor, Subtrahend u. s. f. sei."[36])

Teupsers, welcher an Zillers Auffassung streng festhält, ist schon oben eigentlich gedacht worden. Derselbe führt insbesondere das Rechnen auf der „Robinsonstufe" praktisch durch.[37]) Wilk bezieht sich auf das kaufmännische Rechnen und fordert für die algebraischen Aufgaben gute Stoffe.[38]) Roßbachs Ausführungen beschäftigen sich eingehender mit den Bedürfnissen der Mädchenschulen.[39]) Jetter zeigt, daß auch die Bibel Rechenstoffe liefert.[40]) Eine recht wertvolle Aufgabensammlung bot neuerdings Stucki durch seine „500 aus speziellen Sachgebieten ausge-

35) Wendt in Dörpfelds Ev. Schulbl. 1888. S. 59.
36) D. Bl. a. a. O. S. 287.
37) Teupser a. a. O.
38) Wilk a. a. O.
39) Roßbach, Mädchenschule a. a. O. S. 250 f.
40) Jetter a. a. O. S. 86.

wählten Rechnungen für die Mittelstufe der Volksschule" dar. Dem Vorworte derselben zufolge darf man annehmen, daß Stucki alle maßgebenden Rechenmethodiker der Schweiz auf seiner Seite hat.[41]) Auch Beetz, Sterner, Räther, Heiland und Muthesius u. a. m. erkennen in ihren Schriften und Aufsätzen die große Bedeutung der „Sachgebiete des Rechnens" in unserm Sinne an, wenn auch unter Vorbehalt.

So ist Beetz nicht mit dem „unmittelbaren" Ausgange von Sachgebieten behufs Bildung ganz bestimmter Zahlbegriffe einverstanden. Er befürchtet, daß dadurch das Interesse von der Zahl auf die Dinge verschoben werde.[42]) Auch meint er, es liege die Gefahr vor, dem Schulrechnen seine Selbständigkeit zu nehmen. Dann nämlich, wenn von vorn herein „eine Verquickung des Formen- und Sachunterrichts" stattfindet.[43])

Sterner äußert: „Die Forderung, daß die Sachgebiete mit dem Fortschreiten in der Zahlordnung berücksichtigt werden sollen, sodaß Sach- und Zahlverhältnisse gleichmäßig sich erweitern, ist theoretisch berechtigt; denn nach den Gesetzen der Apperception wird durch den einen Gegenstand der andere mitgelehrt; je mehr Berührungs- und Beziehungspunkte unter den verschiedenen Vorstellungskategorien bestehen, desto besser haften sie im Gedächtnisse, desto leichter lassen sie sich zu neuen Bildungen verwerten. Allein, wir haben es hier zur Zeit noch mit einem methodischen Ideal zu thun, das, meines Wissens, noch nirgends verwirklicht ist. Der Verfasser hat die Lösung dieser Aufgabe versucht, mußte sich aber alsbald überzeugen, daß entweder das eine oder das andere Schaden leiden müsse, — das Los aller derjenigen, die zwei Herren dienen wollen. Aus diesen Gründen mußte auch die Bezugnahme auf die übrigen Lehrfächer der Volksschule, welche gleichfalls theoretisch vollberechtigt ist, unterbleiben. Hier tritt besser der Lehrer ein, welcher die Lehrstoffe seiner Schule kennt und daher in der Lage ist, beim Rechnen auf diese Lehrfächer oder bei diesen auf das Rechnen Bezug zu nehmen."[44])

Räther schließt sich im großen und ganzen Dörpfeld an. Zur Vermittelung des Verständnisses einer Operation hält er für nötig, von einer angewandten Aufgabe oder mindestens von einer Aufgabe mit benannten Zahlen auszugehen. Auch fordert er, daß das Rechnen die sachlichen Unterrichtsfächer und den Gedankenkreis der Kinder gehörig berücksichtige. Eine Gliederung des Rechenstoffes im Anschlusse an Sachgebiete findet man bei ihm jedoch nicht.[45])

Heiland und Muthesius sind darüber, ein Rechenbuch für die Volksschulen des Großherzogtums Sachsen zu schreiben. Begonnen haben sie es mit dem III. Hefte, welches für die Mittelstufe bestimmt ist. Darin heißt es: „Konnten die Verfasser für die Verbindung des Sach- und Rechenunterrichts nur Winke und Andeutungen geben, so sind sie in anderer

41) Stucki a. a. O.
42) Beetz, Beiträge a. a. O. S. 42.
43) Beetz, Der vereinfachte Rechenunterricht a. a. O. S. 8.
44) Sterner, Programm ꝛc. a. a. O. S. 27.
45) Räther a. a. O. Teil 1 und 2.

Richtung bemüht gewesen, die Konzentration zu ihrem Rechte kommen zu lassen: sie haben die eingekleideten Aufgaben nach sachlichen Gesichtspunkten zu Gruppen zusammengestellt, weil sie aus dieser Anordnung für den Schüler einen größern Gewinn erhoffen, als aus dem zusammenhangslosen Allerlei mancher andern Rechenbücher."[46]) Daneben fordert Muthesius aber auch in einer Programmarbeit für „Auswahl und Anordnung des Rechenstoffes die möglichste Freiheit und Selbständigkeit." Der Rechenunterricht soll „unbeeinflußt von andern Fächern, lediglich nach Rücksichten, die durch seinen eigenen Inhalt bedingt sind, die Anordnung seines Stoffes vornehmen." Muthesius schließt also den Rechenunterricht vom Konzentrationsverbande der Unterrichtsfächer aus. Namentlich will er die Abhängigkeit des Rechnens von der Naturkunde, wie sie Ziller gefordert hat, nicht gelten lassen. Denn, meint er, bei den Formen (mit denen es das Rechnen zu thun hat) liegen die Verhältnisse anders als bei den Zeichen (auf welche die Sprache angewiesen ist). Ziller dürfe nicht das, was für die Sprache Geltung habe, auf das Rechnen übertragen wollen. Auch stimme die Zillersche Auffassung nicht mit der maßgebenden Herbartschen überein. „Er (Herbart) würde zu der Gestaltung, die der mathematische Unterricht durch Ziller erfahren hat, niemals seine Zustimmung gegeben haben."

Das ist wenigstens deutlich. Doch um es gleich zu sagen: Muthesius schießt hier über das Ziel hinaus! Wohl geht er in seiner Art gründlich zu Werke, und was er vorbringt, verdient gewiß, beachtet zu werden; allein seine Arbeit ist eine von denen, welche fertig waren, ehe sie begonnen wurden. Muthesius wollte etwas beweisen, und so hat er es bewiesen. Man nehme z. B. folgendes: Muthesius führt die thatsächlich enge Verbindung der Formen mit den Sachen unter den Gründen gegen die Verbindung des Rechnens mit den Sachgebieten an. Ist es aber nicht so, daß dieselbe viel mehr für eine solche spricht? Muthesius folgert weiter: Weil Ziller nicht mit Herbart übereinstimmt, so ist seine Auffassung eine falsche. Ist es aber nicht so, daß dieses aus der Nichtübereinstimmung nicht ohne weiteres gefolgert werden kann? Ebensowenig dürfte es Muthesius gelungen sein, die Lombergschen Gründe für die Notwendigkeit sachlicher Ausgangspunkte im Rechnen zu widerlegen.[47])

Völlig einverstanden sind wir mit Muthesius, wenn er fordert, der geordnete Gang des Rechenunterrichts dürfe nicht durch den Konzentrationsstoff gestört werden. Nicht zugeben aber können wir, daß der geordnete Gang des Rechenunterrichts die Verknüpfung mit Sachgebieten, welche dem Kinde psychologisch nahe liegen, schlechthin ausschließt. Solange nicht, als nicht allgemein bewiesen ist, daß jeder Konzentrationsstoff störend wirken und jedes Sachgebiet des Rechnens ein Bestandteil des eigentlichen Konzentrationsstoffes sein muß.

---

46) Heiland und Muthesius a. a. O. S. IV.
47) Muthesius, Programmarbeit a. a. O.

Außer den letzterwähnten Methodikern, welche den Sachgebieten des Rechnens gegenüber eine besondere Stellung einnehmen, ohne sich völlig ablehnend zu verhalten, giebt es freilich auch noch solche, welche von der ganzen Richtung nichts wissen wollen. Drei Gruppen derselben heben sich deutlich ab. Der ersten Gruppe gehören diejenigen an, welche weder Zeit noch Neigung verspüren, sich mit der neuern Pädagogik vertraut zu machen. Der zweiten Gruppe sind diejenigen Rechenbuchverfasser zuzuzählen, deren Rechenbücher einer vollständigen Neubearbeitung unterzogen werden müßten, wenn sie die Sachgebiete in unserm Sinne berücksichtigen wollten.[48]) In der dritten Gruppe endlich begegnen wir den „fertigen" Rechenlehrern, solchen, welche durch „eigene Methode" Erfolge erzielen. Hiernach dürfte der Kampf der „neuen" und „alten" Richtung allerdings noch eine Zeit lang währen. Daß die „neue" Richtung aber schließlich durchdringen wird, unterliegt keinem Zweifel.

„Der alte Winter, in seiner Schwäche,
Zog sich in rauhe Berge zurück.
Von dorther sendet er, fliehend, nur
Ohnmächtige Schauer körnigen Eises
In Streifen über die grünende Flur."

In den Rechenwerken, welche der Praxis unmittelbar dienen sollen, also den Schülerheften, tritt erst seit einigen Jahren das Bestreben, die Verbindung des Rechnens mit geeigneten Sachgebieten zu pflegen, deutlicher hervor. In keinem aber in gleichem Umfange und in so zielbewußter Weise, wie in den Hartmann-Ruhsamschen Rechenwerken.[49])

Conrad äußert in dieser Beziehung: „Hartmanns großes Verdienst liegt aber darin, daß er die theoretischen Forderungen dieser (Ziller, Dörpfeld, Rein 2c.) auf allen Gebieten des Volksschulrechnens in die Praxis übersetzt hat, was in dieser Ausdehnung vor ihm noch in keinem Rechenwerke geschehen ist. Neben dem formalen Ziele jedes Schuljahrs bezeichnet er überall auch die als Ausgangs- und Mittelpunkt zu wählende Sache und giebt Winke für deren Behandlung." [50])

Welche Fachziele (formalen Ziele) das sind und welche Sachgebiete ausgewählt wurden, wolle man aus der nachfolgenden, der grundlegenden sechsteiligen Ausgabe A des Hartmann-Ruhsamschen Rechenbuches entsprechenden übersichtlichen Zusammenstellung entnehmen.

1. Schuljahr.

a) Fachziel: Die Zahlreihe 1 bis 10. (Die vier Grundrechnungsarten.)

48) Was das besagen will, zeigt z. B. das Rechenwerk von Thieme-Schlosser, welches 1891 in neuer Bearbeitung erschien und entgegen dem von uns getadelten Sachallerlei der frühern Bearbeitung Gruppen mit inhaltlich verwandten Aufgaben brachte.

49) Vergleiche S. 131.

50) Conrad a. a. O. S. 14.

b) Sachgebiete: Der Rechenkasten (von Tillich). Vom Schulkinde. Die Fenster des Schulzimmers. Die Wände des Schulzimmers. Die Finger der Hand. Die Schulwoche. Die sieben Wochentage. Die Stundenschläge der Uhr (beim Schulanfange). Das Kegelspiel. Die kleinen Geldsorten (bis zum Zehnpfenniger). Allerlei kleine Einkäufe.

2. Schuljahr.

a) Fachziel: Die Zahlreihe 1 bis 100. (Betonung der Addition und Subtraktion.)

b) Sachgebiete: Alle Sachgebiete des 1. Schuljahrs (Wiederholung). Mark und Zehnpfenniger. Die kleinen Geldsorten (bis zum Zwanzigpfenniger). Haus und Garten (Mandel und Stück). Feld und Wald. Von einer Schulklasse (Kinder). Was man in der Schule braucht (Dutzend und Stück). Wie ein Haus gebaut wird. Allerlei Weihnachtsvorbereitungen (Schock, Mandel, Stück). Von der Post und Eisenbahn (Tag, Stunde, Minute). Womit wir messen (Meter, Centimeter; Hektoliter, Liter). Womit wir zahlen (Geldstücke bis zur Mark aufwärts).

3. Schuljahr.

a) Fachziel: Die Reihen der Grundzahlen. (Die Zahlreihe 1 bis 100 mit Betonung der Multiplikation und Division.)

b) Sachgebiete: Alle Sachgebiete des 2. Schuljahrs (Wiederholung). Kleine Geldsorten (Ein-, Zwei-, Zwanzigpfenniger, Mark). Die Schulhefte (Bogen, Blatt, Seite). Der Thaler. Die Schulwoche. Das Lebensalter des Kindes. Die Woche (Woche, Tag). Zähl- und Zeitmaße (Dutzend, Mandel, Stück; Jahr, Vierteljahr, Monat, Woche). Münzen und Maße.

4. Schuljahr.

a) Fachziel: Die Zahlreihe 1 bis 1000.

b) Sachgebiete: Alle Sachgebiete des 3. Schuljahrs (Wiederholung). Mark, Meter, Hektoliter (mit Einführung der dezimalen Schreibweise). Post und Eisenbahn (Porto, Fahrgeld). Haus und Garten (Messungen). In Küche und Keller (Hektoliter, Liter). Das Kleingeld der Zehnerreihe (10-, 20-, 50-, 100-Pfenniger). Was der Herbst bringt (Gros, Dutzend, Stück; Schock, Mandel, Stück). Was man im Winter erlebt (Jahr, Monat, Tag, Stunde, Minute, Sekunde). Aus der Heimatkunde (Kilometer, Meter, Centimeter). Was man im Haushalte braucht (Kilogramm, Gramm).

5. Schuljahr,

a) Fachziel: Die unendliche Zahlreihe.

b) Sachgebiete: Alle Sachgebiete der vorigen Schuljahre (Wiederholung). Unsere Längenmaße (Kilometer, Meter, Centimeter, Millimeter). Unsere Gewichte (Tonnen, Kilogramm, Gramm, Milligramm). Unsere Gewichte im Post- und Handelsverkehr. Zur Naturgeschichte. Unsere

Flächenmaße (Quadratkilometer, Hektar, Ar, Quadratmeter, Quadratcentimeter). Unsere Flächenmaße in der Länder- und Völkerkunde. Was man fürs Haus braucht. Unsere Zeit- und Zählmaße (Sortenverwandlungen). Zeitbestimmungen (Zinsrechnung).

6. Schuljahr.

a) Fachziel: Dezimal- und Bruchzahlen.

b) Sachgebiete: Alle Sachgebiete der vorigen Schuljahre (Wiederholung). Unsere dezimalen Münzen, Maße und Gewichte (im Zusammenhange). Warenverkauf und Warenversand (Eisenbahnfracht). Unsere Körpermaße (Kubikmeter, Hektoliter, Liter, Kubikcentimeter, Kubikmillimeter). Zur Erdkunde. Unsere nichtdezimalen Maße (im Zusammenhange). Kleine Einkäufe. Von der Sparkasse. Von der Zeit. Zinsrechnung. Hauswirtschaftliches.

7. Schuljahr.

a. Fachziel: Das bürgerliche Rechnen. Erster Teil. Schluß- und Prozentrechnung.

b) Sachgebiete: Die Sachgebiete der vorigen Stufen (Wiederholung). Bekannte Währungszahlen. Preise und Löhne. Messen, Zählen, Wägen. Gelderwerb durch Geld. Gelderwerb durch Handel. Zur Natur-, Länder- und Völkerkunde.

8. Schuljahr.

a) Fachziel: Das bürgerliche Rechnen. Zweiter Teil. Erweiterungen und Abschlüsse.

b) Sachgebiete: Die Sachgebiete der vorigen Stufen (Wiederholung). Unsere Münzen, Maße und Gewichte. Hauswirtschaftliches. Gewerbliches. Kaufmännisches. Zur Geschichte und Erdkunde (Bibelkunde, Weltgeschichte, allgemeine Erdkunde). Zur Naturgeschichte, Naturlehre, Raumlehre. Ausländische Münzen, Maße und Gewichte.

Die Hauptsache bleibt natürlich, wie und wo diese Sachgebiete verwendet werden. Darüber aber giebt das Hartmann-Ruhsamsche Rechenbuch selbst die beste Auskunft. Wir verweisen deshalb füglich auf dasselbe.

§ 14.

Die Vereinfachung des Rechenunterrichts.

Litteratur. Beetz, K. O. Der vereinfachte Rechenunterricht. Jena 1891. Beetz, K. O. Kritische Beiträge zu den Tagesströmungen im elementaren Rechenunterrichte. Gotha 1891. Braune, A. Der Rechenunterricht in der Volksschule. Halle a. d. S. 1892. Bußmann, E. W. Anleitung zum Rechenunterricht in der einklassigen Volksschule. Essen 1893. Büttner, A. Anleitung zum Rechenunterrichte in der Volksschule. 12. Aufl. Leipzig 1893. Drischel, Fr. Die Reform des Rechenunterrichts im Sinne der Konzentration, der Vereinfachung und der Erzielung größerer Fertigkeit. Vortrag auf der 28. Allgemeinen D. Lehrerversammlung. (In:

Allg. D. Lehrerzeitung. 41. Jahrg.) Leipzig 1889. Elsner, A. und Sendler, R. Der Rechenunterricht in der Volksschule. Breslau 1892. Frohn, J. Die Ausscheidung der unpraktischen Rechenstoffe. Vortrag auf der Seminarkonferenz zu Brühl. (In: Schröder, Schulpraxis.) Leipzig 1886. Hartmann, B. Beitrag zur Theorie des Lehrplans. (In: Sächs. Schulzeitung.) Leipzig 1887. Heinemann, L. Rechenbuch für Volksschulen. Wolfenbüttel 1889. Herbart, J. G. Pädagogische Schriften. Herausg. von Willmann. Leipzig 1873—75. Jänicke, E. Geschichte ꝛc. 2. Aufl. Gotha 1888. Kentenich, G. und Frohn, J. Anleitung zur Einteilung des Rechenunterrichtes und der Raumlehre in der Volksschule. 4. Aufl. Düsseldorf 1892. Mittenzwey, L. Die Darstellungsformen im Rechnen ꝛc. Gotha 1891. Schlott, G. Das vereinigte Kopf- und Tafelrechnen. Dreistufige Rechenschule für einfache Schulverhältnisse. Braunschweig 1887. Schröter, R. Beiträge zur Methodik des Rechenunterrichts. Wittenberg 1887. Steuer, W. Methodik des Rechenunterrichts. Strehlen (Schlesien) 1883. Tschirch, P. Der Rechenunterricht in der Volksschule. Bunzlau 1881. Weiß, E. Kurze Anleitung zum Rechenunterrichte in der Volksschule. Breslau 1885.

Während des letzten Jahrzehnts ist die Forderung, den Rechenunterricht zu vereinfachen, eindringlicher denn je erhoben worden. In vielen Rechenwerken wird ihr ein besonderer Abschnitt gewidmet, in pädagogischen Zeitschriften, in Lehrerkonferenzen, auf den Umschlägen von Schülerheften begegnet man derselben. Freilich zeigen die Vorschläge und Ausführungen, welche der Forderung Rechnung tragen sollen, zur Zeit immer noch so große Verschiedenheiten, daß man fast annehmen möchte, es fehle vor allem noch an der nötigen Klarheit über das Wesen und den Zweck der geforderten Vereinfachung selbst. Um es gleich hier kurz anzudeuten: die meisten der Vereinfachungsvorschläge gleiten an der Peripherie unseres Unterrichtsfaches hin.

Hören wir aber zunächst wieder einige der zahlreichen Vorschläge, welche in selbständigen Schriften, Aufsätzen und Vorträgen seit dem Jahre 1881 gemacht worden sind.

Einer der ersten von denen, welche die Vereinfachung des Volksschulrechnens forderten, war der Seminarlehrer Büttner. Schon in der fünften Auflage seiner „Anleitung", welche 1879 erschien, befindet sich die Stelle: „Wir werden nur dann das Nötige im Rechnen leisten, wenn wir den Umfang des Stoffes auf ein Kleinstes (Minimum) beschränken, dieses aber so vielseitig üben, daß die Kinder wirklich Verständnis erlangen, wahre Bildung erhalten und es als unverlierbares Eigentum mit ins Leben nehmen." In der neuesten (zwölften) Auflage derselben Schrift heißt es unter anderm:

„1) Man beschränke die Theorie im Rechenunterrichte soweit als irgend möglich; die theoretischen Auseinandersetzungen gehen doch gar bald verloren. Was sollen den Kindern beispielsweise die Definitionen über Zahl, Primzahl, zusammengesetzte Zahl, Bruch, Stammbruch, Dezimalbruch, periodischer Dezimalbruch? Wozu lernt der Schüler den kleinsten Generalnenner für eine ganze Reihe gemeiner Brüche suchen? Antwort: Solche Sachen lernt der Schüler in der Volksschule, um sie möglichst bald wieder zu vergessen. Legt ein Lehrer aber auf diese theoretischen Dinge Gewicht, so kommen die Schüler nicht zum Rechnen. Die Einsicht in die einzelnen Operationen muß der Lehrer dem Schüler kurz und knapp vermitteln; dann heißt es: Rechne! Und diese selbständige Übung ist ein Hauptstück des Rechenunterrichts.

2) Gleich der Theorie ist in einfachen Schulverhältnissen das Tafelrechnen zu beschränken. Der Schwerpunkt des Rechenunterrichts liegt im Kopfrechnen innerhalb der Zahlen bis 1000 . . .

3) Jeder Lehrer muß sich klar darüber werden, was zu dem Allgemein-Notwendigen im Rechnen gehört, und was nicht notwendig ist. Man muß sich für seine Schule ein Minimum festsetzen, über das man in keinem Falle hinausgeht, wenn die Schüler dasselbe nicht ganz sicher beherrschen. Wir unterscheiden innerhalb des hergebrachten Rechenstoffes überflüssige, notwendige und wünschenswerte Stoffe.

Als überflüssig sind folgende Stoffe aus dem Rechenunterrichte auszuscheiden: a) Die Aufgaben mit großen (vielstelligen) Zahlen; b) die Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren, das Suchen des Generalnenners für mehr als 2 Brüche, die Einteilung der Dezimalbrüche und die Verwandlung der periodischen Dezimalbrüche in gemeine Brüche; c) die Aufgaben mit mehr als zwei Benennungen, sowie mit veralteten Münz-, Maß-, Gewichts- und Zähleinheiten; d) Termin- und Mischungsrechnung, Rabatt auf Hundert, zusammengesetzte Aufgaben mit gesuchten Bedingungen, welche den Verhältnissen des Lebens fremd sind, der schriftliche Ansatz für Aufgaben der Zeitrechnung, der Kettensatz.

Zu den notwendigen Stoffen, auf welche sich die meisten einklassigen Schulen zu beschränken haben, gehören: a. Das Kopfrechnen innerhalb der vier Grundrechnungsarten im Zahlraume bis 1000 mit benannten und unbenannten ganzen Zahlen; b. das Nummerieren bis Million und die vier Spezies mit unbenannten und zweifach benannten ganzen Zahlen; c. die vier Grundrechnungsarten mit Brüchen des täglichen Verkehrs, wozu Halbe, Viertel, Achtel — Drittel, Sechstel — Fünftel und Zehntel gehören, — das Lesen und Schreiben der Zehntel, Hundertstel, Tausendstel und Zehntausendstel als Dezimalbrüche; d. Aufgaben aus den bürgerlichen Rechnungen mit ganzen Zahlen und den gewöhnlichsten Brüchen: Preisberechnungen, sowie diejenigen Aufgaben aus der Zeit-, Zins-, Rabatt-, Mischungs-, Gesellschafts- und Raumrechnung, welche im Verkehrsleben wirklich vorkommen.

Zu den wünschenswerten Stoffen, welche der Stoffplan der mehrklassigen Schule außer den soeben genannten Stoffen noch aufnimmt, gehören: a. Eingehende Behandlung der Dezimal- und gemeinen Bruchrechnung mit Ausschluß der oben unter b. als überflüssig bezeichneten Punkte; b. der Bruchsatz; c. die seltener vorkommenden und schwierigen Arten der bürgerlichen Rechnungen; d. das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln (?).

4) Ebenso wichtig wie die Beschränkung im ganzen ist die Vereinfachung des hergebrachten Stoffes an einzelnen Stellen des Lehrganges auf Unter- und Mittelstufe. Es kommt auf keiner Stufe des Lehrganges darauf an, alle innerhalb der Stufe (des Zahlraumes) möglichen Übungen

durchzunehmen, sondern vielmehr darauf, daß die Kinder in den leichtern Übungen zu munteren, selbständigen und sicheren Rechnern erstarken."[1])

Dagegen heißt es weiter unten: „Für die formelle Seite der Beschulung im Rechnen sind die Forderungen für jede Art von Schulen und für jede Unterrichtsstufe im wesentlichen dieselben. Überall muß der Rechenlehrer Verständnis des Stoffes und des Verfahrens erzielen, überall auf klares Denken und richtiges Sprechen halten; auf jeder Stufe muß man die Kinder dahin bringen, daß sie selbständig (ohne fremde Hilfe, namentlich ohne das Leitseil der Fragen des Lehrers) und sicher (ohne Fehler im Resultate) arbeiten, daß sie muntere, hurtige, zuverlässige Rechner werden."[2])

Durch Büttner angeregt, bezeichnete Tschirch 1881 die Vereinfachung des Rechenunterrichts als das schlechterdings nötige Mittel zur Verbesserung desselben. „Eine solche läßt sich nur herbeiführen, wenn der in der Volksschule durchzuarbeitende Rechenunterrichtsstoff wesentlich beschränkt wird." Büttner hatte damals sein Stoffminimum noch nicht bekannt gegeben. Deshalb unternahm es Tschirch, ein solches vorzuschlagen. Seine Schrift zerfällt in einen allgemeinen und besondern Teil. Der letztere ist ein „Übungsleitfaden". Im allgemeinen Teile fordert er folgendes: „1. Das Zahlgebiet für den Rechenunterricht in der Volksschule bleibt in dem bisherigen Umfange zwar fortbestehen, es wird aber nur verlangt, daß die Schüler jede ganze oder gebrochene Zahl in demselben lesen, schreiben und lernen sollen. 2. Die eigentlichen Rechenübungen werden auf dasjenige Zahlgebiet beschränkt, in welchem sich das gewöhnliche bürgerliche Leben zu bewegen pflegt. 3. Solche Übungen oder Rechnungsarten, welche nur die Ausbildung des Verstandes der Schüler, und nicht zugleich die Vorbereitung fürs spätere Leben derselben bezwecken, werden nach Möglichkeit aus dem Volksschulunterrichte ausgeschieden." Doch fügt er hinzu: „Daß sich nach diesen Einschränkungen die Arbeit für die Lehrer und die Schüler beim Rechenunterrichte in der Volksschule bedeutend vermindern würde, ist nicht anzunehmen, denn was an Breite verloren geht, soll durch Tiefe ersetzt werden." Als Ursachen, welche trotz zahlreicher Rechenstunden es zu keinem befriedigenden Ergebnisse kommen lassen, führt Tschirch an: „1. Es wird beim Rechenunterrichte in der Volksschule zu viel Theorie gelehrt. 2. Die durchaus nötige Theorie wird teilweise zur unrechten Zeit gelehrt. 3. Es werden zu vielerlei Übungen angestellt. 4. Es werden zu schwierige Übungen vorgenommen."[3])

Nächstdem forderte Steuer in der ersten Auflage seiner Methodik: „Zuerst das Notwendige und dann das Angenehme und Nützliche! Wie überall, so auch hier. . . . Die Aufgaben lassen sich einteilen in notwendige, entbehrliche und auszuscheidende. Notwendig sind: a) ein-

1) Büttner a. a. O. S. 8 f.
2) Ebenda S. 11.
3) Tschirch a. a. O. 6 f.

fache Aufgaben aus den Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, aus einem Teile der Übungen mit gemeinen Brüchen, aus den Grundrechnungsarten mit Dezimalbrüchen, zur Berechnung von Preisen, des Gewinnes, des Verlustes, des Abzuges (Rabatts), der Entschädigung und dergleichen, aus der Zinsrechnung, aus den Raumrechnungen, aus der Zeitrechnung; b) zusammengesetzte Aufgaben, entstanden durch Wiederholung derselben Grundrechnungsart oder durch natürliche und zweckmäßige Verknüpfung verschiedener Grundrechnungsarten zu Preisberechnungen, aus der Gewinn-, Zins-, Rabatt- und Diskontrechnung, aus der Raumrechnung, aus der Durchschnittsrechnung, aus der Gesellschaftsrechnung, zu verschiedenen Berechnungen. Entbehrlich ist: Ein großer Teil der Übungen mit gemeinen Brüchen, die Verwandlung der Dezimalbrüche in gemeine Brüche, die Mischungsrechnung, die Terminrechnung, das Quadrat- und Kubikwurzelausziehen, entbehrlich sind auch die algebraischen Aufgaben. Auszuscheiden sind: Die schriftlichen Aufgaben aus den Grundrechnungsarten mit mehrfach benannten Zahlen, ein großer Teil der Aufgaben aus der Zeitrechnung, ein Teil der Übungen mit gemeinen Brüchen, der größte Teil der Aufgaben aus der einfachen Regeldetri, die Aufgaben aus der zusammengesetzten Regeldetri, ein großer Teil der Aufgaben aus der Zinsrechnung."[4])

Bei Weitz heißt es: „Eine sorgfältige Prüfung ergiebt, daß eine Vereinfachung des Rechenunterrichts durchaus geboten ist. Eine große Anzahl von Aufgaben muß ausgeschieden werden, für andere kann zweckmäßigere Ordnung oder Vereinfachung in der Lösung eintreten. Es sind auszuscheiden: a) alle Aufgaben mit vielstelligen Zahlen im Rechnen mit ganzen und gebrochenen Zahlen; b) die Einmaleinsreihen mit 13, 14, 16, 17, 18, 19, die nicht bis zu gedächtnismäßiger Geläufigkeit zu üben sind; c) Aufgaben mit mehr als zweifach benannten Zahlen; d) Aufgaben, die aus mehreren Aufgaben zusammengesetzt sind; e) Aufgaben mit veralteten und verbotenen Benennungen und Abkürzungen der Maß- und Gewichtseinheiten; f) Aufgaben aus der Zeit-, Zins-, Mischungs- und Terminrechnung und der zusammengesetzten Regeldetri, welche das Leben gar nicht oder nur sehr selten bringt.

Eine zweckmäßigere Ordnung der Aufgaben und Vereinfachung der Lösung ergiebt sich bei der Beobachtung folgender Stücke: a) Im Zahlraume von 1 bis 10, sowie in dem von 1 bis 20 wird erst das Zuzählen und Abziehen gelehrt, dann folgen die andern Spezies. b) Auf der Unterstufe wird das Dividieren nur in der Form des Teilens geübt. c) Auf der Mittelstufe wird der Zahlraum zunächst nur bis zu 1000 erweitert. Erst nach Beendigung der Subtraktion erfolgt die Erweiterung bis zu 1 Million. d) Die Vorbereitung der Bruchrechnung wird im wesentlichen auf der Mittelstufe erledigt. e) Auf der Mittelstufe werden die niedern Sorten wohl als Bruchteile höherer Sorten geschrieben, aber nicht gelesen. f) Dezimalbrüche werden als Fortsetzung unseres

4) Steuer a. a. O. S. 19.

Zahlsystems entwickelt und vor der gemeinen Bruchrechnung gelehrt. g) In der gemeinen Bruchrechnung wird systematische Behandlung vermieden. Von der Einteilung der Brüche nach verschiedenen Gesichtspunkten wird abgesehen, das Erweitern und Kürzen, das Gleichnamigmachen, das Aufsuchen des kleinsten Hauptnenners: alles dies wird in einfachster Form gelehrt. h) Angewandte Aufgaben werden auf jeder Stufe gestellt, aber erst nach erlangter Geläufigkeit, damit keine Zeit für die Einübung verloren geht."[5])

Auf der Seminarkonferenz zu Brühl im Jahre 1886 sprach Seminarlehrer Frohn besonders über „Die Ausscheidung der unpraktischen Rechenstoffe". Seine Ausführungen waren derart, daß sie Dr. Schönen Veranlassung gaben, die durch dieselben herbeigeführte Verhandlung als eine „Epoche im Schulleben des Regierungsbezirks Köln und darüber hinaus" zu bezeichnen. Frohn unterschied aber: a) notwendige Stoffe; b) solche Stoffe, welche einen weniger praktischen Zweck haben und deshalb erst in zweiter Linie zu berücksichtigen sind; c) überflüssige Stoffe. Über die weitere Ausführung berichtet die „Schulpraxis" folgendes: „I. Die notwendigen Stoffe. 1) Die vier Grundrechnungsarten mit benannten und unbenannten Zahlen (dekadischen). 2) Die vier Grundrechnungsarten mit Dezimalen und mit gemeinen Brüchen. 3) Preisberechnung. 4) Zeitberechnung (besonders Zeitdauer). 5) Rechnung vom Hundert oder Prozentrechnung. 6) Teilung in ungleiche Teile oder Gesellschaftsrechnung. 7) Durchschnittsrechnung. II. Stoffe, die weniger praktischen Zweck haben und darum erst in zweiter Linie in Betracht kommen. 1) Die schwierigen Fälle aus dem Rechnen mit gemeinen Brüchen. 2) Rabatt auf Hundert. 3) Terminrechnung. 4) Eigentliche Mischungsrechnung. (Diese vier Übungen in ausgewählten Beispielen, doch nicht bis zur Rechenfertigkeit.) 5) Wurzelextraktionen. (Keine praktische Bedeutung; bei sehr günstigen Verhältnissen mag allenfalls die erste und zweite Wurzel gelehrt werden.) 6) Die sogenannten algebraischen Aufgaben. III. Überflüssige Stoffe. A. Aus dem Rechnen mit ganzen Zahlen: 1) Die Aufgaben mit großen und vielstelligen Zahlen. 2) Die vier Grundrechnungsarten mit 3-, 4- und mehrfach benannten Zahlen. B. Aus der Bruchrechnung: 1) Das besondere Verfahren zum Suchen des kleinsten gemeinschaftlichen Nenners und des größten gemeinschaftlichen Maßes. 2) Das Verwandeln der unendlichen Dezimalen in gemeine Brüche. C. Aus den Rechnungsarten des bürgerlichen Lebens: 1) Die Aufgaben aus der Zeitrechnung, in denen Anfang und Ende gesucht wird, mit mehrfach benannten Zahlen. 2) Ein großer Teil der sogenannten Regeldetri, sowohl der einfachen als der zusammengesetzten. 3) Der Kettensatz. 4) Ein großer Teil der Aufgaben aus der Zinsrechnung, in denen Kapital und Zeit gesucht wird. 5) Die Mischungsrechnung mit Metallen. 6) Das Rechnen mit Staatspapieren und Aktien.

5) Weitz a. a. O. S. 8 f.

Die Kunstausdrücke sind, soviel es angeht, durch passende deutsche Wörter zu ersetzen. Nach der oben bezeichneten Ausscheidung kann mehr Rücksicht genommen werden: a) auf Gleichmäßigkeit in der Fertigkeit; b) auf mehr Kopfrechnen, besonders mit kleinern Zahlen; c) auf das dezimale System; d) auf Wiederholung von Aufgaben und Übungen, die früher durchgenommen worden sind; e) auf Rechenvorteile."[6])

In einem längern Aufsatze, welcher sich mit der „Auswahl des Volksschullehrstoffes" beschäftigte, berührte auch der Verfasser des vorliegenden Handbuches 1887 die Rechenstoff-Vereinfachungsfrage.[7]) Es geschehe dieses von wesentlich andern Gesichtspunkten aus, als es bisher geschehen war. Das Nähere darüber folgt weiter unten.

Ungefähr um dieselbe Zeit schrieb Schröter: „Es ist eine Vereinfachung des Rechenunterrichts anzustreben hinsichtlich der Stoffauswahl, der Stoffanordnung und der Behandlung des Stoffes. a) Welche Stoffe können aus dem bisher behandelten Rechenstoffe ausgewiesen werden? Bei dem Rechnen im größern Zahlenkreise werden häufig Aufgaben mit großen fünf-, sechs- und mehrstelligen Zahlen gegeben. Diese Aufgaben haben keinen Wert, das Leben verlangt sie nicht, und die formale Seite des Rechnens kann ohne sie erreicht werden, sie sind also auszuscheiden. In vielen Schulen und selbst einklassigen Volksschulen wird das sogenannte große Einmaleins auswendig gelernt. Dies große Einmaleins ist aber vollständig unnötig. . . . Ausgeschieden kann ferner werden die schriftliche Form des Enthaltenseins. . . . Ausgeschieden müssen werden alle Bruchrechnungsaufgaben mit großem Nenner; dieselben sind unpraktisch und kosten viel Zeit und Mühe, ohne nennenswerte Erfolge zu bringen. Ebenso sind auszuscheiden die Aufgaben, welche das Aufsuchen des Generalnenners aus vielen einzelnen Nennern verlangen. Die Lehre von den periodischen Dezimalbrüchen hat weder formalen noch praktischen Wert; diese ist also auszuscheiden. Auszuscheiden sind die eigens für die Schule zusammengesetzten Aufgaben der bürgerlichen Rechnungsarten, die im Leben nie vorkommen können. . . . b) Eine Vereinfachung des Rechenunterrichts ist auch wesentlich durch eine vereinfachte Stoffanordnung zu erreichen. Die Anordnung des Stoffes der Unterstufe nach den operativen Zahlen, der fernere Entwurf dieser operativen Zahlen bei den vier Grundrechnungsarten mit unbenannten und mehrfach benannten Zahlen, die Heraushebung der Multiplikations- und Divisionsregeldetri und ihre Verbindung mit der Multiplikation und Division, die einheitliche Gestaltung der gesamten Bruchrechnung in ihrer Beziehung zu den vier Grundregeln, die Verbindung der sogenannten Tararechnung mit dem Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen, die einheitliche Beziehung der körperlichen Rechnungsarten auf die zu Grunde liegenden Prozentbestimmungen und die zusammengesetzte Regeldetri werden entschieden zur Vereinfachung des Rechenunterrichts beitragen.

---

6) Schröder, Schulpraxis, 6. Bd. Leipzig 1886. S. 239 f.
7) Hartmann a. a. O.

c) Auch die Behandlung des Stoffes muß noch gekürzt werden. Vollständige Sicherheit in den Elementen, d. h. gesicherte Zahlvorstellungen und die Fähigkeit, mit diesen zu operieren; ein einheitliches Normalverfahren, was die Kinder durch die ganze Schulzeit begleitet und bei jeder Neueinführung eines Stoffes als bekannte Größe den Kindern entgegentritt; ausreichende Übung und dadurch erzielte Sicherheit und vernünftige Anwendung an gesonderten Sachverhältnissen sind Punkte, die den Rechenunterricht vereinfachen."[8])

Die „dreistufige Rechenschule für einfache Schulverhältnisse (1- bis 6klassige Volksschulen) von G. Schlott" ist auf der ersten Seite jedes Umschlags mit der Aufschrift versehen: „Vereinfacht den Rechenunterricht in der Volksschule!" In den „Vorbemerkungen" aber heißt es: „Der gegebene Stoff ist einfachen Schulverhältnissen angemessen. Vielstellige Zahlen, zwecklos verwickelte Aufgaben, Sachverhältnisse, die unsern Schülern fern liegen und fern bleiben, Rechnungsarten, die im Leben derselben keine Anwendung finden, haben wir auszuschließen für nötig erachtet, dagegen die Forderungen, die das Leben an den kleinen Handwerker und schlichten Landmann hinsichtlich des Rechnens stellt, wie Schlagfertigkeit im Lösen von einfachen Aufgaben von den vier Grundrechnungsarten, Bekanntschaft mit der Berechnung naheliegender gemeiner Bruch- und Dezimalzahlen und Vertrautheit mit den geltenden Münzen, Maßen und Gewichten, nachdrücklich zu berücksichtigen gesucht: die Rechenschule bietet daher durchweg dem wirklichen Leben entnommene Aufgaben."[9])

Weiterhin mehrt sich die Zahl derer, welche die Vereinfachung des Rechenunterrichts fordern, sehr rasch. Jeden Methodiker zu berücksichtigen ist daher nicht gut möglich. Es ist aber auch nicht nötig. Denn die meisten der spätern Reformer schließen sich, genau genommen, den frühern an, nur daß sie ihre Wünsche und Vorschläge in veränderter Form vorbringen.

Jänicke berührt den Gegenstand am Schlusse seiner „Geschichte der Methodik" ziemlich kurz unter der Überschrift: „Berechtigte Forderungen." Er verurteilt die Überwucherung der Übung durch langatmige Unterweisungen, dazu die stoffliche Breite. „Dieser Strömung gegenüber stellt die einfache Volksschule die Forderung der straffen Konzentration um ein Minimum des Stoffes und Beschränkung auf das Notwendige." Als Beispiel giebt er das Minimum Steuers.[10]) In seinem „Rechenbuche für Volksschulen" will Heinemann den „neuesten Bestrebungen auf dem Gebiete des Rechenunterrichts" gerecht werden. Sein erster Grundsatz lautet daher: „Der Rechenunterricht der Volksschule hat den Forderungen zu genügen, welche das bürgerliche Leben an ihn stellt; er ist gegenwärtig verschiedentlich zu vereinfachen, damit er vertieft werden

---

8) Schröter a. a. O. S. 146 f.
9) Schlott a. a. O.
10) Jänicke a. a. O. S. 176.

kann."[11]) Lehrer Drischel aus Schlesien hielt in einer Nebenversammlung der Allgemeinen deutschen Lehrerversammlung zu Augsburg 1889 einen Vortrag, dessen Leitsatz IIb lautet: „Es sind verschiedene Aufgaben und ganze Gruppen von Aufgaben auszuscheiden, welche, teils zu kompliziert, teils den Anforderungen des Lebens nicht entsprechend, zur Förderung des praktischen und formalen Zweckes nicht nötig, vielmehr dieselbe zu hindern geeignet sind." Hinzugefügt wurden von ihm die Vorschläge seines Landsmannes Steuer, die er zu den seinigen machte.[12]) Auch Mittenzwey legt großes Gewicht auf die Vereinfachung des Rechenunterrichts. Auf die Frage: „Wie erzielen wir im Rechenunterrichte die gehofften Erfolge?" antwortet er: „Zunächst ist eine Vereinfachung des Stoffes geboten; zwecklos verwickelte Aufgaben, zu große Brüche, Sachverhältnisse, die den Schülern fern liegen und fern bleiben, sowie Rechnungsarten, die im Leben derselben keine Anwendung finden, sind auszuschließen oder wenigstens in den Hintergrund zu verweisen."[13]) Beetz schließt sich unserer Auffassung an, wenn er in einer Besprechung der ersten Auflage des vorliegenden Handbuchs sagt: „Was Hartmann über die Vereinfachung des Rechenunterrichts sagt, verdient, wie wir bereits andeuteten, allgemeinen Beifall. Dieselbe wird jedenfalls nicht dadurch erreicht, daß man die Quantität des Stoffes auf ein Minimum beschränkt, von dieser Zahl etliche Stellen streicht, an jenem Exempel die Verhältnisse äußerlich vereinfacht, gewisse Klassen von Rechnungen ausscheidet u. s. w. Das Interesse des Kindes muß gewonnen werden, damit sich das Wissen zum Wollen gestalte."[14]) Und an anderer Stelle führt er aus: „Diejenigen, welche eine Vereinfachung des Rechenunterrichts in einer einseitigen Beschränkung des Zieles suchen, stehen nicht auf der Höhe der Zeit, nicht auf dem Boden der Wahrheit; sie besitzen nicht, was sie von den Vätern ererbt haben. Hieraus folgt aber auch, daß eine richtige Erkenntnis des Rechenziels unserer Erziehungsschule weniger eine Verkürzung als eine Erweiterung, jedenfalls eine Vertiefung dieses Faches bringen wird."[15]) In einem Begleitworte zu seinen Schriften über Rechenunterricht verlangt Seminarlehrer Braune: „Die Schüler müssen das, was das Leben fordert, als sicheres Eigentum aus der Schule mitnehmen." Deshalb: „Der Rechenstoff, wie er bisher in den Rechenheften enthalten ist, muß wesentlich beschränkt werden."[16]) Kentenich und Frohn stellen in ihrem „Handbuche" die Rechenstoffe entsprechend den oben mitgeteilten Forderungen Frohns zusammen.[17]) Einen Stoffverteilungsplan, in welchem die „Vereinfachung" ihren Ausdruck finden soll, geben Elsner und Sendler im Anschlusse an Dorns

11) Heinemann a. a. O. S. III.
12) Drischel a. a. O. S. 336.
13) Mittenzwey a. a. O. S. IX.
14) Beetz, Tagesströmungen a. a. O. S. 39.
15) Beetz, Der vereinfachte Rechenunterricht a. a. O. S. 5.
16) Braune a. a. O.
17) Kentenich und Frohn a. a. O. S. 15.

Rechenhefte.[18]) Ganz neuerdings tritt Bußmann mit einem Rechenhefte und einer Anleitung dazu auf. Beide sind für die einklassige Volksschule bestimmt. Sie sollen nur das Notwendige, bezw. Erreichbare bieten.[19])

Halten wir diese Vorschläge, denen wir noch viele andere folgen lassen könnten, falls es überhaupt nötig wäre, gegeneinander, so finden wir, den einzigen Fall Beetz ausgenommen, ein Gemeinsames derselben bald heraus: Sie gehen aus von dem vollständigsten Verzeichnisse der in den Volksschulen jemals behandelten Rechenstoffe bezw. Rechnungsarten, scheiden das aus, was ihnen in Rücksicht auf das sogenannte praktische Leben als überflüssig erscheint und trennen schließlich das Übrigbleibende in Notwendiges und Entbehrliches. Wir behaupteten oben: Die meisten der Vereinfachungsvorschläge gleiten nur an der Peripherie unseres Unterrichtsfaches hin. Wie das zu verstehen ist, erhellt aus dem Ebengesagten. Man bemüht sich, die Quantität des Rechenstoffes auf ein Minimum zu beschränken, während die Qualität desselben nahezu oder ganz die alte bleibt. Man wendet subjektive Maßstäbe an oder entlehnt dieselben dem jenseits des Schul- und Kindeslebens stehenden sogenannten praktischen oder bürgerlichen Leben des Erwachsenen, aber es bleibt dabei nicht aus, daß die Vereinfachungsvorschläge auseinandergehen, daß der eine als notwendig bezeichnet, was der andere für überflüssig hält u. dgl. m. Wer hat da recht? Jeder in seiner Art und keiner von allen! — Oder wer möchte anders entscheiden, solange man sich noch nicht über den Maßstab geeinigt hat, der anzuwenden ist? Höchstens Majoritätsbeschlüsse könnten eine Entscheidung herbeiführen, wenn nur nicht Majoritätsbeschlüsse in pädagogischen Fragen die bedenklichste aller Lösungen wären!

So tritt denn, da die Forderung, den Rechenunterricht zu vereinfachen, eine zweifellos berechtigte ist, jedenfalls an uns zunächst die Aufgabe heran, einen Maßstab zu gewinnen, der mehr leistet als die den bisherigen Vereinfachungsvorschlägen zu Grunde liegenden Maßstäbe. In dieser Hinsicht aber haben wir bereits 1885 in dem Begleitworte zur ersten Auflage des „Rechenbuches" einige Andeutungen gegeben. Da heißt es: „Indem wir unser Hauptaugenmerk zu allernächst auf die geistige Natur des zu unterrichtenden Kindes und nicht auf die materiellen Interessen des spätern, zwanzig und mehr Jahre ältern Mannes richteten, stellte sich diese Abweichung (von andern Rechenwerken — in Anlage und Aufgabenmaterial) als Notwendigkeit heraus. Es ist ja leider charakteristisch für viele unserer Volksschulen, daß sie vor lauter Sorge um das sogenannte praktische Leben, in dem Streben, dem Kinde zu bieten, was es später angeblich braucht, sich die Arbeit außerordentlich erschweren, dabei nicht selten zu einer Stoffüberbürdung gelangen — und schließlich doch nicht erreichen, was sie erreichen zu müssen glaubten. Das gilt zwar hauptsächlich von den sogenannten Realien; doch auch im Rechen-

18) Elsner und Sendler a. a. O. S. 13.
19) Bußmann a. a. O.,

unterrichte zeigt sich dieser Übelstand. Die verhältnismäßig geringen Erfolge, welche der Rechenunterricht in den Volksschulen thatsächlich immer noch aufzuweisen hat, wenn es sich um selbständige Lösung von Aufgaben handelt, namentlich solcher, von denen die ratlosen Kinder sagen, daß sie dergleichen ‚nicht gehabt‘ haben, sind Beweis dafür. Der Rechenunterricht soll durchaus praktisch sein, das ist auch unsere Meinung; aber wir nennen nur den Rechenunterricht einen praktischen, der die geistige Natur des Kindes in erster Linie berücksichtigt.“

Was diese Andeutungen besagen wollen, ist klar. Die wahre Vereinfachung des Rechenunterrichts hat auf demselben Wege wie die Vereinfachung jedes andern Unterrichts zu erfolgen, d. h. es darf keine abgesonderte Vereinfachung sein, sondern es müssen die allgemeingiltigen pädagogischen Grundsätze für Auswahl, Anordnung und Behandlung des Lehrstoffes auf den besondern Fall des Rechenunterrichts angewendet werden. Vor allem die Grundsätze für die Auswahl des Lehrstoffes, als welche wir folgende bezeichnen:[20]) Auszuwählen sind nur solche Lehrstoffe, welche a) auf den Zögling die möglichst beste Wirkung äußern; b) der Natur des kindlichen Geistes allenthalben entsprechen; c) dem obersten Erziehungszwecke (planmäßige Entwickelung des religiös-sittlichen Charakters) sich vollständig unterordnen. Diese drei Grundsätze hängen eng mit einander zusammen, so zwar, daß der zweite und dritte streng genommen nur nähere Bestimmungen des ersten sind. Denn wenn es sich um Lehrstoffe handelt, die die möglichst beste Wirkung auf den Zögling äußern sollen, so können das selbstverständlich nur solche Lehrstoffe sein, die überhaupt auf denselben zu wirken vermögen, also Lehrstoffe, welche Anknüpfungspunkte im Gedankenkreise des Zöglings vorfinden und welche infolge ihrer Verschmelzung mit vorhandenen verwandten Elementen schließlich selbst Bestandteile dieses Gedankenkreises werden. Es handelt sich dabei aber nicht um eine beliebige, sondern um die für den vorliegenden Fall möglichst beste Wirkung. Das kann natürlich keine andere sein, als die Mitherbeiführung der Lösung der Hauptaufgabe, welche der Volksschule in Bezug auf jeden ihrer Zöglinge gestellt wird, der aus dem obersten Erziehungszwecke hervorgehenden Aufgabe.

Es sollen allgemein giltige Grundsätze auf den besondern Fall des Rechenunterrichts angewandt werden. Das setzt ferner voraus, daß über die Stellung, welche dem Rechenunterrichte in der Reihe der Unterrichtsfächer der Volksschule zukommt, keine Zweifel mehr obwalten. Leider ist letzteres noch keineswegs der Fall. Und wenn hier auch nicht der Ort ist, auf diesen Gegenstand näher einzugehen, so können wir ihn doch auch nicht ganz unbeachtet lassen. Deshalb folgendes.

Soll der Schulunterricht seine höchste Aufgabe — die planmäßige Entwickelung des religiös-sittlichen Charakters — lösen, so hat er sein

20) Vergleiche des Verfassers Abhandlung über „Auswahl des Volksschullehrstoffes“ a. a. O.

Ziel nicht im Wissen, sondern im Wollen des Zöglings zu suchen. Das Bindeglied zwischen Wissen und Wollen ist aber das Interesse (d. h. die innige Hingabe an die Gegenstände des Wissens in Verbindung mit dem anhaltenden Streben, das Gewußte nicht allein festzuhalten, sondern immer vollkommener zu gestalten), und zwar das vielseitige Interesse, wie es Herbart genannt hat, weil es sich eben nur um ein vielseitiges, reiches, den mannigfachen Beziehungen des Lebens entsprechendes Wollen handeln kann. Dem vielseitigen Interesse steht das einseitige gegenüber, d. h. ein Interesse, welches sich nur in einer oder einigen der überhaupt möglichen Richtungen bethätigt. Einseitig kann freilich auch das vielseitige Interesse werden, dann nämlich, wenn es sich in einer oder einigen Richtungen ungleich stärker als in den übrigen entwickelt. Deshalb erscheint für das vielseitige Interesse die besondere Bestimmung, daß es ein gleichmäßig entwickeltes sein müsse, durchaus nicht überflüssig. Man darf dabei an einen Gleichgewichtszustand unter den verschiedenen Arten des Interesse denken. Das hat bekanntlich auch Herbart gethan, indem er die ebenso eigenartige als scharfe, dabei kurze und bündige Bezeichnung „gleichschwebende Vielseitigkeit des Interesse" gebrauchte. Überblicken wir aber die Reihe: Der oberste Erziehungszweck fordert die planmäßige Entwickelung des religiös-sittlichen Charakters; letztere kann nur durch eine entsprechende Beeinflussung des Wollens erreicht werden; diese wiederum ist von der Herbeiführung des gleichschwebenden vielseitigen Interesse abhängig; dann kann es nicht zweifelhaft sein: die nächste und eigentliche Aufgabe des (erziehenden) Schulunterrichts besteht in der Herbeiführung des gleichschwebenden vielseitigen Interesse. Und dafür hat denn auch der Rechenunterricht an seinem Teile mit zu sorgen. Tritt doch das Interesse niemals als etwas für sich allein Bestehendes auf; ist es doch auf eine Verbindung mit den Unterrichtsstoffen angewiesen. Man kann das so ausdrücken: Nur dann wird sich gleichschwebendes vielseitiges Interesse einstellen, wenn vielseitige, wohlbegrenzte und wohlgeordnete Unterrichtsstoffe vorhanden sind.

Zwei Quellen sind es bekanntlich, aus denen unser Seelenleben fort und fort neue Nahrung empfängt: Natur und Menschenleben. Die Beziehungen, in welche der Mensch zu beiden tritt, begreifen wir aber unter den Namen Erfahrung und Umgang, so zwar, daß wir die Erfahrung vorwiegend mit der Natur, den Umgang hauptsächlich mit dem Menschenleben in Verbindung bringen. Beide, Erfahrung und Umgang, rufen Empfindungen, Wahrnehmungen und Anschauungen hervor; diese werden zu Vorstellungen. Die durch die Erfahrung vermittelten Vorstellungen führen zu Erkenntnissen, die durch den Umgang gewonnenen zu Gesinnungen oder zur Teilnahme. „Beide, Erkenntnis und Teilnahme, nehmen ursprünglich das, was sie finden, so wie es liegt; die eine erscheint in Empirie, die andere in Sympathie versunken. Aber beide arbeiten sich empor, angetrieben durch die Natur der Dinge. Die Rätsel der Welt treiben aus der Empirie Spekulation, die kreuzenden Forderungen der Menschen aus der Sympathie den geselligen Ordnungsgeist hervor. Der letztere giebt Gesetze, die Spekulation erkennt Gesetze. Unterdessen hat das Gemüt sich befreit vom Drucke der Masse, und nicht mehr versinkend ins Einzelne, wird es jetzt von den Verhältnissen angezogen; es entsteht die ruhige Betrachtung von den ästhetischen Verhältnissen, das Mitgefühl vom Verhältnis der Wünsche und Kräfte der Menschen zu ihrer Unterwürfigkeit unter den Gang der Dinge. So erhebt sich jene zum Geschmack, diese zur Religion" [21]). Nach diesen klassischen Worten sind die Erscheinungsformen der Erkenntnis: Empirie, Spekulation, Geschmack; die Erscheinungsformen der Teilnahme: Sympathie, geselliger Ordnungsgeist, Religion. Das sind zugleich die Gebiete, auf denen sich das menschliche Wollen fortgesetzt bethätigen soll, und denen sich daher das Interesse fortgesetzt zuwenden muß. Das Interesse bleibt dabei zwar immer derselbe Seelenzustand. Um jedoch den mannigfachen Inhalt, mit welchem es verknüpft ist, näher zu kennzeichnen, unterscheidet man nach Herbart zwei Hauptrichtungen des Interesse: Interessen der Erkenntnis und Interessen der Teilnahme. Zu jenen zählt man das empirische, spekulative und ästhetische, zu diesen das sympathetische, soziale und religiöse Interesse. Beide Richtungen zusammengenommen ergeben wieder den Begriff des vielseitigen Interesse, also desjenigen Interesse, welches der (erziehende) Schulunterricht erzeugen und pflegen soll. Wird er das können? Er wird es, wenn er sich auf dieselben Gebiete erstreckt, welchen sich das Interesse zuzuwenden hat, um ein vielseitiges zu sein, d. h. wenn er eine Gliederung erhält, die auf Erfahrung und Umgang sich gründet. Mit anderen Worten: Er wird es können, wenn es Unterrichtsfächer giebt, die einerseits an die Resultate der Erfahrung und anderseits an die Resultate des Umgangs anknüpfen. Da nun aus der Erfahrung vorwiegend Kenntnisse der Natur, aus dem Umgange Gesinnungen gegen beseelte Wesen (Empfindungen der Teilnahme) hervorgehen, so lassen sich, parallel den beiden Hauptrichtungen des Unterrichts, unterscheiden: eine naturwissenschaftliche und eine geschichtliche Gruppe, oder — was dasselbe ist — zwei Hauptunterrichtsstämme: Naturkunde und Geschichte, wobei allerdings die Geschichte im weitern Sinne (als Inbegriff der Gesinnungsverhältnisse beseelter Wesen) zu nehmen ist.

Da der Volksschulunterricht kein anderer als ein erziehender sein kann, so ist jedenfalls den Fächern, welche dem ethischen Zwecke der Erziehung am unmittelbarsten dienen, das Übergewicht einzuräumen. Das aber sind die geschichtlichen Fächer, denn diese hauptsächlich wecken und beleben die Interessen der Teilnahme und werden so zu einer überaus wichtigen Quelle sittlicher Gesinnungen. So sind denn die geschichtlichen Fächer in der Volksschule allen übrigen voranzustellen: Biblische Geschichte, Kirchengeschichte, Katechismuslehre und Kirchenlied einerseits, Weltgeschichte, Gesellschaftskunde, politische Geographie anderseits.

Die naturwissenschaftlichen Fächer, welche, wie gesagt, an die Resultate der Erfahrung anknüpfen, haben es teils mit Naturgegenständen,

21) Herbart, Allgem. Päd. Drittel Kapitel, II. Willmann a. a. O., Teil I.

teils mit Naturereignissen zu thun, sie trennen sich daher in Naturgeschichte (Tier-, Pflanzen- und Mineralkunde), Naturlehre (Physik und Chemie) und — bis zu einem gewissen Punkte — Menschenkunde (Anthropologie).

Doch damit ist die Zahl der Unterrichtsfächer noch keineswegs erschöpft. Zur Geschichte gesellt sich alsbald die Sprachkunde, deshalb, weil es Sprachdenkmäler sind, durch die uns die Geschichte überliefert wird. Aber auch an und für sich ist die Sprache von Bedeutung, indem sie ja überall das wichtigste Darstellungsmittel abgiebt, Begriffe zu bilden und Willensäußerungen verständlich zu machen. Sprechen, Lesen, Sprachlehre, Recht- und Aufsatzschreiben treten als Zweige des Sprachunterrichts auf. Dem Sprachunterricht schließt sich überdies der Gesangunterricht an. Der Gesang ist diejenige Art der Sprache, welche unter Hinzunahme bestimmter Tonfolgen Empfindungen der Teilnahme weckt.

Mit der Naturkunde in engster Verbindung steht die Mathematik. Letztere ist, wie von Ziller nach Bartholomäi treffend bemerkt worden ist, die formale Seite der Natur, denn Zahl, räumliche Gestalt und Bewegung treten bei allen Gegenständen und Erscheinungen in der Natur hervor, und sie erst sind es, welche eine scharfe Auffassung derselben ermöglichen. Rechnen (Arithmetik) und Raumlehre (Formenlehre, Geometrie) sind die beiden Zweige der Mathematik. Zu ihnen gesellt sich dann noch das Zeichnen als eine Nachbildung des Räumlichen.

Wir haben oben bereits angedeutet, daß nur das leicht Eingang in den Gedankenkreis des Zöglings findet, was sich seiner Erfahrung und seinem Umgange eng anschließt. Hieraus entspringt aber für den sprachlichen und mathematischen Unterricht noch die besondere Forderung: beide müssen in möglichst enger Verbindung mit den Hauptstämmen des Schulunterrichts, dem geschichtlichen und naturkundlichen, bleiben.

Endlich ist noch dreier Fächer zu gedenken, welche sich gleichmäßig auf Natur- und Menschenleben beziehen: Geographie, Turnen und gewisse technische Beschäftigungen.

Nehmen wir letztere noch hinzu, so entsteht folgendes, die vorstehenden Darlegungen knapp zusammenfassendes Schema:

Hauptfächer des Schulunterrichts.

I. Unterrichtsfächer der Teilnahme.

a) Sachen.	b) Formen.
1. Religiöse Reihe:	1. Sprachunterricht:
Bibl. Geschichte.	Lesen.
Katechismuslehre.	Schreiben.
2. Profane Reihe:	2. Gesang.
Geschichte.	

II. Unterrichtsfächer der Erkenntnis.

a) Sachen.	b) Formen.
1. Gegenstände: Tier-, Pflanzen- und Mineralienkunde.	1. Größenlehre: Rechnen. Raumlehre.
2. Ereignisse: Naturlehre.	2. Zeichnen.

III. Unterrichtsfächer der Teilnahme und Erkenntnis.

1. Geographie. 2. Turnen. 3. Technische Beschäftigungen.

Durch das Vorstehende wird dem Rechnen seine Stellung in der Reihe der Unterrichtsfächer der Volksschule angewiesen: es gehört zu den Unterrichtsfächern, welche vorwiegend die Interessen der Erkenntnis (empirische, spekulative und ästhetische) zu pflegen haben, ist also ein Zweig des zweiten Hauptstammes, der Naturkunde, nicht sowohl Sach- als vielmehr Formenunterricht und steht daher den naturkundlichen Fächern (Naturgeschichte und Naturlehre), weiterhin auch der Geographie zur Seite. Ist diese Stellung, die sich auf besonnene psychologische Erwägungen stützt, aber die richtige, d. h. die der Natur des Objekts entsprechende, so reiht sich derselben als einfache Folge die Forderung an, die Vereinfachung des Rechenunterrichts auf sie zu gründen. Damit aber wäre der richtige Ausgangspunkt gewonnen, und es fehlte nur noch der richtige Zielpunkt. Doch auch für diesen geben die vorstehenden Erörterungen ausreichende Fingerzeige. Jedes Unterrichtsfach hat entsprechend seiner Natur an der Lösung der Hauptaufgabe der Volksschule — planmäßige Entwickelung des religiös-sittlichen Charakters — mitzuarbeiten. Da nun hierbei das Wollen und nicht das Wissen des Zöglings von ausschlaggebender Bedeutung ist, so zwar, daß das Wollen aus dem Wissen hervorgehen muß, so kann als nächstes Ziel des Rechenunterrichts nur ein Wissen gelten, welches den Keim des Wollens in sich trägt. Dieser Keim aber ist das Interesse, die innige Hingabe an die Gegenstände des Unterrichts in Verbindung mit dem anhaltenden Streben, das Erarbeitete nicht nur festzuhalten, sondern immer vollkommener zu gestalten. Wir dürfen also als richtigen Zielpunkt das Interesse für die Gegenstände des Rechenunterrichts hinstellen. Daß es sich hierbei wesentlich mit um die Natur des Subjekts, die geistige Natur des Zöglings, handelt, ist selbstverständlich.

Ausgehend von der richtigen Stellung des Rechenunterrichts in der Reihe der Volksschul-Unterrichtsfächer, hinzielend auf die Herbeiführung des Interesses für die Gegenstände des Rechenunterrichts, so sind wir sicher, die festen Punkte gewonnen zu haben, welche die Art der Vereinfachung des Rechenunterrichts nicht nur bestimmen können, sondern bestimmen müssen. Wie aber die Ausführung solcher Vereinfachung im einzelnen sich zu gestalten hat, das ist Sache des Lehrplans, welcher

nach folgenden drei Gesichtspunkten aufzubauen ist: a) Auswahl des Lehrstoffes; b) Verteilung des Lehrstoffes; c) Verbindung des Lehrstoffes. Davon aber erst weiter unten.

§ 15.

Schulbehördliche Bestimmungen.

Litteratur. Allgemeine Bestimmungen des Königlich Preußischen Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten betreffend das Volksschul-, Präparanden- und Seminar-Wesen vom 15. Oktober 1872. 6. Aufl. Hannover 1877. Kockel, F. W. Lehrplan für die einfachen Volksschulen des Königreichs Sachsen vom 5. November 1878. Mit erläuternden Anmerkungen und Sachregister. 6. Aufl. Dresden 1893. Lehrplan und Schulordnung für die Badischen Volksschulen nach der Verordnung des Großh. Minist. d. J. vom 24. April 1869. 3. Aufl. Tauberbischofsheim 1886. Normallehrplan für die Württembergischen Volksschulen vom 21. Mai 1870. Stuttgart 1886. Volksschulgesetzgebung des Großherzogtums Sachsen. 3 Hefte. Weimar 1875—76. Werther, W. Die Verordnungen betreffend das höhere Mädchenschulwesen in Preußen. Hannover 1888.

Es ist charakteristisch für die deutsche Volksschulgesetzgebung, daß in ihr das Bestreben, alle beteiligten Faktoren zu möglichst hoher Geltung kommen zu lassen, immer deutlicher hervortritt. Das zeigt sich namentlich auch in allen neuern, den Volksschulunterricht betreffenden Bestimmungen. Denn diese stützen sich, wie sich leicht erkennen läßt, auf die positiven Ergebnisse der theoretischen und praktischen Pädagogik der letzten Jahrzehnte. Sie wollen einerseits unter sorgfältiger Beachtung der Bedürfnisse derjenigen Lebenskreise, denen die Volksschüler angehören, das wirklich Wertvolle, anderseits unter steter Rücksichtnahme auf die Leistungsfähigkeit der Kinder das sicher Erreichbare feststellen. In diesem Sinne dürfen diese Bestimmungen als Endglieder mehr oder weniger langer Entwickelungsreihen, mindestens aber als Zusammenfassungen betrachtet werden, welche in knappester und übersichtlichster Form den jeweiligen Stand des Volksschulunterrichts kennzeichnen. Dieses umsomehr, als sie zugleich das Arbeitsfeld der praktischen Pädagogik auf eine Reihe von Jahren hinaus nach Umfang und Inhalt scharf begrenzen und somit die Fortentwickelung der Unterrichtsmethodik wesentlich beeinflussen. Wie dieses aber in Bezug auf den Volksschulunterricht überhaupt gesagt werden darf, so doch ganz besonders in Rücksicht auf den Volksschul-Rechenunterricht. Und so erscheint es in der That wünschenswert, an dieser Stelle auch von den bezüglichen schulbehördlichen Bestimmungen wenn nicht aller, so doch einiger deutschen Staaten Kenntnis zu nehmen.

Bei weitem die meisten der norddeutschen Volksschulen gehören dem Königreiche Preußen an. Für dieselben sind also die „Allgemeinen Bestimmungen des Königlich Preußischen Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten vom 15. Oktober 1872“ maßgebend.[1]) Darin heißt es § 28:

1) Allgemeine Bestimmungen a. a. O. S. 17.

„Der Rechenunterricht.

Auf der Unterstufe werden die Operationen mit benannten und unbenannten Zahlen im Zahlenraume von 1 bis 100, auf der mittleren diejenigen im unbegrenzten Zahlenraume mit benannten und unbenannten Zahlen gelernt und geübt; auf der letzteren auch angewandte Aufgaben aus der Durchschnittsrechnung, Resolutionen und Reduktionen und einfache Regeldetri gerechnet; Pensum der Oberstufe sind die Bruchrechnung, welche bereits auf den untern Stufen in der geeigneten Weise vorbereitet werden muß, und deren Anwendung in den bürgerlichen Rechnungsarten, sowie eingehende Behandlung der Dezimalbrüche.

In der mehrklassigen Schule erweitert sich das Pensum in den bürgerlichen Rechnungen durch Aufnahme der schwierigen Arten und das in der Rechnung mit Dezimalen durch die Lehre von den Wurzelextraktionen.

Auf der Unterstufe wird in der Schule mit einem oder zwei Lehrern, soweit es sein kann, in der mehrklassigen Schule regelmäßig nur im Kopfe gerechnet. Bei Einführung einer neuen Rechnungsart geht auf allen Stufen das Kopfrechnen dem Tafelrechnen voran. Bei der praktischen Anleitung ist überall die Beziehung auf das bürgerliche Leben ins Auge zu fassen; darum sind die Exempel mit großen und vielstelligen Zahlen zu vermeiden und die angewandten Aufgaben so zu stellen, wie sie den wirklichen Verhältnissen entsprechen.

Durch diese Aufgaben sind die Schüler zugleich mit dem geltenden Systeme der Maße, Münzen und Gewichte bekannt zu machen.

Das Rechnen ist auf allen Stufen als Übung im klaren Denken und richtigen Sprechen zu betreiben; doch ist als der letzte Zweck stets die Befähigung der Schüler zu selbständiger, sicherer und schneller Lösung der ihnen gestellten Aufgaben anzusehen.

Dem Unterrichte sind in allen Schulen Aufgaben- (Schüler-)Hefte, zu denen der Lehrer das Fazitbüchlein in Händen hat, zu Grunde zu legen."

Im Königreiche Sachsen, dessen Volksschulen, wie allgemein anerkannt wird, auf einer hohen Stufe der Entwickelung stehen, erhält der Rechenunterricht seine Weisungen durch den „Lehrplan für die einfachen Volksschulen des Königreichs Sachsen vom 5. November 1878."[2]) In diesem heißt es:

„§ 4. Rechnen.

Der Rechenunterricht soll die Schüler befähigen, im Verkehr des gewöhnlichen Lebens vorkommende Berechnungen selbständig und sicher auszuführen.

Die Schüler sind daher in anschaulich entwickelnder Weise zum Verständnis der einschlagenden Rechenoperationen anzuleiten, hauptsächlich

---

2) Kockel a. a. O. S. 65.

aber in der mündlichen und schriftlichen Lösung praktisch gewählter Aufgaben mit mäßigen Zahlen zu üben.

Innerhalb der ersten vier Schuljahre werden die Grundrechnungsarten in den Gebieten 1 bis 10, 1 bis 100, 1 bis 1000 teils mit gleich-, teils mit ungleichbenannten Zahlen erläutert und geübt; doch soll die Erweiterung des Zahlenraumes über 1000 hinaus nicht ausgeschlossen sein. Dabei ist die Kenntnis der deutschen Münzen, Maße und Gewichte zu begründen, die Bruchrechnung durch gelegentliche Anwendung der gebräuchlichsten gemeinen und Dezimalbrüche, die Regeldetri durch Gewöhnung an den Schluß über die Einheit vorzubereiten.

Demgemäß wird innerhalb der letzten vier Schuljahre zuvörderst die Einübung der Grundrechnungsarten fortgesetzt und zu Ende geführt; alsdann gelangt die Rechnung mit Brüchen, vornehmlich Dezimalbrüchen, endlich die Regeldetri unter Anwendung auf die wichtigsten bürgerlichen Rechnungsarten zur Behandlung. Die Regeldetriaufgaben werden lediglich nach dem Schlusse über die Einheit, nicht nach Proportionen gelöst.

Mündliches und schriftliches Rechnen sind in Verbindung zu betreiben.

Bei schriftlichen Berechnungen ist auf Sorgfalt der Ausführung streng zu halten.

Die Zahl der Abteilungen ist in allen Klassen möglichst zu beschränken.

Als Lehrmittel sind außer der Rechenmaschine Aufgabenhefte für die Hand der Schüler erforderlich."

Als Vertreter der norddeutschen Kleinstaaten kann das Großherzogtum Sachsen-Weimar gelten. Für dieses bestimmt die „Ministerial-Verordnung über die innere Einrichtung des Volksschulwesens im Großherzogtum Sachsen vom 20. März 1875" in § 3, Punkt 4, folgendes:[3])

„Rechnen mit Zahlen und Raumgrößen.

Auf der Unterstufe, welche sich mit Bilden, Zerlegen und Verbinden der Zahlen von 1 bis 100 beschäftigt, werden die vier Grundrechnungsarten an ein- und zweistelligen Zahlen geübt.

Die Mittelstufe erreicht eine angemessene Fertigkeit in den vier Grundrechnungsarten mit ungleich benannten Zahlen. Mündliches und schriftliches Rechnen mit dem Schluß auf die Einheit. Die Aufgaben sind vorzugsweise aus dem Gebiete der Haus- und Landwirtschaft zu nehmen.

Betrachtung mathematischer Körper und ihrer Begrenzung.

Auf der Oberstufe die vier Grundrechnungsarten mit gemeinen und Dezimalbrüchen. Die verschiedenen Anwendungen des Schlusses auf die Einheit in schwierigern Aufgaben. Kenntnis der gangbaren Münzen, Maße und Gewichte. Übungen im Messen und Berechnen der im gewöhnlichen Leben als meßbare Raumgrößen am häufigsten vorkommenden Flächen und Körper. Die Aufgaben sind vorzugsweise aus der Haus- und Landwirtschaft und dem Gewerbsleben zu wählen."

3) Volksschulgesetzgebung rc. Heft 2, S. 96.

Die Praxis der süddeutschen Volksschulen mußte sich in Bezug auf den Rechenunterricht vor Einführung einheitlicher Münzen, Maße und Gewichte selbstverständlich von derjenigen der norddeutschen Volksschulen mehrfach unterscheiden. Das hat in mancher Beziehung auch die neuern schulbehördlichen Bestimmungen noch beeinflußt. Und so scheint es geboten, den drei Beispielen für Norddeutschland wenigstens zwei für Süddeutschland folgen zu lassen.

Für das Königreich Württemberg ist maßgebend, was der „Normallehrplan" enthält.[4]) Wir lesen da:

„§ 21. III. Rechnen. Zweck im allgemeinen.

Durch den Rechenunterricht sollen die Schüler zur Fertigkeit in den elementaren Zahlenoperationen und in deren Anwendung auf die Rechnungsfälle des gemeinen Lebens gebracht werden.

Dabei ist auf jeder Stufe klares Denken und richtiges Sprechen zu erstreben und auf eine verstandesmäßige Handhabung der verschiedenen Rechnungsarten hinzuarbeiten.

Ihr Ziel erreicht die Volksschule weniger durch Ausdehnung als vielmehr dadurch, daß innerhalb des beschränkten Gebiets auf Sicherheit und Fertigkeit, namentlich im mündlichen Rechnen auf verständige, im schriftlichen auf pünktliche und saubere Darstellung gehalten wird.

§ 22. I. Abteilung. Ziel. Veranschaulichung der elementaren Zahlverhältnisse.

Stoff. Der Zahlenraum für diese Übungen beschränkt sich auf 1—10. Innerhalb desselben sind alle Grundoperationen durchzumachen, jedoch vom Multiplizieren und Dividieren nur leichtere Fälle. Ziffernschreiben beim Schreibunterricht. Behandlung. Die genannten Operationen geschehen zuerst mit Hilfe der gegebenen Anschauungsmittel, hernach aber in reinen Zahlen. Hierbei muß auf ein zusammenhängendes, richtiges Sprechen der Kinder streng gehalten werden, diese haben in ihre Antworten nicht bloß das Resultat einer Aufgabe, sondern diese selbst mit aufzunehmen. Behufs der Selbstbeschäftigung schreibt der Lehrer, nachdem die Schüler einige Fertigkeit im Gebrauch des Griffels erlangt haben, Aufgaben an die Wandtafel, die von den Kindern zuerst in Strichen oder Ringen, später auch in Ziffern auszuarbeiten sind. Die ersten Übungen dieser Art müssen aber zuvor unter der unmittelbaren Leitung des Lehrers gemacht sein, wobei wesentlich auch auf ein geordnetes Neben- und Untereinanderschreiben der Zeichen zu sehen ist. Wo metrische Maße als Beispiele gewählt werden, beschränkt man sich auf die Ausdrücke: Meter, Liter, Kilogramm.

§ 23. II. Abteilung. Ziel. Zahlenraum für die Übungen beim Kopfrechnen von 1—100, beim Numerieren und schriftlichen Rechnen bis zu 4stelligen Zahlen. Die Schüler lernen im Kopf addieren und subtrahieren mit 1- und 2stelligen Zahlen; sie multiplizieren und dividieren

4) Normallehrplan a. a. O. S. 15 f.

2stellige Zahlen durch einzifferige. Schriftlich geht das Rechnen bis zu vier Stellen, gleichfalls mit einzifferigem Multiplikator und Divisor. Stoff. Zerlegen der Zahlen, namentlich beim Auf- und Absteigen über die Zehner; die vier Spezies in unbenannten und in gleichbenannten Zahlen; Übung des Einmaleins und des Einsineins; Anwendung derselben bei der Verwandlung von Münzen, Maßen und Gewichten. Aus dem metrischen System werden zum Rechnen mit gleichbenannten Zahlen benützt die Benennungen von den Vervielfältigungen und Teilungen des Meter und Liter und die Teilungen des Kilogramm bis zum Gramm. Behandlung. Die beiden Jahrgänge dieser Abteilung werden bei den Übungen in der Art zusammengenommen, daß je die älteren Schüler die schwereren Aufgaben aus der gleichen Gattung zu lösen haben; z. B. die älteren lernen und üben das Einmaleins ganz, die jüngeren bis zum Fünfer; diese rechnen mit ein- und zweistelligen, jene mit mehrstelligen Zahlen. Mit den Übungen im Kopfrechnen und mit dem sichern Einprägen des Einmaleins werden auf dieser Stufe noch die Veranschaulichungen durch die Zählmaschine 2c. verbunden.

Bei dem schriftlichen Rechnen sind die Schüler zu einer gut geschriebenen, deutlichen und geordneten Darstellung, bei dem mündlichen zu einer zusammenhängenden und klaren Lösung der Aufgabe anzuhalten. Es empfiehlt sich, den Schülern gedruckte Aufgabensammlungen in die Hand zu geben. Wo dies nicht geschehen kann, hat der Lehrer, um Zeit zu ersparen, seine Aufgaben in Zahlenreihen zu stellen, deren einzelne Posten zu verschiedenen Operationen verwendet werden können. (Übungstafeln.)

§ 24. III. Abteilung. Ziel. Durch Fortsetzung und Erweiterung der Übungen in den 4 Spezies, wozu nunmehr auch die Rechnung mit ungleichbenannten Zahlen aufgenommen wird, sollen die Schüler so weit in den Grundoperationen gebracht werden, daß selbständige Übungen darin hernach für die IV. Abteilung nur noch repetitionsweise vorzunehmen sind. Hiezu kommt ein vereinfachtes Rechnen mit gemeinen und Dezimalbrüchen. Stoff. Numerieren bis zu 7 Stellen; Multiplizieren und Dividieren mit nicht mehr als dreistelligen Multiplikatoren und Divisoren; Rechnen mit ungleichbenannten Zahlen, wobei das metrische System (und zwar hier von den Grundmaßen aufsteigend bis zum Tausendfachen) in Anwendung kommt. Bezüglich der bisherigen Maße 2c. beschränkt man sich auf die landes- und ortsüblichen.

Gemeine Brüche nach folgendem Stufengang: 1. Begriff und Entstehung der Brüche; Lesen und Schreiben derselben. 2. Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in Brüche und umgekehrt. 3. Zusammenzählen und Abziehen gleichnamiger Brüche. 4. Multiplikation und Division von Brüchen mit ganzen Zahlen. 5. Wertveränderung der Brüche durch Multiplikation oder Division des Zählers oder Nenners. 6. Erweitern und Vereinfachen. 7. Verwandlung benannter Zahlen in Brüche der nächst höheren Sorte und umgekehrt. 8. Gleichnamigmachen zweier

Brüche; Zusammenzählen und Abziehen derselben mit Beschränkung auf Fälle, bei denen der Hauptnenner innerhalb des Einmaleins liegt.

Dezimalbrüche in nachstehender Ordnung: 1. Entstehung der Dezimalbrüche (Zehnersystem unterhalb der Einer). 2. Lesen der Dezimalbrüche auf verschiedene Weise und Schreiben derselben. 3. Multiplikation und Division mit 10, 100, 1000 (durch Versetzung des Komma). 4. Benannte Zahlen des metrischen Systems mit andern metrischen Benennungen zu lesen, z. B. 1 cm + 7 mm = 0,017 m; 2 Dl + 5 l + 8 dl = 258 dl = 25,8 l = 2,58 Dl. Behandlung. Der Unterrichtsstoff wird in einem Jahre durchgenommen. Die Behandlung beschränkt sich durchaus auf möglichst einfache Beispiele. Bei der Einübung geht das Kopfrechnen dem schriftlichen voran.

§ 25. IV. Abteilung. Ziel. Fortsetzung des Unterrichts in den Dezimalbrüchen, Einführung in die Schlußrechnung (Bruchsatz) und Befähigung der Schüler, diese auf die Rechnungsaufgaben des gemeinen Lebens anzuwenden. Stoff. A. Dezimalbrüche in folgender Ordnung: 1. Zusammenzählen und Abziehen mit Anwendung auf das metrische System, wobei auch die unter den Grundmaßen liegenden Bezeichnungen zur Anwendung kommen. Die Aufgaben sind öfters in ungleichbenannten Zahlen zu schreiben und aufzulösen. 2. Verwandlung endlicher Dezimalbrüche in gemeine Brüche. 3. Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und Anwendung dieser Operation auf das Abziehen und auf das Zusammenzählen von mehr als 2 gemeinen Brüchen. 4. Multiplikation der Dezimalbrüche. 5. Division derselben. 6. Reduzieren und Resolvieren der metrischen Maße.

B. Den Stoff für Aufgaben aus der Schlußrechnung bieten die häuslichen, landwirtschaftlichen und gewerblichen Verhältnisse des gemeinen Lebens, wobei auf die etwaige größere oder geringere Beteiligung des Ortes am allgemeinen Verkehr Rücksicht zu nehmen ist. Der Lehrgang ist folgender: 1. Der Zweisatz (Schluß von der Einheit auf die Mehrheit und umgekehrt). 2. Der Dreisatz (Schluß von einer Mehrheit auf eine andere). Auf beiden Stufen zuerst mit ganzen, dann mit gebrochenen Zahlen, und zwar in geraden und umgekehrten Verhältnissen. Anwendung dieser Rechnungsformen auf einfache praktische Fälle der Tausch-, Durchschnitts-, Gewinn- und Verlust-, Gesellschafts-, Verbrauchs- und Arbeits-, Verwandlungs- und Flächenrechnung. 3. Vom Vielsatz nur die Zinsrechnung mit Beschränkung auf die Frage nach dem Zins. Beim Kopfrechnen, das auf dieser Stufe auch in besonderen Übungen auftritt, müssen die Verhältnisse, die der tägliche Verkehr darbietet, also Berechnung von Preisen, Münzverwandlungen ꝛc. ins Auge gefaßt werden. Behandlung. Der für diese Stufe bestimmte Lehrgang wird alljährlich durchgenommen. So oft eine neue Rechnungsart auftritt, ist dieselbe zu erläutern und an einfachen Beispielen mündlich zu üben. Beim schriftlichen Rechnen hat der Schüler anfangs den Bedingungs- und Fragesatz anzugeben, die Schlußreihe vollständig darzustellen und, was er schreibt, in geordneten Sätzen auszudrücken. Erst wenn die Schüler die Aufgaben sachlich beurteilen können und das Verständnis der Rechenform erreicht ist, darf ein abgekürztes Rechnen eintreten, das zuletzt nur den Ansatz und die Ausrechnung giebt. Nachdem einige Rechnungsarten durchgenommen sind, giebt der Lehrer vermischte Aufgaben aus denselben. Die Grundoperationen sind auf dieser Stufe öfters zu wiederholen. An geeigneten Aufgaben wird auch das Rechnen mit aliquoten Teilen geübt. Nachdem im Kopfrechnen einige Fertigkeit erlangt ist, sind die Schüler zu mehrfacher Lösung einer Aufgabe zu veranlassen. Kopfrechnungsvorteile sind nur zulässig, nachdem die Schüler auf dieselben geführt worden sind. Ein öfterer Wechsel im Aufrufen ist bei Lösung von Kopfrechnungsaufgaben angemessen. Aus der Raumlehre kommt in der einklassigen Volksschule die Vorführung des Dreiecks und Vierecks in Verbindung mit dem Rechnen vor."

Für das Großherzogtum Baden bestimmt der „Lehrplan für die Volksschule" vom 24. April 1869 folgendes:[5])

„3. Rechenunterricht. § 44. Das Kopfrechnen soll mit dem Rechnen auf der Tafel gleichen Schritt halten, jedoch das letztere vorbereiten. Bei dem gesamten Rechenunterrichte, besonders aber bei der mündlichen Behandlung desselben, hat der Lehrer darüber zu wachen, daß die Schüler in vollständigen und sprachrichtig gebildeten Sätzen sich ausdrücken. Bei dem Kopfrechnen ist jede mögliche Freiheit des Verfahrens bei der Lösung zu gestatten, die Auffindung eigener Auflösungsarten bei den Kindern zu fördern, überhaupt die Lösung der Aufgaben auf verschiedene Weisen zu begünstigen. Bei dem Tafelrechnen dagegen ist streng nach bestimmten Rechnungsregeln zu verfahren. Die Rechnungsregeln sollen nicht vom Lehrer angegeben, sondern aus der mündlichen Lösung anschaulicher Beispiele in kleinen Zahlen möglichst von den Schülern selbstthätig erkannt, unter Beihilfe des Lehrers in bündigster Form ausgesprochen und dann dem Gedächtnisse fest eingeprägt werden. Das zur Erkenntnis gebrachte Rechnungsverfahren ist jeweils durch vielfache Übung zur Geläufigkeit zu bringen, wobei die das Schnellrechnen befördernden Wege nicht verschmäht werden dürfen. Ein Weiterschreiten ist durchaus unzulässig, bevor das richtige Verständnis und die entsprechende Fertigkeit und Sicherheit einer Rechenoperation erreicht ist. Bei der Auswahl der Aufgaben soll der Lehrer durch die wirklichen Anforderungen des bürgerlichen Lebens sich leiten lassen und verwickelte Einkleidungen und Rechnungen in großen Zahlen vermeiden. Es ist darauf hinzuwirken, daß der Schüler, bevor er zur Auflösung der Aufgaben im Kopfe oder auf der Tafel schreitet, jeweils den Gang der Rechnung in allen Teilen anzugeben vermag, nachdem er die zum Verständnis der Aufgabe und die zur Auffindung der Lösung etwa nötigen Erläuterungen erhalten hat. Die Ausrechnung selbst hat vom Schüler durchaus selbständig zu erfolgen.

5) Lehrplan a. a. O. S. 28.

Ziele der einzelnen Schuljahre. Erstes Schuljahr. § 45. Zu- und Abzählen mit 1—5 einschließlich im Zahlenraume von 1—20 in reinen und angewandten Zahlen. Bezeichnung der Zahlen durch Striche und Ziffern. Zweites Schuljahr. § 46. Zu- und Abzählen mit 1—10 einschließlich im Zahlenraume von 1—100 in reinen und angewandten Zahlen. Darstellung der Zahlen durch Ziffern. Drittes Schuljahr. § 47. Das Vervielfachen und Teilen innerhalb der Grenzen vom kleinen Einmaleins, mündlich und schriftlich. Zu- und Abzählen ein- und zweistelliger Zahlen im Zahlenraume von 1—1000, mündlich und schriftlich, von dreistelligen nur schriftlich. Sämtliches in reinen und angewandten Zahlen. Viertes Schuljahr. § 48. Mündlich: Vervielfachen und Teilen innerhalb der Grenzen vom großen Einmaleins, jedoch ohne Memorierung desselben. Sämtliches in reinen und angewandten Zahlen. Auf der Tafel: Die vier Spezies in unbenannten Zahlen im unbeschränkten Zahlenraume. Fünftes Schuljahr. § 49. Kenntnis der badischen Maße und Gewichte und der im Lande kursierenden Münzen. Verwandlung höherer Sorten in niedere und umgekehrt (Resolution und Reduktion), mündlich und schriftlich. Die vier Spezies in ungleich benannten Zahlen mündlich und schriftlich in leichten Aufgaben, mit Ausschluß der Zeitrechnungen. Sechstes Schuljahr. § 50. Vergleichung der badischen Maße, Münzen und Gewichte mit denen der angrenzenden Staaten. Schwierigere Rechnungen in ungleich benannten Zahlen. Das Erweitern, Abkürzen, die Gleichnamigmachung und die vier Spezies der Brüche, mündlich und schriftlich. Ferner im Kopfe: Schlußrechnungen von der Einheit auf die Mehrheit und umgekehrt. Das Wichtigste der Dezimalbrüche. Siebentes Schuljahr. § 51. Zweisatzrechnung mündlich und schriftlich, letztere zwei-, drei- und mehrgliedrig. Achtes Schuljahr. § 52. Zweisatzrechnung mündlich und schriftlich."

Von der „Volksschule" unterschieden wird in Baden die „einfache Volksschule" mit einfacher Unterrichtszeit. Für diese bestimmt der „Normallehrplan" in sehr ausführlicher Weise das Nähere. Erstes Schuljahr. Zu- und Abzählen von 1—5 einschließlich im Zahlenkreise 1—20. Zweites Schuljahr. Zu- und Abzählen der Zahlen 1—10 im Zahlenkreise 1—100. Drittes Schuljahr. Vervielfachen und Teilen im Zahlenkreise bis 100. Erweiterung des Zahlenkreises bis 1000. Zu- und Abzählen. Viertes Schuljahr. Vervielfachen. Teilen. Der erweiterte Zahlenraum. Fünftes Schuljahr. Das Rechnen in ungleich benannten Zahlen. Sechstes Schuljahr. Gemeine und Dezimalbrüche. Mündliche und schriftliche Lösung leichter, eingekleideter Aufgaben aus dem Bereiche des bürgerlichen Verkehrs. Siebentes Schuljahr. Fortsetzung des angewandten Rechnens, mündlich und schriftlich, unter allmählichem Übergange zu weniger einfachen Aufgaben, insbesondere mit Ausdehnung auf die mehrgliedrige Schlußrechnung. Achtes Schuljahr. Fortsetzung und Ausdehnung des angewandten Rechnens auf kompliziertere Aufgaben aus dem Gebiete des bürgerlichen Verkehrs, mündlich und schriftlich.[6])

6) Lehrplan a. a. O. S. 70 f.

Große Aufmerksamkeit widmet man in neuerer Zeit auch den besondern Bedürfnissen der Mädchenschulen. Eine ziemliche Anzahl von Rechenheften will ausschließlich diesen Bedürfnissen dienen und mehrere Schulbehörden haben die bezüglichen Bestrebungen durch Aufstellung von „Normallehrplänen" anerkannt und gefördert. Als besonders erwähnenswert erscheint hier der „Normallehrplan für die höheren Mädchenschulen zu Berlin", veröffentlicht im August 1886. Derselbe bezieht sich auf eine neunstufige Schule, in welcher für die unterste Klasse 3, für die fünf folgenden Klassen 4 und die drei obersten Klassen 2 wöchentliche Rechenstunden angesetzt sind[7]). Als Ziele gelten:

„Klasse 9. Addieren und Subtrahieren im Zahlengebiete von 1—100. Multiplizieren und Dividieren mit einstelligem Multiplikator und Divisor bis zum Produkt bezw. Dividend 100.

Klasse 8. Kopfrechnen: Addieren und Subtrahieren zweistelliger Zahlen; Multiplikation einer zweistelligen mit einer einstelligen Zahl; Dividieren mit einstelligem Divisor, zweistelligem Quotient. Schriftlich: Lesen, Schreiben, Addieren, Subtrahieren der Zahlen bis 10000; Einmaleins; Multiplizieren und Dividieren mit einstelligem Multiplikator bezw. Divisor bis zum Produkt bezw. Dividend 10000.

Klasse 7. Kopfrechnen: Fortgesetzte Übungen im Addieren und Subtrahieren ein- und zweistelliger Zahlen, dann ein- und zweistelliger mit folgenden Nullen. Multiplikation zweistelliger mit einstelligen Zahlen, erst ohne, dann mit folgenden Nullen. Besondere Rücksicht auf die Multiplikation der Zahlen bis 20 mit einstelligen Zahlen, so daß das sogenannte große Einmaleins eingeübt (nicht auswendig gelernt) wird. Entsprechende Divisionen. Schriftlich: Lesen und Schreiben großer Zahlen; vier Spezies im unbegrenzten Zahlengebiete.

Klasse 6. Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen dezimaler Teilung unter Anwendung dezimaler Schreibweise, dann mit Zahlen nicht dezimaler Teilung (besondere Beachtung ausländischer Münzen und Maße); Regeln der Teilbarkeit, Zerlegen in Primfaktoren, hauptsächlich im Kopfe zu üben; daneben fortgesetzte Übungen im Kopfrechnen wie in Klasse 7, wobei jedoch die dort angegebene Größe der Zahlen nicht überschritten wird.

Klasse 5. Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Teilers durch Faktorenzerlegung und durch Division, des kleinsten gemeinsamen Vielfachen. Gemeine Brüche, Dezimalbrüche. Vielfache Übungen im Kopfrechnen, besonders im Rechnen mit gemeinen Brüchen.

Klasse 4. Fortsetzung der gemeinen und Dezimalbruchrechnung. Anwendung auf leichtere Aufgaben aus der Regeldetri-, Zins-, Mischungs-, Gesellschaftsrechnung.

Klasse 3. Wiederholung des vorigen Pensums. Vollständige Zinsrechnung mit Anwendung auf Brutto-, Tara-, Netto-Berechnung, Gewinn, Verlust, Rabatt, schwerere Regeldetri-Aufgaben.

7) Werther a. a. O. S. 157.

Klasse 2. Wiederholung der Zinsrechnung, Gesellschafts-, Mischungs-Rechnung. Die einfachsten geometrischen Begriffe werden erläutert. (Gerade Linie, Kreis, Winkel, rechter Winkel, Parallelen, Senkrechte, Einteilung der Dreiecke, Vierecke, regelmäßige Vielecke.) Es werden jedoch nur Erläuterungen von solchen Begriffen gegeben, welche für das Leben oder für das Zeichnen von Wichtigkeit sind. Einfache Lehrsätze werden nur als Selbstverständliches hingestellt, nie bewiesen. Hierzu einfache Flächenberechnungen.

Klasse 1. Wiederholung des gesamten Pensums mit passenden Übungen. Die einfachsten Körperberechnungen."

§ 16.

Die neuere Rechenlitteratur.

Der neuern Rechenlitteratur ist in den vorhergehenden Paragraphen wiederholt und nach verschiedenen Seiten hin gedacht worden. Was noch fehlt, das ist eine übersichtliche Zusammenstellung des Gleichartigen, verbunden mit kurzen, zurechtweisenden Bemerkungen. Wir geben nachstehend eine solche Zusammenstellung, berücksichtigen selbstverständlich aber nur Schriften, welche sich mit dem Volksschulrechnen beschäftigen oder in naher Beziehung zu demselben stehen.

A. Geschichtliche Werke.

1. Adam, W., Seminarlehrer a. D. Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts. Zum Gebrauche an gehobenen und höheren Lehranstalten, sowie auch bei der Vorbereitung auf die Mittelschullehrer- und Rektoratsprüfung. 8. (XI, 182 S.) Quedlinburg, Chr. Friedr. Viewegs Buchhandlung 1892. (2,40 ℳ).

Nach einer Einleitung und Übersicht, welche sich auf Zahl, Zahlzeichen, Zahlsystem, das dekadische und andere Positionssysteme, Rechnungszeichen und Ziffergruppen, Rechnungsarten und Rechenapparate bezieht, verweilt der Verfasser besonders bei der Arithmetik der ältern und mittlern Zeit. Für diese bietet er auch viel Interessantes und Wertvolles. Die Fortschritte, welche der Rechenunterricht seit Pestalozzi aufzuweisen hat, werden nur kurz angedeutet.

2. Berlet, B., Realgymnasialrektor und Professor in Annaberg. Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher und seine Art zu rechnen. Die Coß von Adam Riese. Mit dem Brustbild und der Handschrift von Adam Riese. gr. 8. (VIII, 64 S.) Leipzig und Frankfurt a. M. Kesselringsche Hofbuchhandlung (E. v. Mayer) Verlag. 1892. (1,20 ℳ.)

Ein Beitrag zur Geschichte des Rechenunterrichts des 16. Jahrhunderts, dabei die erste Schrift, welche sich eingehender mit dem bedeutendsten Rechenmethodiker jenes Jahrhunderts beschäftigt. Was sie bringt, bildet den Inhalt zweier in den Jahren 1855 und 1860 erschienener, vielbegehrter Programmarbeiten des Verfassers.[1])

1) Vergleiche hierüber die Fußnote auf Seite 24.

3. **Günther**, o. Professor an der technischen Hochschule in München. **Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525.** gr. 8. (XVIII, 410 S.) Als III. Bd. der „Monumenta Germaniae Paedagogica“ erschienen. Berlin, A. Hofmann & Comp. 1887. (9,00 ℳ.)

Das ausführlichste und gediegenste, durchweg auf Quellenstudien oder zuverlässigen Angaben ruhende Werk, welches wir über jenen Zeitraum der Geschichte des mathematischen Unterrichts in seinem ganzen Umfange besitzen.

4. **Jänicke**, E., Erster Seminarlehrer in Halberstadt. **Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts.** 2. Aufl. gr. 8. (180 S.) Als III. Bd. der „Geschichte der Methodik des deutschen Volksschulunterrichts“ erschienen. Gotha, Thienemann. 1888. (4,00 ℳ).

Eine fleißige und reichhaltige Arbeit, welche die Verhältnisse der Volksschule in erster Linie berücksichtigt. Besonders eingehend werden Pestalozzi, seine Nachfolger und Gegner behandelt. Auch finden die neuern und neuesten Bestrebungen auf dem Gebiete des Rechenunterrichts genügende Beachtung.

5. **Jänicke**, E., Erster Seminarlehrer in Halberstadt. **Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule. Erster Teil: Grundzüge der Geschichte und Methodik des Rechenunterrichts.** Für Volksschullehrer und Schulamtsbewerber, sowie zur Vorbereitung für die Prüfungen der Mittelschullehrer und Rektoren. gr. 8. (IV, 92 S.) Gotha, Thienemann 1879. (1,00 ℳ.)

Eine knappe, übersichtliche Darstellung der Geschichte des Rechenunterrichts, welche besonders Pestalozzi und die neuere Zeit berücksichtigt.

6. **Sterner**, Matthäus, K. B. Kreisscholarch und Kreisschulinspektor der Oberpfalz und Regensburg. **Prinzipielle Darstellung des Rechenunterrichts auf historischer Grundlage. 1. Teil: Geschichte der Rechenkunst.** gr. 8. (XII, 583 S.) München und Leipzig, Oldenbourg. 1891. (6,00 ℳ.)

Eine sehr umfassende, auf fleißigen Quellenstudien beruhende Darstellung der geschichtlichen Entwickelung der Rechenkunst von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Überall wird das Wesentliche genügend scharf hervorgehoben und jede Richtung in das rechte Verhältnis zu dem Vorhergehenden gesetzt. Einseitige Beurteilungen findet man nirgends. Ein besseres Buch über denselben Gegenstand giebt es für den Volksschullehrer zur Zeit nicht.

7. **Treutlein**, P., Professor am Gymnasium zu Karlsruhe. **Das Rechnen im 16. Jahrhundert.** gr. 8. (100 S.) Im ersten Hefte der „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik.“ Leipzig, Teubner 1877. (5,00 ℳ.)

Eine sehr gründliche, dabei klare und ansprechende Arbeit über die Entwickelung des Rechnens in dem für die Entwickelung des menschlichen Geistes überhaupt so wichtigen Jahrhunderte. Besonders wertvoll ist die Wiedergabe der Darstellungsformen der damaligen Rechenpraktik.

8. **Unger**, Fr., Oberlehrer an der Realschule zu Leipzig-Reudnitz. **Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart.** Nach den Originalquellen bearbeitet. gr. 8. (XII, 240 S.) Leipzig, Teubner. 1888. (6 ℳ.)

Der Verfasser stützt sich für den behandelten Zeitraum durchweg auf Originalquellen. Er hat keine Mühe gescheut und kein Mittel unversucht gelassen, dieselben aufzusuchen und sich zu verschaffen. Seine Mühe ist aber auch reichlich belohnt worden; denn durch das sorgfältige, umfassende Quellenstudium wurde er in den Stand gesetzt, bereits bekannte Ergebnisse wesentlich zu ergänzen und viele, selbst von Autoritäten begangene und denselben nachgeschriebene Irrtümer zu berichtigen. Das Buch ist eine reiche Fundgrube und ein zuverlässiger Führer für diejenigen, welche sich eingehender mit der Geschichte unseres Gegenstandes beschäftigen wollen.

9. **Villicus**, Fr., kaiserl. Rat, emer. k. k. Professor &c. in Wien. Die Geschichte der Rechenkunst vom Altertume bis zum 18. Jahrhundert mit besonderer Rücksicht auf Deutschland und Österreich. gr. 8. (VIII, 108 S.) 2. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 1891. (2,80 M.)

Verbreitet sich namentlich über die Rechenkunst der Alten und das Rechnen des 16. Jahrhunderts. Figuren unterstützen die Angaben, auch ist eine sehr interessante tabellarische Zusammenstellung von Zahlwörtern aus 72 Sprachen beigegeben. Trotz der absichtlich populären Schreibweise giebt der Verfasser die wissenschaftliche Strenge doch nirgends preis. Man findet bei ihm manches, was die andern Geschichtswerke nicht enthalten.

10. **Wildermuth**, K., Professor. Rechnen. Abhandlung in Schmids Encyklopädie des gesamten Erziehungs- und Unterrichtswesens, Bd. 6, S. 695—789. gr. 8. Gotha, Besser. 1867. (Wird nicht einzeln abgegeben.)

Eine wegen ihrer Gründlichkeit und Einheitlichkeit sehr geschätzte und von spätern Schriftstellern vielfach als Quelle benutzte Abhandlung, die noch auf lange Zeit hinaus Wert behalten wird.

Die vorstehend aufgeführten historisch-mathematischen Schriften bieten alles, dessen der deutsche Rechenlehrer bedarf, um die Entwickelung seines Faches an sich und als Unterrichtsgegenstand kennen und verstehen zu lernen. Was über dieselben hinausreicht, kann sich nur auf Darstellung von Einzelheiten und gewisse wissenschaftliche Auffassungen beziehen. Wer auch diese noch kennen lernen will, möge nicht unterlassen, die einschlägigen Schriften von **Kästner**, **Klügel**, **Hankel**, **Günther**, **Gerhardt**, **Cantor**, **Friedlein**, **Stoy** u. a. zu studieren. Die Hauptsache freilich bleibt zuletzt auch hier das Studium der Quellen selbst.

B. Methodische Werke.

a) Werke, welche das Volksschulrechnen in seinem ganzen Umfange berücksichtigen.

1. **Adam**, R. Der Rechenlehrer. Neue Anleitung zum methodischen Unterricht im Rechnen. Für Lehrer und Seminaristen. 2 Teile. gr. 8. (483 u. 531 S.) Berlin, Hoffmann. 1883. (8,00 M.)

Sehr ausführlich, dabei klar und sachlich genau, doch mehr darauf berechnet, Seminaristen in das Verständnis des Einzelnen einzuführen, als durch Aufstellung großer Gesichtspunkte Herrschaft über den ganzen Stoff und seine methodische Durcharbeitung gewinnen zu lassen.

2. **Behl, F., Seminarlehrer in Schlüchtern. Methodik des Rechenunterrichts in der Volksschule. 3. Aufl. 8. (VIII, 196 S.) Langensalza, Beyer & Söhne. 1890. (1,50 M.)**

Eine Methodik, welche neuere Bestrebungen, wie es scheint, absichtlich unberücksichtigt läßt und sich in althergebrachter Weise fast nur mit Einzelheiten, welche dem Lehrer in der täglichen Praxis entgegentreten, befaßt. Während nun manches, was die Volksschule zu berücksichtigen hat, übergangen oder nur flüchtig berührt wird, kommt anderes, was nicht in ihr Bereich gehört, wie z. B. Teile der kaufmännischen und der allgemeinen Arithmetik, darin vor.

3. **Böhme, A., weil. Seminarlehrer in Berlin. Anleitung zum Unterricht im Rechnen. Ein methodisches Handbuch für Lehrer, Seminaristen und Präparanden. 11. Aufl. gr. 8. (VI, 393 S.) Berlin, G. W. F. Müller. 1886. (4,00 M.)**

Ein bekanntes und weitverbreitetes Buch, welches seinerzeit viel Segen in den deutschen Volksschulen gestiftet hat. Inzwischen ist es aber von neueren Werken überholt worden, sodaß eine gründliche Umarbeitung desselben sehr am Platze wäre.

4. **Braune, A., Seminarlehrer in Eisleben. Der Rechenunterricht in der Volksschule. Ein methodisches Handbuch für Seminaristen und Lehrer. gr. 8. (VIII, 185 S.) Halle, Schwedel. 1892. (2.50 M.)**

Wenn auch eins der neuesten Handbücher, unterscheidet es sich von seinen älteren Genossen im ganzen doch nur wenig. Eigentümlich ist ihm allerdings das entschiedene Streben, den Rechenunterricht zu vereinfachen. Nur schade, daß die Vorschläge auf nicht viel mehr als eine Stoffbeschränkung hinauslaufen. Der weiterhin aufgestellten Forderung, den kindlichen Gedankenkreis zu berücksichtigen, genügt der Verfasser auch nur in einseitiger Weise.

5. **Bussmann, E. W., Pfarrer und Schulinspektor in Langeoog. Anleitung zum Rechenunterricht in der einklassigen Volksschule. gr. 8. (VI, 388 S.) Essen, Bädeker. 1893. (3,60 M.)**

Nach einer kurzen, übersichtlichen Einleitung wird gezeigt, wie Stunde für Stunde das ganze Jahr hindurch drei Rechenabteilungen gleichzeitig nebeneinander unterrichtet werden können. Bewährte sich das Gegebene, dann brauchte vom Lehrer weiter nichts verlangt zu werden, als eine genaue Einhaltung desselben. Das mag bequem sein. Doch liegt darin auch eine große Gefahr. Wir raten deshalb dringend, das Buch nur als Beispiel und nicht als Leitfaden zu nehmen.

6. **Büttner, A., Seminarlehrer in Marienburg. Anleitung zum Rechenunterrichte in der Volksschule. Ein methodisches Handbuch. 12. Aufl. gr. 8. (VI, 250 S.) Leipzig, Hirt & Sohn. 1893. (2,50 M.)**

Eins der beliebtesten Handbücher der Neuzeit. Der Verfasser berücksichtigt alle wesentlichen Punkte der Methodik und trägt dieselben in ruhiger, sachlicher und klarer Weise vor. Die Dezimalzahlen stellt er den Bruchzahlen voran und erzielt so eine heilsame Konzentration und wesentliche Vereinfachung des Stoffes. Nur die Bedeutung der Sachgebiete scheint ihm bis jetzt entgangen zu sein.

7. **Elsner, A. und Sendler, R., Königliche Seminarlehrer. Der Rechenunterricht in der Volksschule. Im Anschlusse an Dorns Rechenhefte. gr. 8. (VI, 320 S.) Breslau, Handels Verl. 1892. (3,50 M.)**

Soll besonders den Anfängern, also den Lehrseminaristen und Schulamtskandidaten, entgegenkommen. Deshalb geht es auf einzelne Rechenstoffe sehr genau ein, führt viele Ausrechnungen vor und bringt Lehrproben. Große Gesichtspunkte werden weder gegeben noch entwickelt. Auch werden die Dezimalzahlen noch in alter Weise, als Unterart der Bruchzahlen, behandelt.

8. **Fickenwirth, O.**, Seminarlehrer in Homburg. **Methodik für einen einheitlichen Rechenunterricht. Eine theoretisch-praktische Anweisung für Lehrseminaristen und Volksschullehrer.** gr. 8. (VI, 224 S.) Breslau, Hirt. 1892. (2,00 M.)

Dadurch, daß das Dezimal- und Positionsgesetz unseres Zahlsystems in den Mittelpunkt gestellt wird, erhält der Rechenunterricht eine beachtenswerte Einheitlichkeit Zahlreiche Entwürfe zu Lehrproben und Lektionen wollen insbesondere angehenden Lehrern entgegenkommen. Die Sachgebiete des Rechnens sind freilich nur wenig oder nicht berücksichtigt worden.

9. **Griesmann, J. A.**, Schuldirektor in Leipzig. **Der Rechenunterricht in der Volksschule. Für eine achtklassige mittlere Volksschule aufgebaut.** 8. (VIII, 202 S.) Leipzig, Richter. 1890. (2,75 M.)

Für diejenigen von Wert, welche einen Einblick in den Betrieb des Rechenunterrichts in einer sächsischen mittleren Volksschule, wie er sich in den Leipziger Bezirksschulen nach und nach gestaltet hat, gewinnen wollen. Die praktischen Ausführungen, welche übrigens in allen wesentlichen Punkten mit denen unseres Handbuches übereinstimmen, beruhen auf gesunden methodischen Grundsätzen.

10. **Hartmann, B.**, Direktor der städtischen Schulen zu Annaberg in Sachsen. **Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule vom Standpunkte des erziehenden Unterrichts** 2c.

Was das Buch will, das ist aus dem Titel und dem Vorworte desselben zu ersehen[2]). Es stellt sich durchaus in den Dienst des erziehenden Unterrichts, indem es die Rechenstoffe nach Maßgabe des Konzentrationsprinzips auswählt, anordnet und verknüpft und ihre methodische Durcharbeitung nach den auf sicherer psychologischer Grundlage ruhenden Formalstufen regelt. Einleitend bietet es einen Abriß der Geschichte des Rechenunterrichts, welcher in Verbindung mit einer Behandlung der wichtigsten Fragen des heutigen Rechenunterrichts diejenigen großen Gesichtspunkte gewinnen läßt, welche eine Durchdringung und Beherrschung des Rechnens und seiner Methode erst möglich machen.

11. **Heller, F. A.**, Vikar. **Lehrbuch des bürgerlichen Rechnens, fußend auf ganz neuen und bewährten alten Methoden, die schnell und sicher zum Ziele führen. Für Lehrer und Rechenfreunde.** gr. 8. (XII, 250 S.) Paderborn, Schöningh. 1884. (2,00 M.)

Ein wenig beachtetes Buch, doch reich an trefflichen Winken für die Praxis und infolge der Betonung des Dezimalsystems ausgezeichnet durch seine Einheitlichkeit.

12. **Hentschel, E.**, weil. Seminarlehrer in Weißenfels. **Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen. Verfaßt mit gleichmäßiger Berücksichtigung des Kopf- und Zifferrechnens. Nach dem Tode des Verfassers bearbeitet von A. Költzsch**, Seminarlehrer in Weißenfels. 2 Teile. 14. Aufl. gr. 8. (VI, 170 S. u. IV, 280 S.) Leipzig, Merseburger. 1891. (4,00 M.)

Ein Buch, dessen Wert ein bleibender sein wird, trotzdem die Methode des Rechenunterrichts fortschreitet. Schon jetzt bietet es manches, was neuern Anschauungen nicht mehr entspricht. Wollte aber der gegenwärtige Herausgeber noch mehr, als es bereits geschehen, an des Altmeisters Arbeit ändern, wir könnten es nicht billigen. Es könnte dann wohl kommen, daß man zu alten Auflagen zurückgriffe und die neuen unbe-

2) Vergl. S. V f.

achtet ließe. Kein Rechenlehrer, der sein Fach tiefer erfassen will, darf an Hentschels „Lehrbuch" gleichgiltig vorübergehen.

13. **Hofer, Jos., Professor der Mathematik und Physik in Wien. Methodik des Rechenunterrichts. 2. Aufl. 8. (270 S.) Wien, Pichlers Witwe u. Sohn. 1892. (3,40 ℳ.)**

Behandelt den Rechenunterricht gleichsam vom österreichischen Standpunkte aus, bietet aber im wesentlichen nicht viel mehr als eine Anweisung zum Gebrauche der privilegierten österreichischen Rechenbücher von Močnik.

14. **Kallas, R. G. Die Methodik des elementaren Rechenunterrichts. Prinzipiell-systematisch abgeleitet. (Gekrönte Preisschrift.) gr. 8. (VIII, 96 S.) Mitau, Behre. 1889. (1,50 ℳ)**

Eine Bearbeitung des Themas: Die Methodik für den elementaren Rechenunterricht soll aus einem Prinzip systematisch abgeleitet werden. Freunden einer philosophischen Behandlung des Faches ist das Schriftchen zu empfehlen.[3])

15. **Kauer, L., und Sulzbacher, A., Seminarlehrer. Praktische Anweisung zur Erteilung des Rechenunterrichts in der Volksschule. Ein Handbuch für Lehrer und Seminaristen. 8. (VIII, 196 S.) Neuwied und Leipzig, Heuser. 1891. (2,20 ℳ.)**

Will jüngern Lehrern und Seminaristen, insbesondere solchen, welche die Rechenhefte der Verfasser benützen, ein praktischer Führer sein. Es beschränkt sich überall auf das Notwendigste und bleibt daher recht übersichtlich. Seinem Zwecke dürfte es entsprechen.

16. **Kaselitz, F., Rektor zu Stolp. Wegweiser für den Rechenunterricht in deutschen Schulen. Methodisches Handbuch für Lehrer und Seminaristen nach eigener Methode mit besonderer Rücksicht auf die neuesten Verfügungen des Bundesrats. 3 Teile. gr. 8. (VIII, 160 S. u. VI, 184 S.) Berlin, Nicolai. 1878. 1880. (4,00 ℳ.)**

Auf der Unterstufe besonders eine eigentümliche Weiterbildung des Grubeschen Lehrgangs. Unter den Einzelzielen des Rechenunterrichts werden auch die Erweiterung der Sachkenntnisse und die sittliche Bildung betont.

17. **Kentenich, G., Schulrat und Frohn, J., Seminarlehrer. Anleitung zur Erteilung des Rechenunterrichts und der Raumlehre in der Volksschule. Ein Handbuch für Seminaristen u. Lehrer. 4. Aufl. gr. 8. (X, 262 S.) Düsseldorf, Schwann. 1892. (3,50 ℳ.)**

Eine tüchtige, auch die neuern Anschauungen (abgesehen von den Sachgebieten) berücksichtigende Arbeit. Als wertvolle Besonderheit sind die Abschnitte, welche sich mit der sprachlichen Seite des Faches beschäftigen, hervorzuheben.

18. **Knilling, R., Lehrer in Traunstein. Zur Reform des Rechenunterrichts in den Volksschulen. Zwei Abteilungen. gr. 8. (IV, 172 S. und VIII, 268 S.) München, Ackermann. 1884/86. (5,00 ℳ.)**

Der Verfasser geht davon aus, daß die Richtung, welche der Rechenunterricht seit Pestalozzi eingeschlagen, eine durchaus verfehlte sei und unternimmt es deshalb, denselben auf neuer Grundlage aufzubauen. Er ist Anhänger des Zählprinzips. Anfängern ist das Buch jedenfalls nicht zu empfehlen, da es vorwiegend negative Kritik übt, deren Schärfe in keinem Verhältnisse zu ihrer Bedeutung steht.

---

3) Vergleiche hierzu Beetz, Kritische Beiträge 2c. a. a. O. S. 45 f.

19. **Lang, H., Seminarlehrer in Schwabach. Theorie des niederen Rechnens. Ein Handbuch für Volksschullehrer. gr. 8. (VIII, 256 S.) Nürnberg, Korn. 1880. (3,00 M.)**

Eine einheitliche Arbeit, welche auf dem Boden der Herbartschen Psychologie steht und sich durch Klarheit und Übersichtlichkeit auszeichnet. Der Stoff, den sie berücksichtigt, ist indessen nur der althergebrachte.

20. **Lautar, L., in Marburg. Spezielle Methodik des Rechenunterrichts in der Volksschule. Theoretischer Teil. gr. 8. (VIII, 160 S.) Laibach, Kleimayr u. Bamberg. 1888. (1,60 M).**

Seiner ganzen Anlage und Ausführung nach für Seminaristen bestimmt. Klarheit und Übersichtlichkeit sind auch diesem Buche eigen.

21. **Lincke, R., Seminarlehrer in Erfurt. Rechenbuch für Volksschulen. 3 Teile. 2. Aufl. gr. 8. (VIII, 102 S.; 188 S.; VIII, 214 S.) Jena, Mauke. 1884. (7,60 M.)**

Eine breitangelegte Arbeit, dabei nicht selbständig, denn ihr erster Teil lehnt sich stark an Bräutigam, ihr mittlerer und oberer an Leidenfrost[4]) und besonders Schellen an. Der Hauptsache nach werden Aufgaben mit beigefügten Ergebnissen geboten.

22. **Menzel, J., Schulrat. Lehrgang für den Elementarunterricht im Rechnen. 4. Aufl. Bearbeitet von Steinert. gr. 8. (II, 230 S.) Berlin, Stubenrauch. 1881. (3,00 M.)**

Eine der bessern Arbeiten über die methodische Behandlung des Volksschulrechenstoffes, wie sie in den siebziger Jahren gebräuchlich war.

23. **Räther, H., Rektor in Breslau, Theorie und Praxis des Rechenunterrichts. Im Anschluß an das Übungsbuch für mündliches und schriftliches Rechnen von Räther und Wohl. 2 Teile. gr. 8. (IV, 108 S. und IV, 202 S) Breslau, Morgenstern. 1891. (3,20 M).**

Zu dem Werke gehört noch ein dritter Teil, welcher später erscheint. Das Vorhandene führt in ruhiger und klarer Weise in die Methodik des heutigen Rechenunterrichts ein, nimmt Stellung zu allen strittigen Punkten und benutzt die vorhandene Litteratur fleißig. Es ist eins der besten neuern Werke seiner Art.

24. **Rein, Pickel und Scheller. Theorie und Praxis des Volksschulunterrichts nach Herbartischen Grundsätzen. 8 Teile (Schuljahre). gr. 8. Der erste Teil in 5. Aufl., die übrigen in 4. bis 2. Aufl. Leipzig, Bredt.**

Ein bekanntes Werk, wovon hier aber nur die allgemeine Einleitung und die Abschnitte über Rechnen in Betracht kommen. Letztere enthalten einen beachtenswerten Versuch, das Rechnen der Kulturstufenidee und der damit zusammenhängenden Konzentrationsidee unterzuordnen.

25. **Sachse, J. J., Seminarlehrer in Linnich. Der Rechenunterricht in der Volksschule. Methodische Ratschläge. (Max Hesses Lehrerbibliothek, X). kl. 8. (VI, 144 S.) Leipzig, Hesse 1889. (1,20 M).**

Ein eigenartiges Schriftchen, welches in anregender Weise einige methodische Hauptfragen des Faches behandelt.

26. **Scherer, G., Rektor in Freiburg. Andeutungen zur Erteilung des Rechen-Unterrichts in der Volksschule. Unter Bezug auf seine Rechen-**

4) Vergleiche S. 110 f.

tafeln und Rechenaufgaben bearbeitet. 2. Aufl. gr. 8. (IV, 220 S.) Tauberbischofsheim, Lang 1880. (3,00 M).

Im Anschlusse an die Bestimmungen für das Großherzogtum Baden folgt die Arbeit den Schülerheften des Verfassers und dient so in erster Linie den praktischen Bedürfnissen eines engern Lehrerkreises.

27. Schröter, R., Seminarlehrer in Delitzsch. Beiträge zur Methodik des Rechenunterrichts für die oberen Klassen der Seminare und Volksschullehrer. gr. 8. (IV, 147 S.) Wittenberg, Herrosé. 1887. (2,00 M.)

In erster Linie ein Lern- und Wiederholungsbuch für Seminaristen, welche in 50 Abschnitten Auskunft über die Methode des Rechenunterrichts erhalten sollen. Die Praxis des Verfassers ist, abgesehen von einigen Kleinigkeiten, die herkömmliche.

28. Steuer, W., Seminarlehrer in Münsterberg. Methodik des Rechenunterrichts. gr. 8. (XI, 404 S.) Strehlen (Schlesien), Gemeinhardt. 1883. (4,50 M.)

Dieses Buch, welches wiederholt neu aufgelegt wurde, hat viel Anklang in der deutschen Lehrerwelt gefunden, weil es die „Vereinfachung des Rechenunterrichts" und die „Einfügung der Dezimalbrüche in den Lehrgang" eingehender, als es anderwärts geschieht, behandelte. Es ist auch jetzt noch ein recht brauchbarer Führer für Rechenlehrer, doch gerade in den beiden angegebenen Punkten von einigen neuern Werken bereits überholt worden.

29. Tschirch, P. Der Rechenunterricht in der Volksschule. Vorschläge zu einer Vereinfachung dieses Unterrichts, nebst einer Anleitung zum Üben. gr. 8. (IV, 122 S.) Bunzlau, Kreuschner. 1881. (1,20 M.)

Hält, was der Titel verspricht. Man findet hier, angeregt durch Büttner, recht gesunde Ansichten in knapper Form beisammen, dazu eine erprobte Praxis, welche das Schriftchen auch heute noch als ein wertvolles erscheinen läßt.

30. Weitz, E., Seminarlehrer. Kurze Anleitung zum Rechenunterrichte in der Volksschule. gr. 8. (VI, 91 S.) Breslau, Hirt. 1885. (1,25 M.)

Unter den „kurzen Anleitungen" jedenfalls eine der allerbesten.

b) Werke, welche einzelne Seiten des Volksschulrechnens berücksichtigen.

1. Beetz, K. O., Lehrer an der höheren Mädchenschule zu Nordhausen. Das Typenrechnen auf psychophysischer Grundlage. 1. Teil. Theoretische Darstellung. gr. 8. (X, 146 S.) Halle, Schroedel u. Simon. 1889. (2,50 M.)

2. Bräutigam, H., Seminarlehrer in Bielitz. Methodik des Rechen-Unterrichts auf den ersten Stufen mit Hilfe von Tillichs Rechenkasten. 8. (IV, 79 S.) Wien, Pichlers Witwe u. Sohn. 1878. (1,20 M.)

3. Goltzsch, E. Th., Seminardirektor in Stettin. Der verbundene Zahl-, Sach- und Meßunterricht in der Oberklasse der Volksschule. gr. 8. (XXIII, 399 S.) Berlin, Grieben. 1858. (3,60 M.)

4. Göpfert, E., Oberlehrer am Realgymnasium zu Annaberg i. Erzgeb. Der Rechenunterricht in den drei ersten Schuljahren. Dargestellt

im Auftrage des pädagogischen Seminars an der Universität Jena von dem ehemaligen Mitgliede desselben. Mit einem Vorworte von Prof. Dr. K. V. Stoy. gr. 8. (X, 72 S.) Eisenach, Bacmeister. 1878. (1 M.)

5. Grube, A. W. Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode. Ein methodischer Beitrag zum erziehenden Unterrichte. 6. Aufl. gr. 8. (XII, 138 S.) Berlin, Enslin. 1881. (1,80 M.)

6. Harms, Chr., Professor in Oldenburg. Zwei Abhandlungen über den Rechenunterricht. Das Rechnen mit den Zahlen von 1 bis 100, eine didaktische Skizze. Über Rechenunterricht und Rechenbücher, eine Rück- und Umschau. gr. 8. (IV, 72 S.) Oldenburg, Stalling. 1889. (0,80 M.)

7. Kallius, A., Gymnasial-Oberlehrer in Berlin. Die vier Spezies in ganzen Zahlen und das Münz-, Maß- und Gewichtssystem im Rechenunterricht. gr. 8. (84 S.) Oldenburg, Stalling. 1889. (1,20 M.)

8. Knoche, H., Lehrer in Herdringen. Über das Wesen und die Entstehung der Zahlen, Zahlvorstellungen und Zahlbegriffe. 8. (76 S.) Arnsberg, Stahl. 1888. (1 M.)

9. Kölzsch, A., Seminarlehrer in Weißenfels. Rechnen (in: Vorbereitungen und Entwürfe von Sprockhoff, Heft 2). gr. 8. (80 S.) Breslau, Hirt. 1888. (0,50 M.)

10. Lüdemann, H., Schulvorsteher in Bremen. Der erste Rechenunterricht. Ein Handbuch für Lehrer. gr. 8. (VI, 88 S.) Hannover, Helwing. 1882. (1,20 M.)

11. Mittenzwey, L., Schuldirektor in Leipzig. Die Darstellungsformen im Rechnen nebst methodischen Andeutungen mit Berücksichtigung von Auswahl und Anordnung des Lehrstoffes für die verschiedenen Unterrichtsstufen. gr. 8. (XII, 103 S.) Gotha, Behrend. 1891. (1,60 M.)

12. Niemeyer, R., Pastor in Peckelsheim. Über Rechnen und Entwickelung des Rechnens. gr. 8. (36 S.) Minden i. W., Bruns. 1890. (0,50 M.)

13. Salberg, J. A., Oberlehrer in München. Anschauungskursus zur Einführung in das Rechnen mit gemeinen und Dezimalbrüchen nebst methodischer Behandlung der Schlußrechnung mit einem Anhange: die Zeitrechnung. 8. (84 S.) München, Kellerer. 1890. (0,60 M.)

14. Salberg, J. A., Oberlehrer in München. Die Sachrechenmethode oder methodische Behandlung des Zahlenraumes von 1 bis 30 nach den Grundsätzen der Realmethode. 8. (319 S.) München, Oldenbourg. 1874. (4,60 M.)

15. Schneyer, F., weil., Seminarlehrer in Coburg. Der erste Rechenunterricht mit Benutzung des Baukastens und der Netztafel. Zum Gebrauch für Elementarlehrer und in der Familie. 2 Hefte. 8. (zs. 64 S.) Mit 6 lithogr. Tafeln. Coburg, Sendelbach. 1879. (2 M.)

16. Splittegarb, E., Vorschullehrer in Elberfeld. Eine Kritik der Übungsbücher des grundlegenden Rechenunterrichts unter Beleuchtung

der gebräuchlichsten Methoden. gr. 8. (69 S.) Düsseldorf, Schwann. 1890. (1,20 ℳ.)

17. Tanck, W., Lehrer in Neumünster i. H. Das Rechnen auf der Unterstufe nebst Beitrag zur Frage nach der Entstehung der Zahlbegriffe. gr. 8. (99 S.) Meldorf, Bremer. 1884. (1,20 ℳ.)

18. Unger, E. S., weil. Professor in Erfurt. Leitfaden für den Unterricht im Kopfrechnen. Für Lehrer und Seminaristen. Nach einer eigentümlichen Methode. 3. Aufl. Neubearbeitet von G. Krusche, Oberl. in Leipzig. gr. 8. (XVI, 288 S.) Leipzig, Mendelssohn. 1881. (2,40 ℳ.)

Unter diesen Schriften nimmt diejenige Grubes selbstverständlich den ersten Rang ein, weil sie bahnbrechend für eine neue Richtung des Rechenunterrichts war, mit deren Ausgestaltung man sich noch heute beschäftigt. Die Schriften von Goltzsch und Salberg werden, wenn auch das, was sie anstrebten, allgemeine Zustimmung nicht finden konnte, für den Rechenmethodiker stets Wert behalten.[5]) Bräutigam, Göpfert und Schneyer haben sich besondere Verdienste dadurch erworben, daß sie zeigen, wie der erste Rechenunterricht mit Hilfe von Tillichs trefflichem Rechenkasten erfolgreich zu erteilen ist.[6]) Beetz, Knoche, Lüdemann, Niemeyer und Tanck kommen den Wünschen derer entgegen, welche sich für das Wesen der Zahlen, Zahlvorstellungen und Zahlbegriffe, sowie deren Entstehung interessieren. Jede der fünf Arbeiten erscheint als Ergebnis einer reichen Geistesarbeit und verdient schon insofern gelesen zu werden. Besondern Dank haben sich die Verfasser aber dadurch erworben, daß sie die Aufmerksamkeit auf die Grundlagen des Rechnens und des Rechenunterrichts erneut hinlenken. Denn mag man ihren Ansichten zustimmen oder nicht (sie selbst widersprechen einander mehrfach), soviel steht fest, zu einer tiefern Erfassung der Methode des Rechenunterrichts kann der nicht gelangen, der jene Grundlagen als etwas Überflüssiges betrachtet. Kallius' Arbeit zeichnet sich durch Klarheit und sachliche Richtigkeit aus. Mittenzwey behandelt sein Thema (abgesehen von den „Dezimalbrüchen") in unserm Sinne. Költzsch bietet eine Reihe beachtenswerter Vorbereitungen (Präparationen) für alle Rechenstufen. Harms weist auf die Wichtigkeit der grundlegenden Zahlreihe 1 bis 100 hin und zeigt, wie sich jüngere Lehrer in der Rechenlitteratur zurechtzufinden suchen sollen. Splittegarb unterscheidet eine gruppierende, trennende und vermittelnde Methode für den grundlegenden Rechenunterricht. Er selbst hält es mit der „trennenden" Methode, da sie „beim Schüler höchstens (?) einen gesunden Körper und eine gesunde Seele voraussetzt" und „alles andere in ihrer Pflege steht". Der Verfasser stellt sich besonders in Gegensatz zu Grube und fordert z. B. eine Sonderung der Aufgaben nach Rechnungsarten. Man kann verschiedener Ansicht über die hier gebotene „Kritik" sein. Eine gute Wirkung dürfte sie indessen doch auf jeden aufmerksamen Leser ausüben, nämlich denselben zu erneuter Prüfung

5) Vergleiche S. 103 f.
6) Vergleiche S. 66.

des eigenen Verfahrens veranlassen. Ungers Buch in seiner zeitgemäßen Neubearbeitung sollte keinem Rechenlehrer unbekannt bleiben.

C. Aufgabensammlungen.

a) Sammlungen, welche alle Stufen berücksichtigen.

Solcher Sammlungen giebt es jetzt in Deutschland eine große Zahl und alljährlich erscheinen noch neue. In Österreich ist das anders, da besteht ein Schulbüchermonopol. Man kann darüber geteilter Meinung sein. Das Monopol verhindert jedenfalls Unberufene, auf den Gedanken zu verfallen, den „Wünschen zahlreicher Schüler, Freunde ꝛc." durch Herausgabe neuer Sammlungen, denen ihre „bewährte Methode" zu Grunde gelegt ist, nachzukommen. Es veranlaßt aber auch Berufene, zu unterlassen, das Bessere, was sie bieten können, zu veröffentlichen. Infolgedessen bleibt die durch den Wettbewerb herbeigeführte Fortentwicklung der Auswahl, Anordnung und Behandlung des Rechenstoffes ausgeschlossen. Im Königreiche Sachsen ist neuerdings eine Bestimmung getroffen worden, welche einen Mittelweg einschlägt.[7]) Es sind nämlich von den zur Zeit benutzten Aufgabensammlungen drei als diejenigen bezeichnet worden, welche in den einfachen Volksschulen (diesen Namen führen die sächsischen zwei- bis achtstufigen Normalschulen), wozu über Zweidrittel aller Volksschulen des Landes gehören, weiterhin bedingungslose Verwendung finden dürfen.[8])

Nachstehend folgen von den deutschen Aufgabensammlungen nur die verbreitetsten, beziehentlich beachtenswertesten in alphabetischer Ordnung. 1. Backhaus, Rechenfibel und Rechenbuch für deutsche Volksschulen. 4 Hefte. (Bielefeld und Leipzig, Velhagen und Klasing). 2. Berthelt und Petermann, Rechenschule. 8 Hefte. Leipzig, Klinkhardt. 3. Böhme, Aufgaben zum Rechnen und Übungsbuch im Rechnen. In 5 Heften. Neubearbeitet von Schaeffer und Weidenhammer. Berlin, Müller. 4. Bussmann, Rechenheft für die einklassige Volksschule. 1 Heft. Essen, Bädeker. 5. Büttner, Rechenaufgaben für die mehrklassige Volksschule. 5 Hefte. Leipzig, Hirt und Sohn. 6. Dittmers, Rechenbuch für Stadt- und Landschulen. 3 Hefte. Harburg a. d. E., Elkan. 7. Dorns Aufgaben für mündliches und schriftliches Rechnen. Neubearbeitet von Elsner und Sendler. Ausg. A in 6 Heften. Ausg. B in 4 Heften. Breslau, Handel. 8. Dorschel-Lindaus Rechenhefte. Umgearbeitet von Lindau, Berbig und Schmidt. Ausg. A in 7 Heften. Ausg. B in 4 Heften. Gotha, Behrend. 9. Gassers Rechenbücher, bearbeitet von Hergenhahn, Goldmann und Westenberger. Ausg. A in 12 Heften. Ausg. B in 4 Heften.

7) Ministerialverordnung vom 16. Februar 1893.

8) Es sind dieses die nachstehend mit aufgeführten Sammlungen von Hartmann-Ruhsam, des Pädagogischen Vereins zu Chemnitz und von Thieme-Schlosser. Die Sammlungen von Berthelt und Möbius-Päthig-Werner können bis auf weiteres zwar noch beibehalten, dürfen aber nicht neu eingeführt werden.

Frankfurt a. M., Jaeger. 10. Hartmann-Ruhsam, Rechenbuch für deutsche Stadt- und Landschulen. Ausg. A in 6 Heften (für das Königreich Sachsen und die angrenzenden Gebiete). Ausg. B in 4 Heften (kleinere Ausgabe von A). Ausg. C in 6 Heften (für das übrige Deutschland). Ausg. D in 3 Heften (kleinere Ausgabe von C). Frankfurt a. M. und Leipzig, Kesselringsche Hofbuchhandlung (E. v. Mayer) — Verlag —. 11. Haesters und Röhm, Rechenbuch für die deutsche Volksschule, 7 Hefte. Essen, Bädeker. 12. Heinemann, Rechenbuch für Volksschulen. 3 Hefte. Wolfenbüttel, Zwißler. 13. Heinze und Hübner, Rechenbuch für Stadt- und Landschulen. Ausgabe A in 6 Heften. Ausg. B in 3 Heften. Ausg. C in 7 Heften (für Volksschulen und die unteren Klassen höherer Lehranstalten). Breslau, Goerlich. 14. Hentschels Rechenbücher. Ausg. A. Für die mehrklassige Volksschule. Rechenfibel und 4 Hefte. Ausg. B. Für die abschließende Volksschule. (Herausg. Jänicke). 6 Hefte. Ausg. C. Für einfache Schulverhältnisse. (Herausg. Kölbsch). 3 Hefte. Leipzig, Merseburger. 15. Heuers Übungsbuch für den Rechenunterricht. Bearbeitet von Magnus. Ausg. A in 7 Heften. Ausg. B in 3 Heften. Hannover, Meyer (Prior). 16. Heuners Aufgaben zum Kopf- und Zifferrechnen. 3 Hefte. Rechen-Aufgaben mit gleichmäßiger Berücksichtigung des Kopf- und Zifferrechnens. 7 Hefte. Ansbach, Seybold. 17. Kentenich, Aufgabenhefte für den Rechenunterricht in der Volksschule. 5 Hefte. Düsseldorf, Schwann. 18. Knabe und Ostwald, Rechenbuch für Stadt- und Landschulen. Ausg. A in 6 Heften. Ausg. B in 3 Heften. Halle, Grosse. 19. Knoche, Rechenbuch. 4 Hefte. Arnsberg, Stahl. 20. Kochs Aufgaben für das Rechnen in deutschen Schulen. Bearbeitet von Hellermann und Krämer. 6 Hefte. Berlin, Oehmigke. 21. Löser, Praktisches Rechenbuch für deutsche Schulen. 7 Hefte. Weinheim, Ackermann. 22. Menzel, Aufgaben für das schriftliche Rechnen. 5 Hefte. Berlin, Stubenrauch. 23. Močniks Rechenwerke in verschiedenen Ausgaben für Volks- und Bürgerschulen. Prag, Tempsky. Wien, Gerolds Sohn. Leipzig, Freytag. (Für österreichische Schulen). 24. Rieboths Rechenbuch. Neubearbeitung von den Verfassern des „Hessischen Lesebuchs". Ausg. A in 10 Heften. Ausg. B in 4 Heften. Gießen, Roth. 25. Pädagogischer Verein zu Chemnitz, Rechenbuch für Volksschulen. 9 Hefte. Chemnitz, Pickenhahn. 26. Räther und Wohl, Übungsbuch für mündliches und schriftliches Rechnen. 6 Hefte. Breslau, Morgenstern. 27. Rocke, Aufgaben für mündliches und schriftliches Rechnen in gegliederten Volksschulen. 8 Hefte. Leipzig, Peters Verlag. 28. Saß, Rechenbuch in Heften. 6 Hefte. Altona, Schlüter. 29. Schmidts Rechenbuch. Neubearbeitet von Eisert. 4 Hefte. Gera, Hofmann. 30. Schönmann und Scheu, Rechenbuch für deutsche Volks-, Mittel-, Töchter- und Fortbildungsschulen. 7 Hefte. Eßlingen, Weismann. 31. Schroeter, Aufgaben zum Tafelrechnen. Ausg. A in 6 Heften. Ausg. B in 3 Heften. Wittenberg, Herrosé. 32. Sterner, Rechenbuch für Landschulen. 5 Hefte. München, Oldenbourg. 33. Steuer, Rechenbuch für Landschulen. 5 Hefte.

Derselbe, Rechenbuch für Stadtschulen. 7 Hefte. Strehlen, Gemeinhardt. 34. Tanck, Rechenbuch. 8 Hefte. Meldorf, Bremer. 35. Thieme und Schlosser, Rechenübungen für Volksschulen. Auf Grund des (sächsischen) Lehrplanes vom 5. Nov. 1878. Dresden, Huhle.

Nur für mündliches (Kopf-) Rechnen bestimmt sind: 36. Berthelt, Methodisch geordnete Aufgaben zum Kopfrechnen. 2 Teile. Leipzig, Klinkhardt. 37. Büttner, Kopfrechenschule. 2 Teile. Leipzig, Hirt und Sohn. 38. Hentschel, Aufgaben zum Kopfrechnen. Leipzig, Merseburger. 39. Quitzow, Das Kopfrechnen in systematischer Stufenfolge. Leipzig, Teubner. 40. Schröter, Aufgaben zum Kopfrechnen. 2 Teile. Wittenberg, Herrosé.

Den besondern Bedürfnissen der Mädchenschulen wollen entsprechen:

41. Brennert, Rechenbuch für die oberen Klassen der Mädchenschulen. Berlin, Nicolaische Verlagsbuchhandlung (Stricker). 42. Hecht, Rechenbuch für Mädchenschulen. 7 Hefte. Bielefeld und Leipzig, Velhagen und Klasing. 43. Hügemeyer und Riethmüller, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. 3 Teile. Gladbach, Boltze. 44. Jöhrens, Rechenbuch für Töchterschulen. 6 Hefte. Hannover, Hahn. 45. Soltmann und Dittmers, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. 6 Hefte. Bremen, Näßler. 46. Rechenbuch für Mädchenschulen. 5 Hefte. Hildburghausen, Gadow und Sohn.

Es ist hier nicht der Ort, von den vorstehend verzeichneten Aufgabensammlungen einzelne als besonders empfehlenswerte oder nicht empfehlenswerte zu bezeichnen. Das mögen die Litteraturberichte unserer pädagogischen Zeitschriften nach wie vor besorgen. Nur auf eins wollen wir aufmerksam machen.

Die vorstehend aufgeführten Sammlungen zerfallen in ältere und neuere, aber unter den ältern giebt es solche, welche bereits vor dem Jahre 1870, also vor der Einführung der dezimalen Münzen, Maße und Gewichte da waren. Diese nehmen eine besondere Stellung ein. Denn denselben fehlten ursprünglich die Aufgaben mit Dezimalzahlen ganz, oder sie behandelten dieselben nur als Anhängsel. Das ging nach dem Jahre 1870 nicht mehr an. Damals entstand eine große Bewegung auf dem Gebiete der Rechenlitteratur.[9]) Alte, weitverbreitete Aufgabensammlungen kamen ins Gedränge. Ihre Herausgeber wollten das bewährte Alte nicht preisgeben und konnten doch auch das gesetzlich geforderte Neue nicht unbeachtet lassen. Schließlich meinten fast alle, das Richtige getroffen zu haben, wenn sie nach dem bekannten Grundsatze „Vom Leichten zum Schweren“ das Neue an geeignet erscheinender Stelle dem Alten einverleibten. Es sollte sich aber sehr bald zeigen, daß das ein verhängnisvoller Irrtum war. Denn wie in vielen andern Fällen, so auch hier, sollte sich das Wort bewahrheiten: „Niemand fasset Most in alte Schläuche; wo anders, so zerreißt der Most die Schläuche und wird verschüttet, und die Schläuche kommen um“. Nicht nur, daß auf diese Weise das Neue

9) Vergleiche S. 116 f.

zu keiner rechten Wirkung kam, auch das Alte selbst litt großen Schaden. Es war, als ob das Neue zersetzend auf das Alte wirke. Denn das „Verbessern", d. h. das „Verändern", hörte nun nicht auf. Dadurch aber verloren viele der alten guten Sammlungen mehr und mehr ihre Einheitlichkeit und folglich ihre Brauchbarkeit.

Die Unzulänglichkeit der alten Sammlungen veranlaßte sehr bald die Herausgabe zahlreicher neuer Sammlungen. Da hätte es nun nahe gelegen, die Fehler jener zu vermeiden. Doch dem war nicht immer so. Das Alte hing auch den Herausgebern der neuen Sammlungen noch so sehr an, daß sich ihre Sammlungen von den umgeänderten alten nur wenig oder nicht unterschieden.

Erst in den achtziger Jahren wurde das anders. Es erschienen jetzt einzelne Sammlungen, deren Herausgeber richtig erkannt hatten, daß allein aus dem Dezimal- und Positionsgesetze unseres Zahlsystems heraus der Rechenunterricht sich einheitlich gestalten lasse. Damit war die Konzentration innerhalb des Faches, die Konzentration im engern Sinne, gewonnen. Es erhoben sich ferner Stimmen, welche forderten, daß das Rechnen seine bisherige isolierte Stellung aufgeben und Fühlung mit den übrigen Unterrichtsfächern nehmen müsse, d. h. es wandte sich die Aufmerksamkeit einzelner Methodiker den Sachgebieten des Rechnens zu. Dadurch wurde der Anfang mit der Aufnahme des Rechenunterrichts in den Konzentrationsverband der übrigen Unterrichtsfächer, mit der Konzentration im weitern Sinne, gemacht.[10])

Beide Arten der Konzentration sind gleichwichtig. Überdies ergänzen sie einander. Deshalb können auch nur diejenigen Aufgabensammlungen auf der Höhe der Zeit stehen, welche beide gleichmäßig berücksichtigen. Dieses aber umsomehr, als die neuerdings allerorten geforderte Vereinfachung des Rechenunterrichts ohne sie nicht möglich ist. Gar nicht zu gedenken der Erreichung des obersten Erziehungszweckes.

Nach diesen Gesichtspunkten möge man nun die oben aufgeführten Aufgabensammlungen beurteilen. Wer nicht im Besitze derselben ist, wende sich unmittelbar an die Verlagsbuchhandlungen; diese sind in der Regel gern bereit, zu dem angegebenen Zwecke Freiexemplare zur Verfügung zu stellen.

Nicht genug warnen können wir schließlich, Aufgabensammlungen auf einfache Empfehlung hin einzuführen. Kein Lehrer darf es sich nehmen lassen, auf Grund eigener sorgfältiger Untersuchungen ein Urteil zu gewinnen. Und auch den landläufigen Beurteilungen in Fachzeitungen traue man nicht zu sehr. Oft lobt der eine Beurteiler, was der andere tadelt. Die Mehrzahl der Beurteiler aber unterläßt es namentlich, den eigenen Standpunkt, auf den schließlich doch alles ankommt, gehörig zu kennzeichnen. Manche Beurteiler kommen über Äußerlichkeiten, an denen ihr Auge beim „Durchblättern" der Rezensionsexemplare hängen blieb, nicht hinaus. Andere wieder fahnden auf gewisse Einzelheiten und lassen dieselben wie

10) Vergleiche S. 173 ff.

einen „roten Lappen" auf sich und ihre Feder wirken u. dgl. m. Und deshalb noch einmal: Selber ist der Mann!

Eine besondere Stellung in der Rechenlitteratur beanspruchen die Aufgabensammlungen für Mädchenschulen. Der Gedanke, den Bedürfnissen der Mädchen entgegenzukommen, ist sicher ein berechtigter. Es dürfte aber noch geraume Zeit vergehen, bis wir es zu einer wirklich guten Sammlung für Mädchenschulen gebracht haben. Denn hier vermag der Einzelne nichts, die Gesamtheit der Mädchenlehrer muß mithelfen und — nicht zum mindesten — unsere Mädchen und deren Mütter selbst. Was bis jetzt vorliegt, verdient gewiß Beachtung. Doch hauptsächlich nur, weil es zum Nachdenken anregt, wie alles noch besser gestaltet werden kann. Denn vorläufig unterscheiden sich die Aufgabensammlungen für Mädchenschulen von den übrigen durch nicht viel mehr als den Titelzusatz und gewisse Sachbenennungen.

b) Sammlungen, welche nicht alle Stufen berücksichtigen.

Hierzu nur einige Angaben, gleichsam Beispiele.

1. Féaux, Rechenbuch und geometrische Anschauungslehre zunächst für die drei untern Gymnasialklassen. Paderborn, Schöningh.

2. Harms, Rechenbuch für die Vorschule. 2 Hefte. Oldenburg, Stalling.

3. Hentschels Hundert Aufgaben aus dem bürgerlichen Rechnen mit elementarischen Auflösungen, einer Vorstufe und Übungsbeispielen. Leipzig, Merseburger.

4. Mittenzwey, Das bürgerliche Rechnen. Leipzig, Merseburger.

5. Stucki, Das Rechnen im Anschlusse an den Realunterricht. (500 Aufgaben.) Bern, Schmid, Francke & Co.

6. Wendt, Rechenaufgaben für die obern Klassen der Mädchenschulen. Leipzig, Hirt.

7. Zeißig, Algebraische Aufgaben für die Volksschule. Leipzig, Wunderlich.

8. Zepf, Rechenaufgaben für die Oberklassen höherer Mädchenschulen und Töchterinstitute. Freiburg i. B., Herder.

Als besondere Gruppe dürfen an dieser Stelle die durch die neuere Reichsgesetzgebung veranlaßten Aufgabensammlungen schließlich auch gelten. Es giebt deren für die Kranken-, Unfall-, Invaliditäts- und Altersversicherung. Dieselben erscheinen entweder als selbständige Arbeiten oder als Anhänge zu größern Aufgabensammlungen. Ihre Einordnung in den Rechen-Lehrplan, überhaupt ihre ganze methodische Behandlung, läßt zur Zeit freilich noch manches zu wünschen übrig.

Dritter Abschnitt.

Der Lehrplan für den Rechenunterricht.

§ 17.

Von den Zahlen im allgemeinen.

Litteratur. Beetz, K. O. Das Typenrechnen 2c. Bartholomäi, Fr. Zehn Vorlesungen über Philosophie der Mathematik. Jena 1860. Drobisch, M. W. Neue Darstellung der Logik. 3. Aufl. Leipzig 1863. Hartenstein, G. Die Probleme und Grundlehren der allgemeinen Metaphysik. Leipzig 1836. Hartmann, B. Zur Diskussion über den elementaren Rechenunterricht. (Neue Bahnen. II, 3.) Gotha 1892. Herbart, J. Fr. Sämtliche Werke. Herausg. von Hartenstein. Zweiter Abdruck. 6. Bd. Hamburg und Leipzig 1888. Kant, J. Kritik der reinen Vernunft. Herausg. von Kehrbach. 2. Aufl. Leipzig. Reclam jun. Knilling, R. Zur Reform des Rechenunterrichts 2c. Knoche, H. Über das Wesen und die Entstehung der Zahlen 2c. Niemeyer, R. Über Rechnen 2c. Räther, H. Theorie und Praxis des Rechenunterrichts 2c. Rosenberger, F. Die Buchstabenrechnung. Jena 1876. Tanck, W. Das Rechnen auf der Unterstufe 2c. Volkmann, W. Lehrbuch der Psychologie vom Standpunkte des Realismus und nach geometrischer Methode. 1. Aufl. Cöthen 1876. Ziller, T. Allgemeine Pädagogik. 2. Aufl. Herausg. von Just. Leipzig 1884.

Der Begriff des Rechnens verweist auf die Zahl als das eigentliche Objekt desselben. Denn: Rechnen ist eine gesetzmäßige Verknüpfung zweier oder mehrerer Zahlen zu einer neuen Zahl. Gewinnt aber die Zahl hiernach Bedeutung für die Auswahl, Verteilung und Behandlung des Rechenlehrstoffes, also für den Lehrplan überhaupt, so darf sie an dieser Stelle nicht übergangen werden.

Was eine Zahl sei, sollte man meinen, müßte jeder Rechner wissen. Wievielmehr jeder Rechenlehrer! Fordert man doch schon von einem Handwerker Kenntnis der Stoffe, die er verarbeitet. Beispielsweise von dem Weber Kenntnis der Fäden, die von Flachs, Baumwolle, Wolle oder Seide sein können. Und doch ist es in unserm Falle anders. Nicht nur, daß die meisten Rechner sich jahraus-jahrein mit den Zahlen beschäftigen, ohne auch nur einmal nach dem Wesen derselben zu fragen; auch viele Rechenlehrer scheinen die Vertiefung in den Zahlbegriff als etwas Überflüssiges zu betrachten. Eine Entschuldigung freilich haben sie schließlich alle. Denn einerseits ist der Zahlbegriff ein so schwieriger Begriff, daß er nicht bloß von den Anfängern im Rechnen nicht erfaßt werden kann; anderseits liegt die Erfahrung vor, daß Fertigkeit im Rechnen auch ohne Vertiefung in den Zahlbegriff zu erlangen ist.

Der letzterwähnte Umstand ist allgemein bekannt, braucht also nicht erst erwiesen zu werden. Für den ersten Umstand spricht namentlich die Thatsache, daß man sich zu allen Zeiten und bei allen Völkern vergeblich bemühte, dem Zahlbegriffe eine Fassung zu geben, welche allen Anforderungen Genüge leistete. Mathematiker, Philosophen und neuerdings namentlich auch Rechenmethodiker beteiligten sich an diesen Bemühungen.

So finden wir z. B. bei zehn deutschen Mathematikern der letzten hundert Jahre folgende Fassungen des Zahlbegriffes:

1. Die Zahl ist eine unterbrochene (diskrete) Größe. (Voigt 1791.) 2. Die Zahl ist das Verhältnis, worin eine Größe gegen eine andere, die als Einheit angenommen wird, steht. (Euler, Ausgabe von Grüson 1796.) 3. Die Zahl ist der Ausdruck einer Menge von Dingen einer Art. (Vieth 1805.) 4. Die Zahl ist die Art und Weise des Setzens einer Größe (Einheit), durch welche eine andere Größe (Vielheit) erzeugt wird. (Thibaut 1822.) 5. Die Zahl ist der Ausdruck eines bestimmten Grades der Mannigfaltigkeit unserer Vorstellungen oder der Ausdruck einer bestimmten Menge. (Kries 1844.) 6. Die Zahl ist das, was die Menge gleichartiger Dinge bestimmt. (Baltzer 1860.) 7. Die Zahl ist der Begriff einer Menge gleicher Größen. (Trappe 1868.) 8. Die Zahl ist die Vorstellung der reinen Vielheit, wie sie aus der Einheit, der Eins, durch Wiederholung hervorgeht. (Kambly 1872.) 9. Die Zahl ist eine bestimmte (durch Eins gemessene) Vielheit. (Schüller 1891.) 10. Die Zahl ist eine Vielheit, gemessen durch die Einheit. (Brenner 1892.)

Von diesen zehn Definitionen ist streng genommen keine einzige einwandsfrei. Mag man also die Klarheit und Deutlichkeit der Begriffe, mit denen die Mathematik arbeitet, noch so sehr rühmen, auf den Zahlbegriff, wie er sich während der letzten hundert Jahre entwickelte, wird kein Mathematiker besonders stolz sein dürfen.

Aber auch die Philosophen sind beteiligt. Ja, diese eigentlich noch mehr als die Mathematiker. Ist doch die Begriffsentwickelung eines der Hauptgeschäfte derselben. Geht doch die Philosophie stets darauf aus, geschlossene, wohlgeordnete Ganze zu gewinnen, die erarbeiteten Begriffe in Systemen darzubieten. Strebt dieselbe doch stets dahin, das Einzelne dem Ganzen unterzuordnen, jeden Begriff im Systeme an rechter Stelle einzufügen. Zeigt doch neben vielen andern Begriffen besonders der Zahlbegriff in den Systemen der Philosophen bis heute mancherlei Wandlungen.

Wir können hier selbstverständlich nicht näher auf diese Wandlungen eingehen. Erwähnen aber wollen wir doch, daß für den Zahlbegriff die Beziehungen zwischen Zahl und Zeit recht bedeutungsvolle gewesen sind. — Während nämlich der größte Philosoph des Altertums, Aristoteles (384—322 v. Chr.), die Zahl als Voraussetzung der Zeit betrachtete, behauptete der größte Philosoph der Neuzeit, Kant (1724—1804), das Gegenteil. Nach Kant sind nämlich Raum und Zeit reine Anschauungen a priori, also unabhängig von aller Erfahrung, vor allen Erfahrungen da und nichts anderes als die Bedingungen möglicher Anschauungen, der Raum für den äußern, die Zeit für den innern Sinn. Und so setzt er: „Das reine Bild aller Größen (quantorum) vor dem äußern Sinne ist der Raum, aller Gegenstände der Sinne aber überhaupt die Zeit. Das reine Schema der Größe aber (quantitatis) als eines Begriffes des Verstandes ist die Zahl, welche eine Vorstellung ist, die die successive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammen befaßt. Also ist die Zahl nichts anderes als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch, daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge." [1])

Der Auffassung Kants trat mit Erfolg Herbart durch den Nachweis entgegen, daß Raum und Zeit keine reinen Anschauungen a priori sein können. Über den Zahlbegriff selbst bemerkt Herbart: „Wenn aber auch eingeräumt werden könnte, daß die Zahlen durch successive Addition der Einheiten entständen, so würde daraus noch ganz und gar nicht folgen, daß irgend etwas von Zeitbestimmung oder Succession in den Vorstellungen der Zahlen enthalten sei. Vielmehr fordert die Zahl die vollkommenste Simultaneität und löscht die Succession des Durchzählens, wodurch man bis zu ihr gelangt sein mag, gänzlich aus. Die Zahl hat demnach mit der Zeit nicht mehr gemein, als hundert andere Vorstellungen, die auch nur allmählich konnten erzeugt werden .... Endlich der eigentlich wissenschaftliche Begriff der Zahl, welcher kein anderer als der des Mehr und Minder, und dabei empfänglich ist nicht nur für alle Brüche, sondern auch für alle irrationalen Größen: dieser ist von noch früherem Ursprunge als die ganzen Zahlen." [2]) An einer andern Stelle aber heißt es: „Noch mehr wäre zu sagen gegen die falsche Ansicht der Zahlen, als ob sie Summen von Einheiten wären. Das sind sie eben so wenig, als Summen Produkte sind. Zwei heißt nicht zwei Dinge, sondern Verdoppelung, gleichviel ob das Doppelte Eins oder Vieles ist. Der Begriff von einem Dutzend Stühle faßt nicht zwölf Vorstellungen einzelner Stühle in sich, sondern er enthält nur zwei Vorstellungen: den Allgemeinbegriff Stuhl und die ungeteilte Verzwölffachung." [3])

Sehr eingehend behandelt Bartholomäi im Anschlusse an Herbart den Zahlbegriff in seinen „Zehn Vorlesungen". Er gelangt zu demselben auf vierfache Weise: durch Naturbetrachtung, Selbstbeobachtung, Metaphysik (Sein) und Logik (Denken). Auch finden wir bei ihm Klarheit über die in den obigen zehn Definitionen in bunter Mischung vorkommenden Begriffe: Größe, Einheit, Eins, Menge, Vielheit 2c. Denn gleich in der ersten Vorlesung heißt es: „Wenn wir Dinge zusammenfassen, so erhalten wir den Begriff des Komplexes von Dingen. Diesen Komplex können wir Größe nennen. Sehen wir nun von allem ab und fassen wir nur die leere Form des Seins ins Auge, so verschwindet aller Unterschied zwischen den Dingen, diese werden identisch und man hat dem Begriffe nach nur ein Ding. Das Gegebene erleidet also im Denken eine Veränderung. Erst setzten wir Dinge, d. h. wir machten mehrere

---

1) Kant a. a. O. S. 145 f. Vorher bemerkt er: „Die Vorstellung von einem allgemeinen Verfahren der Einbildungskraft, einem Begriffe sein Bild zu verschaffen, nenne ich das Schema zu diesem Begriffe." Die „Synthesis" begreift nach Kant stets Durchlaufen des Mannigfaltigen und Zusammenfassen desselben in sich.

2) Herbart a. a. O. 6. Bd. S. 149 f.

3) Derselbe. 10 Bd. S. 302.

Setzungen, für diese Setzungen substituierten wir eine einzige, indem wir alle Setzungen zusammenfaßten, wir setzten die Größe; aber indem wir an den Dingen nur das leere Sein setzten, waren unsere Setzungen nicht verschieden, sondern identisch, wir haben also dem Begriffe nach nicht verschiedene Setzungen, sondern dieselbe Setzung mehrere Male. Der Gegenstand dieses wiederholten Setzens ist die Einheit. Demnach ist die Einheit das Ding, durch dessen wiederholtes Setzen die Größe erzeugt wird. Diese identischen Setzungen folgen nun successive, das Vorstellen geht von einem Gesetzten zum andern fort, aber die Setzungen werden nicht vergessen, sondern jede wird mit den vorhergehenden bereits vollzogenen in der Art verknüpft, daß für sie und alle vorhergehenden eine Setzung gemacht wird. Dieses Setzen heißt zählen. Zählen heißt demnach, identische Setzungen machen und dieselben zusammenfassen oder durch eine einzige repräsentieren. Die Art und Weise aber, wie durch Wiederholung identischer Setzungen eine Größe erzeugt werden kann, ist die Zahl, sie ist die Bestimmung, wie oft die Einheit gesetzt werden muß, um die Größe zu erzeugen, oder: die Zahl ist das Wieviel ... Die Zahl spaltet sich alsbald wieder. Sofern sie nämlich in Verbindung mit der Größe gefaßt wird, ist sie Anzahl; sobald sie aber unabhängig von der Größe gedacht wird, ist sie Zahl im engern Sinne, Zahl als solche, Zahl als abstraktes Wieviel."[4])

In der siebenten Vorlesung heißt es dann noch: „Wenn wir einen Komplex von Dingen als zusammengehörig ansehen, mag diese Zusammengehörigkeit nun eine in der Natur der Sache gegebene oder eine willkürliche sein, so ist dieser Komplex eine Größe. Treiben wir die Abstraktion so weit, daß wir die Dinge als nur existierend ansehen, so ist an ihnen nichts mehr zu unterscheiden, und sie ordnen sich im Vorstellen in eine Reihe. Die Bilder dieser Reihe sind die Zahlen. Bei der Betrachtung der Größe kann nur noch die Frage entstehen: Wieviel? Das Wieviel aber ist die Zahl und das Bestimmen des Wieviel das Zählen. Durch unsere Abstraktion und das Zählen aber haben wir die Dinge verloren; denn wir haben dasselbe Ding mehrere Mal gesetzt. Die Größe wird durch mehrmaliges Setzen desselben Dinges erzeugt. Dieses Ding ist die Einheit, oder die Einheit ist das Ding, durch dessen öfteres Setzen die Größe erzeugt wird. Eine Größe ist also bestimmt, wenn ihre Einheit und ihre Zahl gegeben ist. Wenn wir nun das Setzen der Einheit wirklich vollziehen, so wächst die Größe in der Vorstellung bei jedem neuen Setzen um die Einheit. Aber auch die Zahl wächst. Das, um was die Zahl wächst, ist aber die Eins, und sie kann nichts anderes sein, als die Zahl der Einheit ... Jede Eins hat ihren besondern Platz (in der Reihe, in welcher sich die Größe ordnet), und wir durchlaufen die Reihen der Einsen, jeder ihre Stelle anweisend. Dadurch erscheint die Eins selbst als Einheit und hierin liegt der Grund der Verwechslung von Eins und Einheit."[5])

4) Bartholomäi a. a. O. S. 9 f.
5) Bartholomäi a. a. O. S. 118 f.

Bemerkenswert ist auch das, was **Volkmann** in seiner Psychologie über die Zahlvorstellungen sagt: „Die Vorstellung einer Zahl ist bedingt: erstlich durch das Gegebensein einer Reihe, deren Glieder qualitativ gleich sind oder doch als gleich genommen werden, zweitens durch das Hervortreten und Festgehaltenwerden der Vorstellung eines einzelnen Gliedes, drittens durch die Abmessung der Reihe durch das festgehaltene Reihenglied, und viertens durch die Zusammenfassung der Messungen in ein Ganzes.“ [6])

In neuester Zeit ist das Interesse für die Grundlagen des Rechnens in erfreulicher Zunahme begriffen. Rechenmethodiker, wie **Beetz**, **Knilling**, **Knoche**, **Niemeyer**, **Räther**, **Tanck** u. a. haben sich mit denselben mehr oder weniger eingehend beschäftigt. Besondere Beachtung verdienen die Untersuchungen, welche **Beetz** über Zahlbegriff, Zahlvorstellung und Zahlanschauung in seinem „Typenrechnen“ anstellt. Derselbe macht mit Recht auf die **Beziehungsbegriffe**, welche durch Beziehungs- oder Unterschiedsabstraktionen (Relationsabstraktionen) gewonnen werden, aufmerksam, weil für gewöhnlich nur die **Beschaffenheitsbegriffe** (Objektsbegriffe), welche aus Beschaffenheits- oder Qualitätsabstraktionen hervorgehen, beachtet werden. Darauf behandelt er den **Zahlbegriff** im logischen und psychologischen Sinne und findet, daß derselbe zu den Beziehungsbegriffen gehört. Er schließt seine Untersuchungen mit den Worten: „Wir glauben nachgewiesen zu haben, daß sich derselbe aus dem psychischen Bestreben der Unterscheidung und Vergleichung herausentwickelt, indem sich die Aufmerksamkeit auf Mengebeziehungen konzentriert, daß er also ein Ergebnis der Erfahrung, keine ursprüngliche (aprioristische) Erscheinung ist.“ [7])

In gleichem Sinne bemerkt **Räther**: „Der Zahlbegriff ist keine ursprünglich vorhandene ‚Anschauungsform‘ des Geistes, sondern stammt aus der Erfahrung; er entsteht durch sinnliche Wahrnehmungen, wird mithin durch Wechselwirkung von Geist und Dingen erzeugt. Obwohl die Zahl kein sinnlich wahrnehmbares Einzelwesen ist, so ist sie doch an und mit den Dingen wahrnehmbar als eine Beziehung zwischen denselben (Mengebeziehung). Die Zahl ist ein Beziehungsbegriff und wird durch Abstraktion gewonnen.“ [8])

Auf Grund seiner Untersuchungen behauptet **Beetz** schließlich das Vorhandensein einer simultanen (augenblicklichen) Auffassung der Mengebeziehungen, und auf diese insbesondere stützt er seine „Rechentypen“, worunter er Punktgruppierungen versteht, welche die simultane Auffassung bestimmter Vielheiten (bis 12) begünstigen sollen. **Räther** teilt diese Ansicht nicht.

Im Gegensatze besonders zu **Beetz** behaupten **Knilling**, **Tanck** u. a., die Zahl sei das Ergebnis einer rein geistigen Thätigkeit, die Erfindung des **Zählens**. Sie bestreiten insbesondere, daß man durch die Anschauung

6) **Volkmann** a. a. O. 2. Bd. S. 111.
7) **Beetz**, a. a. O. S. 13.
8) **Räther** a. a. O. S. 17.

zu einer Zahl gelangen könne. „Der Zahlbegriff kann allein nur durch mehrmalige Wiederholung der Zahlbezeichnung oder richtiger des Zählaktes gewonnen werden.“ [9]) „Die Zahlbegriffe stammen nicht wie die Begriffe der Farbe, der Form, der Bewegung; des Schalles, des Gefühls 2c. aus Sinneseindrücken und werden auch nicht als solche festgehalten und vorgestellt.“ [10])

Aus dem Vorstehenden ist zu ersehen, wie sich Mathematiker, Philosophen und Rechenmethodiker bemühten, dem Zahlbegriffe eine einwandsfreie Fassung zu geben. Überblicken wir aber alles noch einmal, so läßt sich ein Fortschritt in der Entwickelung des Zahlbegriffes zwar nicht verkennen; zu Ergebnissen, welche allseitige Zustimmung gefunden hätten, ist es jedoch bis heute noch nicht gekommen. Besonders auch bei den Rechenmethodikern nicht. Denn von diesen bejaht der eine, was der andere verneint, und es geht der eine von diesen, der andere von jenen Voraussetzungen aus. Auch werden nicht selten aus gleichen Voraussetzungen ungleiche Schlüsse gezogen. Die Folge davon ist ein Durcheinander der Anschauungen auch bei den Rechenlehrern. Und deshalb muß besonders für letztere heute mehr denn jemals das Bedürfnis vorliegen, Gesichtspunkte kennen zu lernen, welche in den Stand setzen, ein zutreffendes Urteil über den Wert oder Unwert neuer und neuester Ansichten und Vorschläge über und für den Rechenunterricht zu gewinnen. Diesem Bedürfnisse vor allem möchten wir hier noch entgegenkommen.

Zweierlei ist es, was die Ausführungen der Rechenmethodiker der Gegenwart kennzeichnet: die ausschließliche oder doch fast ausschließliche Berücksichtigung der psychologischen Seite des Zahlbegriffs und die hart aufeinander treffenden Ansichten über das Wesen desselben. Ersteres geschieht auf Kosten der logischen Seite des Zahlbegriffs. Letzteres findet seinen Ausdruck in der Behauptung der einen, der Zahlbegriff werde (wie andere Begriffe) durch Abstraktion gewonnen, und in der gegenteiligen Behauptung der andern, dieses sei ganz unmöglich. Einseitigkeit und Gegensätzlichkeit sind es also, denen wir begegnen und die es zu einem befriedigenden Abschlusse nicht kommen lassen wollen.

Gewiß ist es richtig, daß die psychologische Seite des Zahlbegriffs jeden Methodiker in hohem Maße interessieren muß. Doch macht die Beschäftigung mit derselben keinesfalls diejenige mit der logischen Seite überflüssig. Denn die Psychologie als solche hat kein Interesse daran, ob die Begriffe, mit denen sie es jeweilig zu thun bekommt, ihr in richtiger oder falscher Fassung dargeboten werden. Deshalb nicht, weil sie der Entstehung aller Begriffe, der falschen wie der richtigen, gleich gern nachgeht.[11]) Auch fehlen ihr, auf sich allein angewiesen, thatsächlich die Mittel, die Begriffe auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Was aber die

9) Knilling a. a. O. S. 37.
10) Tanck a. a. O. S. 14.
11) Bartholomäi a. a. O. S. 51.

hart aufeinander treffenden Ansichten über die Natur des Zahlbegriffs anlangt, so sind diese nur zu sehr geeignet, den freien Blick zu trüben. Man sehe sich nur um in der neuesten Rechenlitteratur. Da begegnet man rechenmethodischen Schriften, welche es unterlassen, die gegnerischen Ergebnisse im Zusammenhange mit den gegnerischen Grundlagen zu nehmen. Da trifft man auf Schriften, welche oberflächlich im Prüfen, aber gründlich im Verurteilen sind. Da giebt es solche, welche für sich durchgängig mehr, als sie thatsächlich leisten, in Anspruch nehmen u. dgl. m.

Das alles würde nun sicherlich kaum so sein, wenn man sich ernstlich bemühte, beiden Seiten des Zahlbegriffs, der logischen wie der psychologischen Seite, gleicherweise gerecht zu werden. Denn dadurch würde nicht allein der Zahlbegriff an sich gewinnen, sondern auch alles, was zu ihm in Beziehung stände, und nicht zum wenigsten das Rechnen selbst.

Mit der logischen Seite des Zahlbegriffs beschäftigt sich die Logik. Diese läßt sich eine möglichst genaue Bestimmung des Inhalts und Umfangs der Begriffe angelegen sein. Und gewiß mit Recht. Denn vom Inhalte der Begriffe hängen Klarheit und Deutlichkeit, vom Umfange Ordnung und Vollständigkeit der sich anschließenden Erkenntnisse ab. Da nun die Zahl das eigentliche Objekt des Rechnens ist, so liegt die Wichtigkeit der Bestimmung des Zahlbegriffs durch die Logik auf der Hand. Auch ist die Möglichkeit, daß dadurch erst die Psychologie in die Lage versetzt wird, sofort an der richtigen Stelle einzusetzen, nicht zu unterschätzen.

Mit der psychologischen Seite des Zahlbegriffs hat es die Psychologie zu thun. Ihr kommt es, wie schon bemerkt wurde, zu, die Entstehung des Zahlbegriffs zu ermitteln. Sie stellt insbesondere fest, ob derselbe durch Abstraktion gewonnen wird, also aus Erfahrungen (konkreten Vorstellungen) stammt, oder ob er eine dem Geiste eigentümliche „Anschauungsform“ ist. Dabei geht sie den einzelnen Stufen der Abstraktion nach, indem sie die Wechselwirkung zwischen Geist und Sinnenwelt in zweckentsprechender Weise beobachtet. Und wenn ihr auch jeder Begriff als Untersuchungsobjekt genehm ist, von der Logik unterstützt, bevorzugt sie im vorliegenden Falle doch die klaren und deutlichen Begriffe und stellt sich so mit Erfolg in den unmittelbaren Dienst des Rechenunterrichts.

Doch noch einen Umstand giebt es, den man nicht übersehen darf, wenn es sich um zuverlässige und nutzbringende Aufschlüsse über den Zahlbegriff handelt. Das ist die Doppeldeutigkeit des Zahlbegriffs, wie sie in den bestimmten und unbestimmten Zahlwörtern zu Tage tritt. Diesen Zahlwörtern entsprechen die bestimmten und unbestimmten Zahlen. Letztern wieder die zugehörigen Zahlbegriffe. Es müssen also Begriffe bestimmter und unbestimmter Zahlen unterschieden werden. Jeder dieser beiden Begriffe ist für sich ein Zahlbegriff im „engern Sinne“. Zum Zahlbegriffe im „weitern Sinne“ oder zum „Allgemeinbegriffe“ der Zahl kommt es erst, wenn jene beiden Begriffe in einen einzigen zusammengefaßt werden. Der „Allgemeinbegriff“ der Zahl bezieht sich also auf bestimmte und unbestimmte Zahlen zugleich. Indem dieses nun nicht immer und überall beachtet wurde, stellten sich mancherlei Irrtümer ein, welche besonders auch in den oben erwähnten „Ansichten“ eine Rolle spielen.

Dieses zur vorläufigen Kennzeichnung unseres Standpunktes. Und nun das Wesentlichste über die logische und psychologische Seite des Zahlbegriffs selbst. Auf Einzelheiten näher einzugehen, liegt natürlich außerhalb der Aufgabe unseres Buches. Wer dergleichen sucht, nehme die oben verzeichnete Litteratur zur Hand.[12])

Im **logischen** Sinne genommen, handelt es sich, wie bereits erwähnt, um Inhalt und Umfang des Zahlbegriffs. Was man unter Inhalt und Umfang eines Begriffes überhaupt zu verstehen hat, drückt Drobisch wie folgt aus: „Die Gesamtheit der in bestimmter Ordnung durch Determination mit einander verbundenen Merkmale eines Begriffs heißt sein Inhalt; die geordnete Gesamtheit aller beigeordneten Arten desselben sein Umfang. Da die Merkmale eines Begriffs sich in die der nächsthöhern Gattung und der Artunterschiede gruppieren lassen, so kann der Inhalt auch als die durch den Artunterschied determinierte Gattung des Begriffs erklärt werden. Der Inhalt ist also die Gesamtheit dessen, was in dem Begriffe, der Umfang die Gesamtheit dessen, was unter ihm, d. i. worin er selbst als Gattung enthalten ist ... Nennt man die Anzahl der Merkmale eines Begriffs die Größe seines Inhalts, so nimmt diese zu oder ab, je nachdem man von einem höhern Begriffe zu einem niedrigern herab-, oder von einem niedrigern zu einem höhern aufsteigt ... Heißt die Anzahl der unter einem Begriffe auf gleicher Stufe der Unterordnung enthaltenen Arten die Größe seines Umfangs, so nimmt diese ab oder zu, je nachdem man von einem höhern Begriffe zu einem niedrigern herab-, oder von einem niedrigern zu einem höhern aufsteigt ... In jeder Reihe einander untergeordneter Begriffe kommt demjenigen von je zwei mit einander verglichenen Begriffen, welcher einen größern Inhalt als der andere hat, ein kleinerer Umfang, und umgekehrt demjenigen, welcher einen größern Umfang als der andere hat, ein kleinerer Inhalt zu.“[13])

Welches ist nun der Inhalt und Umfang des Zahlbegriffs im „engern“ und „weitern“ Sinne? Nehmen wir als Beispiel einmal die bestimmte Zahl Drei. Das Nächste, was an dieser bemerkt wird, ist die Unmöglichkeit, sie als etwas für sich Bestehendes vorzustellen. Denn sie

12) Besonders Bartholomäi, Beetz und Räther haben die beiden Seiten des Zahlbegriffs eingehender behandelt und sauber auseinander gehalten.

13) Drobisch a. a. O. S. 28 f. So ist z. B. von den Begriffen Viereck und Parallelogramm Viereck der höhere Begriff. Sein Inhalt ist der ärmere, denn es fehlt ihm das Merkmal des Parallelismus der Gegenseiten. Dagegen hat er den größern Umfang, denn er schließt das Trapez und Trapezoid mit in sich.

tritt stets in Verbindung mit Dingen auf, und zwar in Verbindung mit gleichen Dingen: 3 Finger, 3 Punkte, 3 Kugeln ꝛc. Allerdings liegt die Möglichkeit vor, die Drei und jede andere Zahl auch in Verbindung mit ungleichen Dingen zu setzen; dann aber müssen dieselben bei irgend einem gemeinsamen Merkmale gefaßt, folglich als gleiche Dinge gedacht werden: Apfel, Birn und Kirsche als Früchte; Löffel, Säbel und Bleistift als Gegenstände; Wachen, Arbeiten und Singen als Thätigkeiten; Afrika, Reichstag und Hoffnung als — Etwas. Je verschiedenartiger die Begriffe sind, welche zusammengestellt werden, desto schwerer wird es im allgemeinen, ein allen gemeinsames Merkmal aufzufinden. Der Begriff des Etwas aber reicht in jedem Falle aus. Er ist von unbeschränkter Allgemeinheit und paßt auf jeden Begriffsinhalt. Das kommt daher, daß er mit dem einfachsten und abstraktesten aller Begriffe, dem Begriffe des Seins zusammenhängt. Das Etwas ist soviel als ein Seiendes. Mit diesem Begriffe begnügt sich der Zahlbegriff. Der Zahlbegriff ist also unabhängig von allen Qualitäten der Dinge, d. h. von Stoff, Größe, Form, Farbe, Geruch, Ton ꝛc., von dem Begriffe des Seienden jedoch kommt er nicht los. Daraus folgt schließlich, daß das Seiende, das Etwassein, ein Merkmal des Zahlbegriffs ist, oder daß es zum Inhalte desselben gehört. Ein zweites Merkmal des Zahlbegriffs ist der Begriff des Zusammenseins: ein Etwas und ein Etwas und ein Etwas geben drei Etwas. Ein drittes Merkmal sucht man aber vergebens, und so ergiebt sich, daß der Inhalt des Begriffs der Zahl Drei nur aus zwei Merkmalen besteht: aus dem Begriffe des Etwasseins und des Zusammenseins.

Wie bei der Zahl Drei, so ist es natürlich bei jeder andern bestimmten Zahl; der Inhalt des Zahlbegriffs wäre also, so weit es sich um bestimmte Zahlen handelt, gefunden. Es liegt aber nahe, daß auch die unbestimmten Zahlen einen entsprechenden Begriffsinhalt haben. Denn nimmt man die Begriffe alle, manche, viele, wenige, etliche, einige, mehrere u. s. w., immer und immer wieder kommt man auf ein Etwassein und Zusammensein zurück. So begreift z. B. die unbestimmte Zahl „viele“ in sich: ein Etwas und ein Etwas und ein Etwas und ein Etwas u. s. w. Sie unterscheidet sich zwar durch das unbestimmte „u. s. w.“ von allen bestimmten Zahlen, unbestimmt ist bei ihr aber nur, wie weit die Reihe der Etwas reicht. Man hat es also thatsächlich auch bei den unbestimmten Zahlen mit einer Reihe von „Etwas“ oder „Seienden“ zu thun, und sämtliche „Etwas“ oder „Seiende“, sie stehen in Verbindung mit einander, zeigen „Zusammensein“.

Als Inhalt des Allgemeinbegriffs der Zahl, die den Begriff der bestimmten und unbestimmten Zahlen in sich schließt, ergeben sich nach dem Vorigen nur zwei Merkmale: das „Etwassein“ und das „Zusammensein“. Es liegt demnach ein sehr inhaltsarmer Begriff vor. Da nun für jeden Begriff gilt: „Je kleiner der Inhalt, desto größer der Umfang“, so darf für den Zahlbegriff ein sehr großer Umfang erwartet werden. In Wahrheit ist der Umfang des Zahlbegriffes ein unendlich großer, denn es giebt weder wirkliche, noch gedachte Dinge, zu denen er nicht in Beziehung treten könnte.

Begriffe, welche einerseits so inhaltsarm, anderseits so umfangreich sind, wie der Zahlbegriff, bezeichnet man als einfache Begriffe. Solche Begriffe lassen sich bekanntlich nicht definieren, sondern nur umschreiben oder verdeutlichen. Dabei zerlegt man dieselben entsprechend ihrem Umfange in Arten und Gegenstände. Auch beim Zahlbegriffe ist es so. Doch nur beim Allgemeinbegriffe, nicht beim Begriffe der bestimmten Zahl. Denn letzterer verhält sich zu ersterem wie ein Artbegriff zu seinem Gattungsbegriffe. Deshalb hat es auch einen Sinn, für verschiedene bestimmte Zahlen Definitionen aufzustellen, wie z. B. diese: Die Drei ist diejenige Zahl, welche aus Etwas und Etwas und Etwas besteht.[14])

Was die psychologische Seite des Zahlbegriffs anlangt, so ist schon oben bemerkt worden, daß es sich bei ihr wesentlich um die Entstehung des Zahlbegriffs handelt. Doch auch hier unterscheiden wir zweckmäßig wieder zwischen dem Allgemeinbegriffe der Zahl und dem Begriffe der bestimmten Zahl. Besonders deshalb, weil sich am Ende zeigen wird, daß gerade dadurch die Meinungsverschiedenheiten der Rechenmethodiker, welche heute so hart aufeinander treffen, beseitigt werden können. Es ist ferner darauf hingewiesen worden, daß es im vorliegenden Falle insbesondere darauf ankommt, zu entscheiden, ob die Zahl das Ergebnis eines Abstraktionsprozesses ist oder nicht. Denn ein Teil der heutigen Rechenmethodiker nimmt das eine, ein anderer das andere an. Beetz, Räther u. a. halten dafür, daß die Zahl das Ergebnis eines Abstraktionsprozesses sei, also aus der Erfahrung stamme; Tanck, Knilling, Knoche u. a. behaupten das Gegenteil. Beide Parteien aber haben während der letzten Jahre einen ziemlich heftigen Streit miteinander geführt.[15]) Und so wäre es schließlich eine Entscheidung, die wir zu treffen hätten.

Abstraktion oder nicht, darum handelt es sich. Das scheint nun zwar einfach genug, um sich bald entscheiden zu können. Aber wird unter Abstraktion auch immer und überall dasselbe verstanden? Nur in diesem Falle läge die Sache einfach. Andernfalls wäre es recht wohl denkbar, daß selbst der behauptete Gegensatz schwände, also nur scheinbare Meinungsverschiedenheiten übrig blieben und schließlich das Streitobjekt mangelte. Man geht daher jedenfalls am sichersten, wenn man sein Augenmerk vorerst auf das Wesen der Abstraktion selbst richtet, wenn man sich Klarheit darüber verschafft, was darunter verstanden wird und was darunter verstanden werden muß.

Wenn von Abstraktionen die Rede ist, so denkt wohl jeder zunächst an dasjenige Verfahren, welches aus einer Reihe von Wahr-

14) Vergleiche hierüber Räther a. a. O. S. 12.
15) Vergleiche hierüber besonders Knilling und Beetz a. a. O.

nehmungen die wiederkehrenden Merkmale heraushebt und vereinigt und die vereinzelt vorkommenden Merkmale fallen läßt, von ihnen absieht, abstrahiert. Es ist dieses jedoch nur die bekanntere und geläufigere Abstraktion, die Qualitätsabstraktion, so genannt, weil die Merkmale Qualitäten (Beschaffenheiten) der Dinge sind. Denn neben ihr giebt es noch eine zweite Abstraktion, nämlich ein Verfahren, welches die Beziehungen oder Relationen der Einzeldinge untereinander beachtet, die wiederkehrenden Beziehungen festhält und vereinigt und von den vereinzelt vorkommenden absieht, abstrahiert. Diese zweite Art der Abstraktion ist die Relations- oder Beziehungsabstraktion. Während nun aus den Qualitätsabstraktionen die Qualitäts- oder Objektsbegriffe hervorgehen, führen die Beziehungsabstraktionen zu den Beziehungsbegriffen. Solche Begriffe sind z. B. Unterricht, Freundschaft, Handel u. s. w. Sie haben alle das Eigentümliche, daß, obgleich sie nicht als sinnlich wahrnehmbare Einzeldinge vorkommen, sie doch an den Einzeldingen, nämlich als Beziehungen zwischen denselben, wahrzunehmen sind.

Andere Abstraktionen als die beiden genannten giebt es nicht. Wir wissen jetzt also, woran zu denken ist, wenn behauptet wird: Der Zahlbegriff ist das Ergebnis eines Abstraktionsprozesses. Nur zweierlei kann gemeint sein: Der Zahlbegriff ist entweder das Ergebnis einer Qualitätsabstraktion, oder er ist das Ergebnis einer Beziehungsabstraktion. Prüfen wir jeden Fall auf seine Haltbarkeit.

Erster Fall: Der Zahlbegriff ist das Ergebnis einer Qualitätsabstraktion. Wäre er dieses, dann stammte er nicht nur aus der Erfahrung, sondern es müßten die Zahlen auch als sinnlich wahrnehmbare Einzelwesen, behaftet mit wesentlichen und unwesentlichen Merkmalen, vorkommen. Sie kommen aber bekanntlich als solche nicht vor. Und so folgt schon hieraus, daß der Zahlbegriff nicht aus einer Qualitätsabstraktion hervorgehen kann. Es folgt dieses aber auch, und noch viel bestimmter, aus dem Umstande, daß man niemals zu einer Zahl gelangt, selbst wenn man von allen sinnlich wahrnehmbaren Merkmalen eines Dinges abstrahiert.

Zweiter Fall: Der Zahlbegriff ist das Ergebnis einer Beziehungsabstraktion. Wäre er dieses, dann stammte er zwar auch aus der Erfahrung, aber er brauchte nicht als sinnlich wahrnehmbares Einzelwesen vorzukommen. Nur an den Einzeldingen, nämlich als Beziehung zwischen denselben, müßte er wahrzunehmen sein. Ist das beim Zahlbegriffe aber der Fall? Es ist der Fall. Und so liegt es auch nahe, denselben als das Ergebnis einer Beziehungsabstraktion zu nehmen. Dieser Annahme aber widerstreitet schließlich auch das Folgende nicht.

Genaue Beobachtungen haben ergeben, daß das Kind ziemlich bald die Qualitäten der Einzeldinge wahrnimmt, verhältnismäßig spät aber erst die gegenseitigen Beziehungen derselben. Es darf also angenommen werden, daß sich die Beziehungsbegriffe später als die Objektsbegriffe (Qualitätsbegriffe) entwickeln. Am frühesten werden Beziehungen wie diese: warm und kalt, hell und dunkel, groß und klein u. dgl. wahrgenommen. Später erst gesellen sich dazu: eins und viel, etwas und nichts, mehr und weniger ꝛc. Alle diese Wahrnehmungen sind anfangs unwillkürliche, nach und nach erst werden sie absichtlich wiederholt, also zu willkürlichen umgestaltet. Geschieht es dann aber, daß dieselben Beziehungen öfter wiederkehren, und noch dazu an verschiedenen Dingen, so erscheinen sie schließlich als ein Bleibendes. Das Kind hält sie fest, löst sie gleichsam von den Dingen los und erhebt sie dadurch zu selbständigen Vorstellungen, zu Begriffen. Was es aber so ausführt, das sind Beziehungsabstraktionen. Durch dieselben gelangt das Kind zu den Beziehungsbegriffen, und unter diesen befindet sich auch der Zahlbegriff.

Sobald das Kind die unbestimmten Zahlwörter richtig anwendet, darf man annehmen, daß es über den Zahlbegriff verfügt. Das ist aber in der Regel schon vor der bei uns üblichen Schulzeit der Fall. Die Kinder, welche in die Schule eintreten, verfügen also bereits über den Zahlbegriff. Und das setzt unser Schulunterricht schließlich auch voraus. Denn Kinder, welche nicht über den Zahlbegriff verfügen, werden kaum als unterrichtsfähig gelten.

Der Zahlbegriff ist das Ergebnis einer Beziehungsabstraktion, er ist ein Beziehungsbegriff; die Beziehung, um welche es sich dabei handelt, ist eine Mengebeziehung. So dürfen wir jetzt kurz und bündig behaupten. Und damit würde die ganze Frage für uns ihre Erledigung gefunden haben, wenn nicht die Doppeldeutigkeit des Zahlbegriffs wäre. Auf diese Doppeldeutigkeit des Zahlbegriffs haben wir bereits hingewiesen.[16]) Dieselbe tritt in den bestimmten und unbestimmten Zahlen zu Tage, und ihr zufolge sind Begriffe bestimmter und unbestimmter Zahlen, oder Zahlbegriffe im „engern" Sinne, von dem Zahlbegriffe im „weitern" Sinne, der sich auf Zahlen jeder Art bezieht, zu unterscheiden. Da sich nun unsere letzten Untersuchungen, genau genommen, nur mit der Entstehung der unbestimmten Zahlen beschäftigt haben, so bedürfen dieselben hier noch einer Ergänzung. Denn wenn auch angenommen werden darf, daß an dem Wesen des Zahlbegriffs sich nichts ändert, daß man es nach wie vor mit einem Beziehungsbegriffe zu thun hat, der Nachweis, daß man in den Besitz der bestimmten Zahlen genau auf dieselbe Weise wie in denjenigen der unbestimmten Zahlen gelange, ist damit noch nicht erbracht.

Zwei Ansichten sind hier jedenfalls möglich. Erstens: die bestimmten und unbestimmten Zahlen werden auf gleiche Weise erworben; zweitens: sie werden nicht auf gleiche Weise erworben. Jede dieser Ansichten hat ihre Anhänger.[17]) Wir selbst bekennen uns zu der zweiten Ansicht, da die erste im Widerspruche mit unsern Untersuchungen und den Erfahrungen, welche jeder Rechenlehrer an sich und seinen Schülern machen kann, steht. Auf den letzten Punkt werden wir weiter unten zurückkommen. Im Anschlusse an unsere Untersuchungen aber bemerken wir folgendes. Insofern der

---

16) Vergl. S. 240.
17) Vergl. hierüber namentlich Beetz und Räther a. a. O.

Begriff der bestimmten Zahl ein Zahlbegriff ist, liegt ihm gleicherweise wie dem Begriffe der unbestimmten Zahl eine Beziehungsabstraktion zu Grunde. Die Beziehung, um welche es sich dabei handelt, ist eine Mengebeziehung. Während aber bei jeder unbestimmten Zahl die Menge (Vielheit) der „Etwas" eine Reihe von Fällen zuläßt, beschränkt sich diese Menge bei jeder bestimmten Zahl auf einen einzigen Fall. Diesen einzigen Fall festzustellen, ist für den, der zu einer klaren und deutlichen Vorstellung von einer bestimmten Zahl gelangen will, die nächste Aufgabe. Das Mittel dazu aber ist das Zählen.

Das Zählen ist eine rein geistige Thätigkeit. Es giebt genaue Antwort auf die Frage: Wieviele „Etwas" bilden mit einander das „Zusammen"? Im besondern aber geschieht beim Zählen dreierlei: „1. Wir fassen jedes zu zählende Ding auf, denn alle sollen aufgefaßt werden; 2. wir erinnern uns an die schon aufgefaßten, weil wir sonst die Zusammenfassung aller nicht bewerkstelligen könnten; 3. wir verknüpfen jedes Ding mit den schon aufgefaßten, damit eine Zusammenfassung aller möglich wird. Es wird also jedes einzelne Ding gesetzt, aber die Setzungen werden nicht vergessen, sondern einer sie alle repräsentirenden Setzung wird die neue Setzung hinzugefügt und für beide Setzungen eine einzige gemacht."[18])

Wir haben oben, bei Betrachtung der logischen Seite des Zahlbegriffs, darauf hingewiesen, daß sich der Allgemeinbegriff der Zahl zum Begriffe der bestimmten Zahl wie ein Gattungsbegriff zu seinem Artbegriffe verhält. Was wir hier, wo es sich um die psychologische Seite des Zahlbegriffs handelt, gefunden haben, entspricht jenem Verhältnisse. Um zu einer bestimmten Zahl zu gelangen, bewendet es nicht bei einer sinnlichen Wahrnehmung und nachfolgenden Abstraktion, sondern es muß noch etwas Besonderes, eine rein geistige Thätigkeit, das Zählen, hinzukommen. Wir fügen aber ausdrücklich hinzu: Auch die bestimmten Zahlen entstehen nicht eigentlich durch das Zählen, sondern sie werden durch das Zählen nur begriffen.

Hieraus ergiebt sich schließlich unser Standpunkt und die Lösung der Widersprüche unter den heutigen Rechenmethodikern. Wir betrachten den Allgemeinbegriff der Zahl als das Ergebnis einer Beziehungsabstraktion, halten es also mit Beetz, Räther &c. und nicht mit Tanck, Knilling, Knoche &c. Wir fassen aber darüber hinaus den Begriff der bestimmten Zahl als einen Artbegriff auf, zu dem man nur unter Hinzunahme des Zählens gelangen kann, berühren uns also in diesem Punkte mit Tanck, Knilling, Knoche &c.

§ 18.

Auswahl des Lehrstoffs.

Litteratur. Wie vorher. Dazu noch: Goltzsch, E. Th. Der verbundene Zahl-, Sach- und Meßunterricht &c. Hartmann-Ruhsam, Rechenbuch für deutsche

18) Bartholomäi a. a. O. S. 60.

Stadt- und Landschulen rc. Jänicke, E. Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts rc. Kallius, A. Die vier Spezies in ganzen Zahlen. Lindner, G. A. Encyklopädisches Handbuch der Erziehungskunde mit besonderer Berücksichtigung des Volksschulwesens. Wien und Leipzig 1884. Splittegarb, C. Eine Kritik der Übungsbücher rc. Außerdem: Die in § 16 aufgeführten methodischen Handbücher und Rechenbücher.

Der Gegenstand des Volksschulrechnens sind die Zahlen, genauer die bestimmten Zahlen; dieselben sind das Ergebnis einer Beziehungsabstraktion in Verbindung mit einer rein geistigen Thätigkeit, dem Zählen; ohne das Zählen würden wir nicht zu klaren und deutlichen Begriffen der bestimmten Zahlen gelangen: hieraus ergiebt sich die Bedeutung des Zählens für das Volksschulrechnen.

Als geordnete Zusammenstellung aller bestimmten Zahlen erscheint die natürliche Zahlreihe. Jede nachfolgende Zahl derselben enthält die vorhergehende und noch Eins. Die Eins ist die Zahl der Einheit. Jede bestimmte Zahl für sich ist ein Wieviel; in der natürlichen Zahlreihe aber erscheint sie als ein Wievieltes. Die Zahl 3 ist die dritte Zahl der natürlichen Zahlreihe. Eine bestimmte Zahl kann nur derjenige klar und deutlich auffassen, der die in der natürlichen Zahlreihe vorhergehende Zahl klar und deutlich aufgefaßt hat. Die bestimmten Zahlen sind daher in der Folge, welche die natürliche Zahlreihe aufweist, darzubieten.

Alle bestimmten Zahlen in der Folge der natürlichen Zahlreihe darzubieten, ist indessen nicht nötig, denn die Zahlen bilden innerhalb der Reihe Gruppen, auf deren Inhalt und Form man mit Sicherheit zu schließen vermag, sobald man die ersten Gruppen nach Inhalt und Form genau erfaßt hat. Die bestimmten Zahlen erscheinen in einer nach dem Zehnersysteme angeordneten Reihe, und mit Hilfe von zehn Zeichen können sie alle dargestellt werden. Die klare Auffassung und Darstellung der Zahlen als Glieder eines Systems bilden einen wesentlichen Bestandteil der Übungen auf der Unter- und Mittelstufe der Volksschule.

Erst nachdem die Zahlbildung bei einem der vorerwähnten Punkte angelangt ist, können die mancherlei Beziehungen und Verknüpfungen der Zahlen zu- und miteinander Gegenstand des Unterrichts werden, wie es in den Rechnungsarten oder Operationen geschieht. Letztere wieder bilden die Voraussetzung der Anwendung der Zahlen auf die Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens, also des praktischen Rechnens.

Hiernach bezieht sich die Stoffauswahl auf folgende vier Punkte:[1])

1. die Zahlen selbst;
2. ihre mündliche und schriftliche Darstellung im Zahlsysteme;
3. ihre Beziehungen in den einzelnen Rechnungsarten (Operationen);
4. ihre Anwendung auf die Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens.

1) Vergl. Lindner a. a. O. S. 698.

Was die Zahlen an und für sich betrifft, so werden gewöhnlich ganze und gebrochene Zahlen unterschieden. Es empfiehlt sich aber aus methodischen Gründen drei Arten, nämlich dekadische, dezimale und gebrochene Zahlen zu unterscheiden. Die dekadischen Zahlen sind Zahlen, deren Einheit die Eins und deren Grundzahl die Zehn ist. Sie bilden die nach den Gesetzen des Zehnersystems aufgebaute Reihe der ganzen Zahlen oder die natürliche Zahlreihe. Da sie ein und demselben Systeme angehören, bezeichnen wir sie als Systemzahlen. Die gebrochenen Zahlen sind Zahlen, deren Einheit und Grundzahl wechseln. Einheit derselben kann jeder beliebige aliquote Teil der Eins sein, Grundzahl ist die demselben entsprechende ganze Zahl. Es giebt demnach soviele Reihen gebrochener Zahlen, als es ganze Zahlen giebt. Da die gebrochenen Zahlen nicht nach ein und demselben Systeme, insbesondere nicht ausschließlich nach dem Zehnersysteme aufgebaut sind, so bezeichnen wir sie auch nicht als Systemzahlen, sondern nennen sie kurz Bruchzahlen. Die dezimalen Zahlen endlich sind Systemzahlen und Bruchzahlen zugleich. Sie sind Systemzahlen, denn sie bilden eine nach den Gesetzen des Zehnersystems sich aufbauende Reihe; sie sind Bruchzahlen, denn ihre Einheiten sind aliquote Teile der Eins. Die dezimalen Zahlen erscheinen sonach als Mittelglieder zwischen ganzen und gebrochenen Zahlen und nehmen insofern eine bevorzugte Stellung in der Zahlwelt ein. Außerdem verleihen ihnen ihre Beziehungen zu den dezimalen Münzen, Maßen und Gewichten eine große praktische Bedeutung. Diese bevorzugte Stellung und große praktische Bedeutung wollen wir durch den besondern Namen Dezimalzahlen kennzeichnen. Wir unterscheiden also: a) Ganze Zahlen, b) Dezimalzahlen (nicht Dezimalbrüche) und c) Bruchzahlen (nicht gemeine oder gewöhnliche Brüche).

Diese Zahlen können auch gemischt auftreten, es können nämlich einerseits Ganze mit Dezimalzahlen, anderseits Ganze mit Bruchzahlen vereinigt werden. Das giebt die gemischten Zahlen, worunter allerdings im engern Sinne nur die Vereinigung der Ganzen mit Bruchzahlen verstanden wird.

Eine Zahl kann ferner a) benannt oder b) unbenannt sein. In den benannten Zahlen 5 Dutzend, 3,36 ℳ, $2\frac{1}{2}$ Stunde u. s. w. ist nicht nur die Menge, sondern auch die Art der zu Grunde liegenden Einheiten angegeben; in den unbenannten Zahlen 5; 3,36; $2\frac{1}{2}$ u. s. w. fehlt die Angabe über die Art dieser Einheiten. Die benannten Zahlen führen auch den Namen konkrete, die unbenannten Zahlen die Namen abstrakte und reine Zahlen. Streng genommen giebt es freilich weder benannte noch unbenannte, weder konkrete noch abstrakte Zahlen. Nur benannte oder konkrete und unbenannte oder abstrakte Einheiten kommen vor. Die benannte oder konkrete Einheit ist ein wirkliches oder gedachtes Ding, also ein Etwas mit der Angabe des Was, kurz eine Größe. Die unbenannte oder abstrakte Einheit ist ein Etwas, bei dem von dem Was abgesehen wird, kurz eine Eins. Die Zahl aber ist in jedem Falle die Angabe des Wieviels, oder die Zahl giebt an, wie oft eine Einheit gesetzt wird. Es hat also in der That keinen Sinn, anzunehmen, die Zahl sei benannt oder unbenannt. Sinn hat es nur, die Zahl als das Vielfache einer benannten oder unbenannten Einheit zu denken, also so, daß damit für sie selbst eine Veränderung nicht verbunden ist.[2]) Indessen ist die Bezeichnung eine allgemein übliche, und so werden auch wir dieselbe beibehalten, nur daß wir den rechten Sinn mit ihr verbinden.

Hinsichtlich der benannten Zahlen besteht aber noch ein Unterschied: es giebt einfach- und mehrfachbenannte Zahlen oder, wie man hier auch sagen darf, einsortige und mehrsortige Zahlen. Einfach benannte Zahlen sind z. B. 3 Tag, 5 km, 7 Schock u. s. w., mehrfach benannte Zahlen z. B. 3 Tag 6 Std., 5 km 196 m, 7 Schock 3 Mandel 10 Stück u. s. w. Es sind also einfach benannte Zahlen diejenigen, welche sich auf eine und dieselbe Einheit, mehrfach benannte Zahlen hingegen diejenigen, welche sich auf mehrere Einheiten beziehen. Allerdings unterliegt auch die letzte Bestimmung noch einer Einschränkung. Obgleich sich die mehrfach benannten Zahlen auf mehr als eine Einheit beziehen, müssen sie sich doch zugleich auch auf eine und dieselbe Einheit beziehen lassen können. Und das darf schließlich wohl für jede der vorkommenden Einheiten erwartet werden. Man kann also 3 Tag 6 Std. auf Tage zurückführen, d. h. $3\frac{1}{4}$ Tag setzen, oder in Stunden auflösen, d. h. 78 Stunden schreiben. Ebenso kann man 5 km 196 m durch 5,196 km oder 5196 m, 7 Schock 3 Mandel 10 Stück durch $7\frac{11}{12}$ Schock, $31\frac{2}{3}$ Mandel oder 475 Stück wiedergeben u. s. w. Es bestehen in dieser Hinsicht nur betreffs der deutschen dezimalen Münzen, Maße und Gewichte Vorschriften, nämlich die durch die Verordnung des Bundesrates vom 8. Oktober 1877 gegebenen. Nach denselben sollen die Münz-, Maß- und Gewichtszahlen stets als einsortige Zahlen geschrieben werden, also z. B. nicht 4 ℳ 36 ₰, sondern 4,36 ℳ. Freilich hat das die deutsche Reichspostbehörde, um Irrtümer zu verhüten, nicht abgehalten, bezüglich der Geldbezeichnung erst neuerdings wieder die entgegengesetzte Forderung an ihre Beamten zu stellen. Auch die Kaufleute pflegen Geldsummen zweisortig zu schreiben. Durch die Verordnung vom 8. Oktober 1877 sind für das deutsche Reich aber folgende Maße, Gewichte und Münzen in den beigefügten Bezeichnungen und Abkürzungen vorgeschrieben:

A. Längenmaße:

Kilometer	=	km
Meter	=	m
Centimeter	=	cm
Millimeter	=	mm

2) Vergl. Bartholomäi im 5. Jahrbuche des Vereins für wissenschaftliche Pädagogik. S. 16.

B. Flächenmaße:

Quadratkilometer	=	qkm
Hektar	=	ha
Ar	=	a
Quadratmeter	=	qm
Quadratcentimeter	=	qcm
Quadratmillimeter	=	qmm

C. Körpermaße:

Kubikmeter	=	cbm
Hektoliter	=	hl
Liter	=	l
Kubikcentimeter	=	ccm
Kubikmillimeter	=	cmm

D. Gewichte:

Tonne	=	t
Kilogramm	=	kg
Gramm	=	g
Milligramm	=	mg

E. Münzen:[3])

Mark	=	ℳ
Pfennig	=	₰.

Dabei ist noch folgendes zu merken: 1) Für alle Namen (mit Ausnahme von Tonne, Mark und Pfennig) ist das sächliche Geschlecht anzuwenden, es darf also nicht der, sondern nur das Meter, nicht der, sondern das Liter heißen u. s. w. 2) Förster und Holzhändler unterscheiden zwischen Raummeter (bei Brennholz, wo auch die Zwischenräume mit eingerechnet werden) und Kubikmeter (bei Baumstämmen, wo es keine solchen Zwischenräume giebt). 3) Hektoliter und Liter bezeichnet man als Hohlmaße (für trockene und flüssige Dinge). 4) Den Buchstaben sind keine Schlußpunkte beizufügen. 5) Die Buchstaben werden an das Ende der vollständigen Zahlausdrücke (nicht über das Dezimalkomma derselben) gesetzt, also 5,37 m (nicht 5,^{m}37 und nicht 5 m 37 cm). 6) Zur Trennung der Einerstellen von den Dezimalstellen dient das Komma (nicht der Punkt). Sonst ist das Komma bei Maß- und Gewichtszahlen nicht anzuwenden, insbesondere nicht zur Abteilung mehrstelliger Zahlausdrücke. Solche Abteilung ist vielmehr durch Anordnung der Zahlen in Gruppen zu je 3 Ziffern, vom Komma aus gerechnet, mit angemessenem Zwischenraume zwischen den Gruppen zu bewirken.

Obgleich noch nicht reichsgesetzlich geregelt, ist es doch üblich, auch für das Papier ein dezimales Zählmaß, das Papiermaß, in Anwen-

3) Mark und Pfennig kommen in verschiedenen Münzsorten vor: 3 Gold-, 5 Silber-, 3 Nickel- und 2 Kupfermünzen. Eine Goldmünze, das Fünfmarkstück, und eine Silbermünze, das Zwanzigpfennigstück, sollen aber wieder eingezogen werden.

dung zu bringen. Die anfängliche vollständige Einteilung desselben unterschied Ballen, Ries, Buch, Lagen oder Hefte, Bogen; indessen hat sich seitdem herausgestellt, daß die Bezeichnungen Ries und Bogen vollständig ausreichen, und demgemäß haben mehrere Einzelregierungen (z. B. Preußen und Sachsen) auch entschieden.[4])

Neben den dezimalen giebt es in Deutschland noch immer eine ziemliche Anzahl nicht dezimaler Maße. Es sind das die Zeit-, Zähl- und Winkelmaße. Zu den Zeitmaßen gehören: Jahr, Monat, Woche, Tag, Stunde, Minute und Sekunde; zu den Zählmaßen: Gros, Dutzend, Stück und Schock, Mandel, Stück, abgesehen von mehreren andern, nur noch vereinzelt vorkommenden; zu den Winkelmaßen: Grad (^{0}), Minute ($'$) und Sekunde ($''$).

Nicht ganz umgehen lassen sich die Münzen, Maße und Gewichte der wichtigsten außerdeutschen Staaten, z. B. diejenigen Frankreichs, Englands, Rußlands, Österreichs, Italiens, Nordamerikas u. s. w. Und so ist das Gebiet der benannten Zahlen jedenfalls auch heute noch ein sehr umfängliches, nur nach und nach durch den Unterricht zu bewältigendes.

Ordnet man die unbenannten ganzen Zahlen so an, daß jede nächste Zahl eine Einheit mehr enthält als die vorhergehende, so entsteht die natürliche Zahlreihe. Dieselbe ist endlos. Um aber gleichwohl mit wenig Wörtern und Zeichen (Ziffern) alle Zahlen angeben zu können, hat man ein System, das Dezimalsystem, angenommen. Nach demselben werden je zehn Einer als ein Zehner, je zehn Zehner als ein Hundert, je zehn Hunderte als ein Tausend, je tausend Tausende als eine Million, je million Millionen als eine Billion, je million Billionen als eine Trillion u. s. f. betrachtet. Da nun das deutsche Zahlwort „zehn" in der griechischen Sprache „deka", in der lateinischen „decem" heißt, so wird das zehnteilige Zahlsystem (Zehnersystem) entweder dekadisches Zahlsystem oder Dezimalsystem genannt.

Jede Zahl wird einerseits durch ein Zahlwort, anderseits durch eine oder mehrere Zahlzeichen (Ziffern) ausgedrückt. Die unendlich vielen Zahlwörter setzen sich aus nur dreizehn einfachen Zahlwörtern zusammen, nämlich aus: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, hundert, tausend und million.[5])

Geschrieben werden alle Zahlen mit Hilfe von zehn Zahlzeichen, nämlich neun eigentlichen Ziffern (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) und einer Hilfsziffer (0). Während aber die Buchstaben unseres Alphabets (a, b, c, d . . .) nur Lautzeichen sind, treten die Ziffern gleich als Wortzeichen auf.

4) Ministerialverordnung für Preußen vom 25. Februar 1887. Vergl. Centralblatt 1887, S. 324.

5) Die Zahlwörter elf, zwölf, zwanzig, dreißig . . . neunzig sind nur scheinbar einfach. Denn elf ist eine Zusammenziehung von ein-lif (im Gotischen ainlif), zwölf von zwei-lif (im Gotischen tvalif), wobei „lif" jedenfalls die Bedeutung von „zurücklassen" (im Englischen leave) hat, während in zwanzig, dreißig u. s. w. das „zig" soviel wie zehn bedeutet.

Durch die Verbindung von Buchstaben gelangt man zur schriftlichen Darstellung von Wörtern; durch die Zusammenstellung von Ziffern aber (abgesehen von zehn, hundert, tausend, million) zur Darstellung zusammengesetzter Zahlwörter. Es ist z. B. 3759 eine einzige Zahl, das Zeichen für ein zusammengesetztes Zahlwort, und 3, 7, 5, 9 sind die Ziffern (nicht Zahlen), mittels welcher diese Zahl dargestellt wird. Durch die Zahlzeichen 1, 2, 3 . . . 9, mögen dieselben nun allein stehen oder in Verbindungen vorkommen, werden stets soviele Einheiten, als ihr Name besagt, bezeichnet; die Null hingegen zeigt an, daß keine Einheiten an der Stelle, wo sie steht, vorhanden sind. Getreu ihrem Ursprunge[6]) stehen die Ziffern, welche Einheiten höherer Ordnungen bezeichnen sollen, links, ein Umstand, welcher den Anfängern im Rechnen mehr zu schaffen macht, als man gewöhnlich annimmt. Steht eine der Ziffern 1, 2, 3 . . . 9 für sich allein, so bezeichnet sie schlechthin Einheiten oder Einer; wird eine zweite Ziffer links daneben (davor) gesetzt, so bezeichnet diese Einheiten von zehnfacher Größe oder Zehner u. s. f. Umgekehrt kann man sagen, daß jede weiter rechts stehende Ziffer Einheiten niederer Ordnungen bezeichnet. Setzt man daher eine Ziffer rechts neben eine nur Einer bezeichnende Ziffer, so bedeutet auch diese Einheiten, deren Wert den zehnten Teil von dem Werte der vorhergehenden Einheiten beträgt, also Zehntel u. s. f. Dem Unterschiede, welcher hier jedenfalls in der Darstellung vorliegt, wird dadurch Rechnung getragen, daß man die Einheiten, welche entstehen, wenn man von den Einern aus wiederholt mit Zehn vervielfacht, dekadische Einheiten, hingegen die Einheiten, welche entstehen, wenn man von den Einern aus wiederholt durch zehn teilt, dezimale Einheiten nennt. Da in beiden Fällen Einheiten derselben Art, nämlich Einer, den Ausgangspunkt bilden, so erscheint der Einer als Grundeinheit des Zahlsystems. Deshalb ist es auch richtig, die Stelle der Einer bei Zählung der Stellen einer Zahl nicht in Anrechnung zu bringen. Entscheidet man sich aber für diese Auffassung, wie wir es im „Rechenbuche"[7]) gethan haben, dann stehen Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. in der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Stelle vor den Einern (links von den Einern), Zehntel, Hundertstel, Tausendstel u. s. w. in der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Stelle nach den Einern (rechts von den Einern).

Insofern wir hiernach die Zahlen mit Rücksicht auf den Stellenwert der Ziffern anordnen, ist unser Zahlsystem ein Positionssystem. Man kann es aber auch ein Multiplikationssystem nennen, indem ja thatsächlich eine wiederholte Multiplikation der Einheiten mit Zehn stattfindet, um die einzelnen Stellenwerte zu erhalten. Das Zahlsystem der alten Römer dagegen war ein Additions- und Subtraktionssystem.

6) Unsere Ziffern haben sich, wie man jetzt annimmt, aus den Anfangsbuchstaben der altindischen Zahlwörter entwickelt. Nach Westeuropa kamen sie durch die Westaraber, in Osteuropa wurden sie infolge direkter Verbindungen mit den Indern bezw. mit den Ostarabern bekannt. Vergl. S. 10 f.

7) Heft 5, S. 14 (Ausg. A).

Demselben lagen folgende sieben Zahlzeichen, die römischen Ziffern, zu Grunde: I (1), V (5), X (10), L (50), C (100), D (500), M (1000). Davon wurden I, X, C und M wiederholt, wenn Vielfache der Zahlen eins, zehn, hundert und tausend darzustellen waren, z. B. III (3) XX (20), CCC (300), MM (2000); ein minderwertiges Zeichen rechts wies auf eine Addition der zugehörigen Zahl hin, z. B. VII ($5 + 2 = 7$), XIII ($10 + 3 = 13$), XVI ($10 + 5 + 1 = 16$), CL ($100 + 50 = 150$), DCXVI ($500 + 100 + 10 + 5 + 1 = 616$) u. s. f.; ein minderwertiges Zeichen links forderte eine Subtraktion der zugehörigen Zahl, z. B. IV ($5 - 1 = 4$), IX ($10 - 1 = 9$), XIV ($10 + 5 - 1 = 14$), XL ($50 - 10 = 40$), XC ($100 - 10 = 90$) u. s. w. Nur bei M war das nicht immer so; hier vervielfachte auch die vorausgehende (links gesetzte) Ziffer: IIM = 2000; VM = 5000; CM = 100000 u. s. w.

Teilt man die Grundeinheit, den Einer, nicht fortgesetzt nur in zehn, sondern in weniger oder mehr gleiche Teile, bezeichnet einen derselben oder faßt ihrer mehrere zusammen, so gelangt man zu den gebrochenen Zahlen oder Bruchzahlen, auch Brüche (gemeine oder gewöhnliche) genannt. Die gebrochenen Zahlen stehen den ganzen Zahlen gegenüber. Denselben liegen nicht nur wie diesen Einheiten des dekadischen Zahlsystems zu Grunde; denn es ist z. B. $\frac{1}{12}$, die Einheit der Bruchzahl $\frac{7}{12}$, der zwölfte Teil der dekadischen Grundeinheit u. s. w.

Faßt man alle Fälle über die Verwendung der Ziffern zusammen, so ergiebt sich noch eine bemerkenswerte Eigenschaft derselben. Jeder Ziffer kommt ein doppelter Wert zu: ein unveränderlicher (die bestimmte Anzahl der Einheiten) und ein veränderlicher (der Wert der Einheiten) — oder ein absoluter und ein Stellenwert. So bedeutet die Ziffer 5 stets 5 Einheiten; es können diese 5 Einheiten aber nicht nur 5 Einer, 5 Zehner, 5 Hunderter, 5 Tausender u. s. f., sondern auch 5 Zehntel, 5 Hundertstel, 5 Tausendstel u. s. f., ebenso 5 Halbe, 5 Drittel, 5 Viertel u. s. f. sein.

Die Anordnung der Zahlen nach dem Zehnersysteme ist maßgebend für die mündliche und schriftliche Darstellung derselben. Letztere begreift man unter dem Namen Numerieren. Für die Volksschule handelt es sich im wesentlichen um das Numerieren bis Million in ganzen und bis Tausendstel in dezimalen Zahlen. Das schließt natürlich nicht aus, daß das Zahlbildungsgesetz auch darüber hinaus zum Verständnis gebracht wird. Aber innerhalb jener Grenzen muß vollkommene Sicherheit und Geläufigkeit im Schreiben und Lesen der Zahlen herrschen. Daß ein einsichtsvolles schriftliches Rechnen ohne diese Sicherheit und Geläufigkeit nicht erzielt werden kann, folgt ohne weiteres daraus, daß das schriftliche Rechnen ein Rechnen mit dem Stellenwerte der Ziffern ist.

Als dritter bei der Stoffauswahl in Betracht kommender Punkt sind die durch die verschiedenen Rechnungsarten (Operationen) bestimmten Beziehungen der Zahlen untereinander aufgeführt worden. Diese Beziehungen sind im allgemeinen derart, daß man durch sie zu neuen Zahlen gelangt. Denn Rechnen heißt: aus gegebenen Zahlen nach gewissen Gesetzen neue Zahlen ableiten. Die Grundlage des Rechnens unterscheidet sich schließlich nicht von derjenigen der Zahl: das Zählen hat als solche zu gelten. Da es nun nur zwei Hauptarten des Zählens giebt, das Vorwärtszählen und das Rückwärtszählen, so kann es auch nur zwei Hauptrechnungsarten geben: eine Rechnungsart, die sich auf das Vorwärtszählen und eine die sich auf das Rückwärtszählen gründet. Das Vorwärtszählen wollen wir als Zuzählen, das Rückwärtszählen als Abzählen bezeichnen. Beides kann wieder auf doppelter Weise geschehen. Das Zuzählen: entweder sollen zu den Einheiten einer gegebenen Zahl soviele Einheiten gezählt werden, als eine andere beliebige gegebene Zahl deren enthält — das führt zur Addition; oder es sollen zu den Einheiten einer gegebenen Zahl wiederholt soviele Einheiten gezählt werden, als sie deren selbst enthält — das giebt die Multiplikation. Das Abzählen: entweder sollen von den Einheiten einer gegebenen Zahl soviele Einheiten abgezählt werden, als eine andere beliebige (kleinere) Zahl deren enthält — das führt zur Subtraktion; oder es sollen von den Einheiten einer gegebenen Zahl wiederholt und so oft als möglich soviele Einheiten abgezählt werden, als eine andere gegebene Zahl deren enthält — das giebt die (eine Form der) Division. Sonach haben wir es mit vier Arten oder Spezies des Rechnens zu thun. Der sich weiterhin noch ergebende Potenzbegriff mit seinen beiden Umkehrungen gehört nicht zum Volksschul-Lehrstoffe.

In jeder der vier Grundrechnungsarten sind gegebene und gesuchte Zahlen zu unterscheiden. Es müssen in jedem Falle mindestens zwei Zahlen gegeben sein; dieselben bilden den wesentlichen Inhalt der Aufgabe; die gesuchte Zahl bringt die Lösung. Die gegebenen Zahlen der Addition heißen Summanden; die gesuchte Zahl ist die Summe.[8]) In jeder Subtraktionsaufgabe sind Minuend und Subtrahend gegeben; gesucht wird die Differenz oder der Rest. In der Multiplikation treten Multiplikand und Multiplikator als gegebene Zahlen auf; dieselben führen den gemeinschaftlichen Namen Faktoren. Die gesuchte Zahl heißt Produkt. Die Division endlich bringt als gegebene Zahlen Dividend und Divisor, als gesuchte Zahl den Quotient.[9])

Da es dreierlei Zahlen, nämlich ganze, dezimale und gebrochene giebt, überdies auch noch benannte und unbenannte (konkrete und abstrakte), so treten als besondere Fälle für jede der vier Grundrechnungsarten folgende auf: Rechnen mit 1) ganzen, 2) dezimalen und 3) gebrochenen Zahlen, in jedem Falle wieder mit den beiden Unterabteilungen: a) unbenannte und b) benannte Zahlen. Auch ist zwischen

8) Die erste gegebene Zahl führt in der Arithmetik den Namen Augend, die zweite Addend. Doch nennt man auch beide zusammen Addenden, beziehentlich Aggreganden.

9) Verdeutschungen sind hier der Kürze halber absichtlich vermieden worden; dieselben folgen weiter unten.

Kopf- und Tafelrechnen oder mündlichem und schriftlichem Rechnen zu unterscheiden. Letzteres ist ein Rechnen mit dem Stellenwerte der Ziffern und kommt überall dann zur Anwendung, wenn es sich um größere Genauigkeit und Übersichtlichkeit der Rechnung handelt, namentlich aber bei großen Zahlen. Ersteres berücksichtigt stets den vollen Wert der Zahlen und gestattet dem Schüler durchaus Freiheit in der Aufeinanderfolge der einzelnen Operationen, sowie in der Anwendung von Rechenvorteilen. Das Kopfrechnen hat es vorwiegend mit kleinen Zahlen zu thun. Es ist Denkrechnen, während das Tafelrechnen Regelrechnen ist. Kopf- und Tafelrechnen sollen in enge Beziehung zu einander treten. Das Kopfrechnen soll dem Tafelrechnen vorausgehen, indem es unter Benutzung kleiner, bezw. bequemerer Zahlen das Verständnis einer neuen Rechnungsart erschließt. Das Kopfrechnen soll aber auch bei schriftlichen Lösungen unmittelbar eingreifen, indem der Schüler einzelne Operationen durch dasselbe zu Ende führt, sofort das betreffende Resultat niederschreibt, und danach erst das rein schriftliche Verfahren weiter fortsetzt.

Wenn nicht schon beim Rechnen mit unbenannten Zahlen zwei Formen der Division, Messen und Teilen, unterschieden worden sind, so muß dieses doch beim Rechnen mit benannten Zahlen geschehen. Denn es ist nicht gleichgiltig, ob man 12 ℳ : 4 = 3 ℳ oder 12 ℳ : 4 ℳ = 3 hat. Ersteres ist Teilen, letzteres Messen.

Als eine Fortsetzung der Multiplikation tritt beim Rechnen mit benannten, insbesondere mehrfach benannten Zahlen das Resolvieren, im „Rechenbuche“ Erweitern und Einrichten genannt, auf.[10]) An derselben Stelle erscheint als eine Fortsetzung der Division das Reduzieren, im „Rechenbuche“ Heben oder Kürzen genannt. Beide Operationen haben es mit Sortenverwandlungen zu thun. Während aber beim Resolvieren die Verwandlung höherer Sorten in niedere die Aufgabe bildet, handelt es sich beim Reduzieren um den umgekehrten Fall. Als eine Verbindung der Multiplikation mit der Division tritt später die Schlußrechnung, gewöhnlich Regeldetri genannt, auf. Dieselbe kann, je nachdem, verschiedene Formen annehmen. Als wichtigste derselben darf jedenfalls die Prozentrechnung bezeichnet werden. Andere Formen werden durch die Namen Vielsatz oder zusammengesetzte Schlußrechnung, sobald mehr als drei Glieder vorkommen, Gesellschaftsrechnung, wenn gewisse Ganze nach bestimmten Verhältnissen geteilt werden sollen, Durchschnittsrechnung und Mischungsrechnung, wenn für mehrere Größen das arithmetische, bezw. geometrische Mittel gesucht werden soll, Zinsrechnung, wenn Geldzinsen, Kapitalien, Zinsfüße und Verzinsungszeiten in Frage kommen u. dgl. m. bezeichnet.

Auf eine Reihe besonderer Operationen führt die Rechnung mit Bruchzahlen. Zunächst kommen in Betracht das Erweitern und Kürzen (Heben) der Bruchzahlen, sodann das Einrichten gemischter Zahlen

10) Vergl. Heft 4, Abschnitt 9 (Ausg. A).

und das Verwandeln unechter Bruchzahlen in ganze oder gemischte Zahlen, endlich — bei der Addition und Subtraktion ungleichnamiger Bruchzahlen — das Aufsuchen des Hauptnenners (auch Generalnenner genannt), sowie das Gleichnamigmachen. Sollen die Beziehungen zwischen Dezimal- und Bruchzahlen Berücksichtigung finden, so schließen sich noch an: 1) das Verwandeln der Bruchzahlen in Dezimalzahlen und 2) das Verwandeln der Dezimalzahlen in Bruchzahlen.

In jeder der vier Grundrechnungsarten treten uns solche Rechenstoffe entgegen, welche unmittelbarer, schneller und sicherer als alle andern reproduziert werden müssen, wenn es zur Rechenfertigkeit kommen soll. Dazu zählen wir in erster Linie das sogenannte kleine Einsmaleins und kleine Einsdurcheins, also die kleinen Reihen in Multiplikations- und Divisionsform, wie sie unser „Rechenbuch" aufführt,[11]) sodann die Zehnerreihen, ebenfalls in Multiplikations- und Divisionsform. Nicht geringern Wert legen wir aber auch darauf, daß die Addition je zweier Grundzahlen, das sogenannte Einsundeins, sowie die Subtraktion, insoweit sie die Umkehrung der ebenerwähnten Addition ist, das sogenannte Einsvoneins, ohne alle Abstraktion und Reflexion sofort reproduziert werden. Dabei muß das Einsundeins sowohl, als auch das Einsvoneins auf die wichtigsten Übergangspunkte innerhalb unseres Zahlsystems, also z. B. auf die Übergänge aus einem Zehner in einen andern und aus einem Hunderter in einen andern, mit übertragen werden.

Um zu erfahren, ob eine Lösung „richtig" sei, giebt es zwei Mittel: man rechnet die Aufgabe noch einmal durch, oder man untersucht, ob die Lösung gewissen Bedingungen, von denen ihre Richtigkeit abhängt, entspricht. Im letztern Falle macht man, wie der übliche Ausdruck lautet, die Probe. Auch die Volksschule darf nicht versäumen, in dieser Weise zu verfahren, wenn es sich bei ihr auch nur um einfache Proben handeln kann. Ebensowenig darf die Volksschule darauf verzichten, leichtverständliche und vielfach anwendbare Rechenvorteile heranzuziehen.

Fügen wir dem allen noch hinzu, daß außer den einfachen Rechenaufgaben schon von vornherein zusammengesetzte vorkommen dürfen, d. h. Aufgaben, in welchen dieselbe Operation wiederholt anzuwenden ist, oder in denen verschiedene Operationen zusammentreffen, berücksichtigen wir endlich, daß es eingekleidete und nichteingekleidete Aufgaben giebt,[12]) so haben wohl alle wesentlichen mit den Zahlen vorzunehmenden Operationen, Grundrechnungsarten und abgeleitete Rechnungsarten, die in der Volksschule in Betracht kommen können, Erwähnung gefunden.

Es bleibt nach diesem nur noch der vierte Punkt übrig: die Anwendung der Zahlen auf die Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens, also das praktische Rechnen. Was die Verhältnisse der Natur betrifft, so sagt Ziller im Anschlusse an Bartholomäi: „Die

11) Insbesondere im zweiten Hefte (Ausg. A).
12) Vergl. Heft 1, S. 10 (Ausg. A).

Mathematik ist die formale Seite der Naturwissenschaft. Zahl, räumliche Gestalt und Bewegung, diese mathematischen Grundformen, kommen in der That bei allen Naturgegenständen und Naturerscheinungen vor, und diese können nicht scharf und deutlich aufgefaßt werden, wenn nicht zugleich gezählt, gemessen und gewogen, wenn nicht Gestalt und Bewegung genau bestimmt, wenn nicht das Formale der Art mindestens nach dem Mehr und Weniger, Größer und Kleiner, Näher oder Ferner u. s. w. sorgfältig geschätzt wird." [13]) Wenn also in der Naturkunde, Erdkunde und Geschichte irgend etwas sich zeigt, was berechnet werden kann, so muß erwogen werden, ob es heranzuziehen sei. Entscheidend ist dabei, mit Fröbel zu reden, das Vorhandensein eines gewissen Bedürfnisses, nämlich eines Bedürfnisses des Schülers, die Sachverhältnisse mit Hilfe der Zahlen immer klarer und deutlicher zu erfassen. „Wie im Leben überhaupt Zahlvorstellungen und Zahlverhältnisse nie für sich vorkommen, sondern stets nur in Verbindung mit Vorstellungen sachlichen Inhalts irgend einer Art: so kann darüber wenigstens kein Zweifel obwalten, daß der Rechenunterricht auf beides, auf Zahl und Sache, auf Zahlverhältnisse und sachliche Verhältnisse sich erstrecken müsse, und daß er daher nicht bloß die Aufgabe habe, den Kindern Zahlvorstellungen und Zahlverhältnisse zum Verständnisse zu bringen, und sie anzuleiten, selbständig neue Zahlvorstellungen und Zahlverhältnisse durch Ableitung von schon vorliegenden zu bilden; sondern daß er auch die Aufgabe habe, den Kindern eine vorbereitende Kenntnis von allen Dingen und sachlichen Verhältnissen zu verschaffen, auf welche im Leben die Zahlen und Zahlverhältnisse in Beziehung gesetzt werden." [14]) Und bei Jänicke heißt es: „Der rationelle Rechenunterricht muß allerdings seine Pfahlwurzeln in den Boden der Praxis senken und den Schüler für den Rechenverkehr des Lebens ausrüsten. Er muß daher seine Aufgaben vorzugsweise den thatsächlichen Lebensverhältnissen entlehnen, dem Markte und der Werkstatt, dem Verkaufsladen und der Handelswelt, dem Ackerbau und der Viehwirtschaft, dem Wirtschafts- und Schuldbuch, der Haushaltung und dem Gemeindewesen u. s. w." [15]) Hier ist insbesondere von den Verhältnissen des Menschenlebens die Rede, und es führt die Anwendung der Zahlen auf diese zum eigentlichen praktischen Rechnen. Wenn Jänicke aber hinzufügt: „Er (der Rechenunterricht) darf nie dem gewöhnlichen Nützlichkeitsprinzip geopfert und in jene materialistische Richtung getrieben werden, die als ‚unpraktisches Zeug' über Bord wirft, was sich nicht in klingende Münze umsetzen oder als Milchkuh ausbeuten läßt" — so ist das ganz derselbe Standpunkt, den wir für unser „Rechenbuch" in Anspruch nehmen dürfen, wenn wir im ersten Begleitworte zu demselben sagten: „Der Rechenunterricht soll durchaus praktisch sein, das ist auch unsere Meinung; aber wir nennen nur den Rechenunterricht einen praktischen, der die geistige Natur des Kindes in erster Linie berücksichtigt." Die

13) Allgemeine Pädagogik S. 220.
14) Goltzsch a. a. O. S. IX.
15) Jänicke a. a. O. S. 173.

Anwendung der Zahlen auf die Verhältnisse der Natur wird dem Kinde im Bereiche der vier Grundoperationen immer nahe liegen, sobald es nur diese Verhältnisse selbst richtig aufzufassen vermag. Die Verhältnisse des Menschenlebens hingegen wollen erlebt sein, nicht nur, um genügend verstanden zu werden, sondern um überhaupt zu interessieren. So hat das Kind gewiß Interesse und Verständnis für einfache Einkaufsrechnungen, welche sich auf die gewöhnlichsten Lebensbedürfnisse — Nahrung, Kleidung, Wohnung — beziehen. Es wird sich aber nicht angezogen fühlen von zusammengesetzten kaufmännischen Berechnungen, Wechsel-, Termin- und ähnlichen Aufgaben. Dagegen erfaßt es wieder recht gut den Wert des Geldes und steht z. B. den an die Sparkasse sich anschließenden Rechnungen sehr sympathisch gegenüber. Auch gewisse Zeitrechnungen können auf gute Anknüpfungspunkte beim Kinde rechnen. Sehr gern läßt es sich ferner in die Verkehrsverhältnisse, welche bei Post und Eisenbahn herrschen, einführen. Ebenso interessiert es sich für Ausmessung von Längen, Flächen und Körpern, nicht minder für Gewichtsbestimmungen u. dgl. m.

§ 19.

Verteilung des Lehrstoffs.

Litteratur. Bräutigam, H. Methodik 2c. Göpfert, E. Der Rechenunterricht 2c. Hartmann, B. Analyse des kindlichen Gedankenkreises. 2. Aufl. Annaberg, Graser. 1890. Hartmann-Ruhsam. Rechenbuch für deutsche Stadt- und Landschulen. Ausgaben A. B. C. D. Frankfurt a. M. und Leipzig 1893. Hartmann-Ruhsam. Lehrerheft zum Rechenbuche für deutsche Stadt- und Landschulen. Enthaltend Auflösungen der Aufgaben des Rechenbuches nebst zahlreichen Übungen, Stoffplänen, sachlichen und methodischen Bemerkungen zum Rechenunterrichte überhaupt. Frankfurt a. M. und Leipzig 1892. Hausmann, K. Enthaltensein oder Messen? (Im 25. Jahrb. des Vereins für wiss. Päd.) Dresden 1893. Hollenbach. Der Rechenunterricht im ersten Schuljahre. (In Reins Päd. Studien.) Dresden 1887. Just, K. Das Rechnen im ersten Schuljahre. (Im 9. Jahrb. des Vereins für wiss. Päd.) Langensalza 1877. Leipziger Seminarbuch. 3. Aufl. Herausg. Max Bergner. Dresden 1886. Räther, H. Theorie und Praxis des Rechenunterrichts. Breslau 1891. Splittegarb, E. Eine Kritik 2c. Rein, Pickel und Scheller. Schuljahre. Teupser. Das Rechnen im zweiten Schuljahre. (Im 21. Jahrb. des Vereins für wiss. Päd.) Dresden 1889. — Hierüber: Die in § 16 aufgeführten methodischen Handbücher und Rechenbücher.

Die Verteilung des im vorhergehenden Paragraphen ausgewählten Rechenstoffes ist in erster Linie von dem dem Volksschulrechenunterrichte überhaupt gesteckten Ziele, in zweiter Linie von der Gliederung der Schule und der Entwickelungsstufe der Kinder, um welche es sich im einzelnen Falle handelt, abhängig zu machen. Denn wenn das Ziel sicher erreicht werden soll, so muß nicht nur auf jeder Klassenstufe, sondern in jedem Schuljahre ein bestimmter Schritt nach dem Ziele zurückgelegt werden. Da unter normalen Verhältnissen die Kraft des Kindes in jedem Schuljahre wächst, so ist es zweckmäßig, die Verteilung vorerst nur mit Rücksicht auf die einzelnen Schuljahre und nicht sofort für ein-, zwei-, drei- u. s. w. stufige Schulen vorzunehmen. Jede Verteilung der letztern Art kann sich dann auf jene stützen, erscheint also als einzelner Fall in einer Reihe besonderer Fälle. Für alle Verteilungen aber wird es sich als zweckmäßig erweisen, den bereits für die Auswahl des Rechenstoffes eingehaltenen vier Gesichtspunkten nachzugehen. Dabei verdient der vierte Punkt, Anwendung der Zahlen und Zahlverknüpfungen auf die Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens, insofern besondere Beachtung, als er zugleich auf die wichtigsten Ausgangspunkte des Rechenunterrichts, die Sachen, hinweist.

a) Das erste Schuljahr.

Fachziel: Die Zahlreihe 1 bis 10. (Die vier Grundrechnungsarten innerhalb derselben.)[1])

Zuerst sind die Zahlen der Reihe zu gewinnen. Denn die meisten der eintretenden Kinder können wohl bis zehn zählen, die Zahlbegriffe aber ermangeln bei fast allen noch der Klarheit und Deutlichkeit.[2]) So behandeln wir jede Zahl auch zunächst für sich (als Zahlindividuum). Das giebt, weil in diesem Schuljahre nur die grundlegende Zahlreihe 1 bis 10 in Betracht kommt, zehn methodische Einheiten. Wir bringen deren aber zwölf, weil wir die letzte Einheit in zwei zerlegen und vorher eine Einheit, welche der Einführung der Ziffern dient, einschalten. Die Zahlen werden durch Zählen gewonnen. Gezählt werden zuerst nur Sachen, die der unmittelbaren Anschauung des Kindes zugänglich sind, weiterhin auch Vorstellungen, die dem Gedankenkreise aller Kinder angehören. Bei allen Sachen und Vorstellungen aber muß das stoffliche Interesse bald soweit zurücktreten, daß die Zahlbildung nicht beeinträchtigt wird. Und noch mehr als dieses. Es dürfen nur solche Sachen und Vorstellungen herangezogen werden, deren Auffassung durch das Zählen dem Kinde näher liegt als jede andere Auffassung.

Nach diesem erfolgt eine Übertragung der Ausgangsobjekte auf das Lehrmittel, bei uns den Tillichschen Rechenkasten, bis schließlich die unbenannte (abstrakte) Zahl selbst an die Reihe kommt. Man könnte ja gleich mit dem Tillichschen Rechenkasten beginnen, wie es z. B. Göpfert, Bräutigam und Schneyer thun; aber das Interesse des Kindes ist ein ungleich regeres, sobald ihm bekannte und liebgewordene Sachen oder Vorstellungen den Ausgangspunkt bilden. Das Lehrmittel tritt als Zwischenmittel, gleichsam als halbfertige Vorstellung der Zahl, besser erst nach denselben auf. Es überträgt sich dann das Interesse von den Sachen auf das Lehrmittel und von diesem auf die Zahl. Und so ist es jedenfalls auch richtig.

Auf diese Weise gewinnt man jede der Zahlen 1, 2, 3 . . . 10 einzeln.

1) Vergl. Rechenbuch, Heft 1, Stufe 1 (Ausg. A).

2) Von 1312 der in die Annaberger Schulen eintretenden sechsjährigen Kleinen konnten 861 bis zehn zählen, also 66 %. Vergl. Hartmann, Analyse des kindlichen Gedankenkreises a. a. O. S. 67.

Man gewinnt sie zugleich aber auch in einer bestimmten Aufeinanderfolge, indem sich eine der andern anreiht und so die Zahlreihen 1—2, 1—3, 1—4 .... 1—10 entstehen. Der mündlichen Darstellung jeder Zahl folgt die schriftliche, doch innerhalb der fünf ersten methodischen Einheiten nicht sofort diejenige durch die Ziffer. Hier wird mit einer Zeichnung (Quadrat als Würfelbild) begonnen. Erst von der sechsten Einheit ab folgt eine Verbindung von Zeichnung und Ziffer, und ganz zuletzt erst wird die Ziffer ausschließlich in Gebrauch genommen.

Jede der zwölf methodischen Einheiten bringt sodann eine Rechenoperation, und auch hierin zeigt sich ein stetiger Fortschritt. Nachdem in der ersten Einheit die Zahleinheit, die Eins, aufgefaßt worden ist, folgt in der zweiten Einheit das Zu- und Abzählen der Eins, also 1 + 1, 2 — 1 und 1 — 1 (am Rechenkasten und in Zeichnungen). Die dritte Einheit bringt die Reihenfolge der Zahlen (Vor- und Rückwärtszählen: 1, 2, 3; 3, 2, 1); die vierte Einheit enthält das Abschätzen des Mehr oder Weniger (welche Zahl mehr oder weniger Einsen hat als eine andere); die fünfte Einheit lehrt die Unterscheidung größerer und kleinerer Zahlen (2 ist größer als 1, 1 ist kleiner als 2 2c.); die sechste Einheit führt die Ziffern für die Zahlen 1 bis 5 ein; die siebente Einheit bestimmt, wieviel größer oder kleiner eine Zahl als eine andere ist; die achte Einheit lehrt das Zu- und Abzählen von 1 bis 7; die neunte Einheit bringt das Malnehmen; die zehnte Einheit lehrt das Messen ohne und mit Rest; die elfte und zwölfte Einheit berücksichtigen die vier Grundrechnungsarten innerhalb der ganzen Zahlreihe. Was an Rechenoperationen gewonnen wird, das wird in den nachfolgenden Einheiten herangezogen. Dadurch gestaltet sich der Rechenstoff immer reicher.

Unerfindlich ist es, wie manche Rechenmethodiker immer wieder behaupten können, dem Kinde liege der Begriff des „Teilens" näher als der des „Messens". So schreibt z. B. Hollenbach: „Das Teilen liegt dem Kinde geistig näher; ihm bringt es in seinen Erfahrungen Verständnis und Teilname entgegen. Wort und Sache sind ihm nicht fremd, es hat vielfach teilen sehen, es hat selber schon geteilt. Im Worte ‚enthaltensein' kann eine Schwierigkeit nicht bestehen, denn es läßt sich durch das den Kindern wohlverständliche Wort ‚darinstecken' (sic) ersetzen, die Schwierigkeit liegt in der Sache. Zwar ist dem Kinde aus der Erfahrung bekannt, daß eine Größe in einer andern stecken kann, aber das Wichtigste, nämlich die Vorstellung davon, daß eine Größe in einer ihr kongruenten steckt, liegt nicht in seinem Erfahrungsschatze, kann ihm auch gar nicht in der Anschauung zufließen ..." [3]) Das Gegenteil davon ist richtig. Denn während beim „Messen" dem Kinde die unmittelbare Anschauung (zumal, wenn Tillichs Rechenkasten das Lehrmittel ist) leicht geboten werden kann, hat es das Teilen stets mit einer abstrakten Zahl (im Divisor) zu thun. Wohl sagt man, was uns nicht unbekannt ist, „2 Kin-

3) Hollenbach in Reins Päd. Studien a. a. O. S. 195.

der teilen sich in 6 Äpfel“ und meint, das sei unmittelbare Anschauung, sofern man nur die Sache selbst ausführen lasse. Aber hat man es hier wirklich mit dem „Teilen“ zu thun? Ist es nicht vielmehr ein „Verteilen“? Ja, beruht nicht die ganze behauptete Anschaulichkeit schließlich darauf, daß das Kind sieht, daß 3 Äpfel von 6 Äpfeln 2 mal weggenommen werden können, daß die Division also in Wirklichkeit die Form des Messens (Enthaltenseins) annimmt? Sicher ist es so. Und es kann das auch nicht überraschen, sobald man sich klar darüber geworden ist, daß die Division in der Form des „Teilens“ notwendig als Umkehrung der Multiplikation gedacht werden muß, während die Division als „Messen“ (oder Enthaltensein) zugleich als eine fortgesetzte Subtraktion aufgefaßt werden darf. Ist hiernach aber das „Messen“ (Enthaltensein) die leichtere, weil eine unmittelbare Anschauung zulassende Divisionsform, so bietet auch die Division mit Rest, welche einige Rechenmethodiker für die Zahlreihe 1 bis 10 ebenfalls ablehnen, keine Schwierigkeiten mehr. Indem wir nämlich jede größere Zahl durch jede kleinere messen, stoßen wir ungesucht auf die Restdivision und vermehren damit die Zahl der wertvollen Reihen um eine weitere. Dagegen müssen wir die Einführung der Bruchzahlen für das erste Schuljahr entschieden ablehnen. Den Bruchzahlen liegen andere als dekadische Einheiten zu Grunde, das Kind aber hat gerade genug zu thun, um sich klare und deutliche Vorstellungen von den ganzen, d. h. den auf die dekadische Einheit gegründeten Zahlen zu erwerben. Warum also der Befestigung dessen, was vor allem not thut, durch Einführung eines neuen Begriffs hinderlich sein? Nötigt die „häufige Anwendung im Leben“, welche Halbe, Drittel und Viertel erfahren, wirklich dazu, dieselben schon bei der ersten Behandlung des ersten Zehners heranzuziehen? Was alles müßte dann im ersten Schuljahre herangezogen werden! [4])

Wie für das Kind bekannte Sachen und Vorstellungen für jede methodische Einheit den besten Ausgangspunkt bilden, so bilden dieselben Sachen und Vorstellungen auch den besten Abschluß. Nur in ganz anderer Weise. Am Anfange dienen sie dazu, das Interesse der Kinder für die Zahl zu wecken, fortzuleiten und zu erhalten, am Ende sollen die erarbeiteten Rechenoperationen auf sie angewandt werden. Das giebt jedesmal eine Reihe von „eingekleideten“ und „angewandten“ Aufgaben. Erst dann, wenn das Kind diese klar aufzufassen und sachlich und sprachlich richtig zu lösen vermag, kann die betreffende methodische Einheit als erledigt betrachtet werden. In nicht wenigen Rechenbüchern begegnen uns für das erste Schuljahr nur nackte Zifferaufgaben. Wer nichts weiter thut, als solche

---

4) Es bleibt also bei dem im ersten „Begleitworte“ zum „Rechenbuche“ Gesagten: „Wir meinen, daß die häufig anzutreffende beliebte Kuchen-, Apfel- u. s. w. Teilerei in der Zahlreihe 1—10 (im ersten Schuljahre) nur den Schein der Anschaulichkeit für sich hat, daß sie für das spätere Rechnen mit Bruchzahlen nahezu, wenn nicht ganz wertlos ist, daß überhaupt jede ausgedehntere Anwendung der Bruchzahlen auf der Unterstufe gegenüber den Vorteilen, die sie bringen soll, ein viel zu großes Zeitopfer beansprucht u. dgl. m.“

Aufgaben lösen läßt, der verzichtet nicht nur auf die wichtigste, sondern auch auf die angenehmste und dankbarste Partie des Rechenunterrichts im ganzen ersten Schuljahre. Auf die wichtigste, denn alles Rechnen, auch das auf der Unterstufe, hat in der Anwendung auf die Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens seinen Abschluß zu finden; auf die angenehmste und dankbarste, denn hier nimmt das Interesse der Kinder stets einen erneuten Aufschwung, wenn es während der Beschäftigung mit den unbenannten (abstrakten) Zahlen erlahmte.

Welches sollen aber die Sachen bez. Vorstellungen, die im Rechenunterrichte des ersten Schuljahres heranzuziehen sind, sein? Darüber gehen die Ansichten noch auseinander. Mehrere der Herbart-Zillerschen Richtung angehörende Pädagogen fordern mit aller Strenge, es müsse von Objekten, die im Sachunterrichte vorher behandelt worden seien, ausgegangen werden, und stellen z. B. die Sachgebiete des Zillerschen Märchenunterrichts in den Vordergrund.[5]) Wir zweifeln nicht, daß die Kinder diesen Sachgebieten auch im Rechenunterrichte ihr Interesse zuwenden werden. Indessen erledigt sich doch wohl die Heranziehung derselben sofort, wenn von einer Behandlung der betreffenden Märchen ganz oder auch nur teilweise abgesehen wird bez. werden muß. Denn da hier die Märchen Träger von nicht allgemein bekannten Sachgebieten sind, so verschwinden einige der letztern zugleich mit ihnen, oder sie treten an anderer Stelle auf. Beides frommt dem Rechenunterrichte nicht. Auch gewinnt die ganze Richtung dann ein anderes Aussehen, wenn gefordert wird, daß die herangezogenen Sachen nicht etwa nur gezählt werden können, sondern zum Zählen und Rechnen entschieden hindrängen. Demgegenüber dürften die Sachgebiete, welche in unserm „Rechenbuche" die Ausgangspunkte bilden, allen billigen Anforderungen entsprechen[6]). Es sind dieses, in der Reihenfolge der methodischen Einheiten genommen, folgende:

1. Der Rechenkasten (von Tillich). 2. Vom Schulkinde. 3. Die Fenster des Schulzimmers. 4. Die Wände des Schulzimmers. 5. Die Finger der Hand. 6. Die Ziffern. 7. Die Schulwoche. 8. Die sieben Wochentage. 9. Die Stundenschläge der Uhr. 10. Das Kegelspiel. 11. Die kleinen Geldsorten. 12. Allerlei Einkäufe.

Das Vorstehende kurz zusammengefaßt, ergeben sich für die Verteilung des Rechenstoffes im ersten Schuljahre folgende Gesichtspunkte:

1) Das Zahlgebiet ist die grundlegende Zahlreihe 1 bis 10.

2) In zehn methodischen Einheiten werden die Zahlen nach je vier Seiten hin behandelt:

5) So Just im Jahrbuche des Vereins f. w. Päd., Jahrg. 1877, und nach ihm die Verfasser der „Schuljahre" im Ersten Schuljahre, 3. Aufl., S. 154. Beide beginnen nach Maßgabe des „Leipziger Seminarbuchs" den ersten Rechenunterricht übrigens gleich mit der Zahl drei. Im „Ersten Schuljahre" heißt es dabei S. 155: „Ziel. Wir wollen ausrechnen, wieviel es Leute gab im Hause des Sternthalermädchens, als Vater und Mutter noch lebten."

6) Vergl. S. 194.

a) als Individuen;
b) als Glieder einer Reihe;
c) nach den Bestimmungen gewisser Rechenoperationen, die schließlich in Form der vier Grundrechnungsarten auftreten;
d) in ihrer Anwendung auf einfache Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens.

3) Es ist bei jeder Zahl von einem allen Kindern bekannten Sachgebiete auszugehen. Das Lehrmittel (der Tillichsche Rechenkasten) hat die Bedeutung eines Zwischenmittels, durch welches man zur unbenannten (abstrakten) Zahl gelangt.

4) Nur ganze Zahlen werden behandelt; selbst die Bruchnamen bez. Bruchformen in ihrer Anwendung auf ganze Zahlen sind fern zu halten.

5) Die Division tritt ausschließlich in der Form des Messens auf und wird (um der unmittelbaren Anschauung willen) von der Subtraktion in ähnlicher Weise wie die Multiplikation von der Addition abhängig gemacht.

6) Die schriftlichen Darstellungen beginnen mit Zeichnungen, zu denen sich erst von der sechsten Einheit ab die Ziffern gesellen, bis letztere schließlich das alleinige Darstellungsmittel sind.

b) Das zweite Schuljahr.

Fachziel: Die Zahlreihe 1 bis 100. (Betonung der Addition und Subtraktion.)[7])

Nachdem das Kind im ersten Schuljahre von den Zahlen der grundlegenden Reihe 1 bis 10 klare Vorstellungen erlangte, mit denselben nach Maßgabe der vier Grundrechnungsarten (innerhalb der Reihe) operierte, dieselben auch auf einfache Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens anwandte, darf seine Zahlkenntnis unbedenklich erweitert werden. Dieses geschieht durch die Einführung in die Zahlreihe 1 bis 100. Hier tritt als höhere Einheit der Zehner auf, und es liegt nahe, die Aufmerksamkeit zunächst nur auf diesen und auf dessen Reihe, d. h. die reinen Zehnerzahlen 10, 20, 30 . . . 100, zu lenken. Diese Zehnerzahlen bilden die feste Grundlage und bezeichnen die Abschnitte der Zahlreihe 1 bis 100. Da sie sich zueinander ganz ähnlich verhalten, wie die Einerzahlen der Reihe 1 bis 10, so nimmt ihre Behandlung die Fassungskraft der Kinder nur mäßig in Anspruch und es darf, sobald sie klar aufgefaßt worden sind (was übrigens ohne monographische Behandlung geschehen kann), sofort zu den vier Grundrechnungsarten mit ihnen übergegangen werden. Nächstdem sind die aus Zehnern und Einern zusammengesetzten Zahlen zu erwerben. Doch nicht in einem Zuge, sondern in den durch die Zehnerzahlen gebildeten Abschnitten, damit einerseits des Neuen nicht zuviel auf einmal werde, anderseits die günstige Wirkung, welche durch das

7) Vergl. Rechenbuch, Heft 1, Stufe 2 (Ausg. A).

Auftreten neuer Elemente beim Schüler erzeugt wird, sich möglichst oft wiederhole. Also zunächst Abschnitt 11 bis 20, dann 21 bis 30, 31 bis 40 u. s. w. Soll die Auffassung der neuen Zahlen aber eine möglichst klare und deutliche werden (wozu gehört, daß die Stelle, die ihnen in der Zahlreihe zukommt, scharf bezeichnet wird), dann muß jeder neue Abschnitt auch mit den vorhergehenden Abschnitten zu einem Ganzen vereinigt auftreten. Das will heißen: der Abschnitt 11—20 muß in der Reihe 1—20, der Abschnitt 21—30 in der Reihe 1—30 u. s. w. vorkommen. Auf diese Weise würden der Zehnerreihe noch neun Reihen hinzuzufügen, im ganzen also zehn methodische Einheiten zur Einführung in die Zahlreihe 1 bis 100 aufzustellen sein. Unser Rechenbuch bringt aber auch hier zwölf methodische Einheiten, denn den vorgenannten zehn Einheiten geht noch eine die Reihe 1 bis 10 wiederholungsweise berücksichtigende Einheit voraus und die abschließende, daher hier inhaltreichste Reihe 1 bis 100, wird in zwei Einheiten zerlegt. Dem zweiten Schuljahre werden sonach folgende zwölf methodischen Einheiten zugewiesen:

1) 1 bis 10 (Wiederholung); 2) 10, 20, 30 ... 100 (Zehnerreihe); 3) 1 bis 20; 4) 1 bis 30; 5) 1 bis 40; 6) 1 bis 50; 7) 1 bis 60; 8) 1 bis 70; 9) 1 bis 80; 10) 1 bis 90; 11) u. 12) 1 bis 100.

Jede Einheit hat ihr bestimmtes Sachgebiet und ihren Rechenfall, beziehentlich ihre Rechenfälle. Auf die Sachgebiete ist schon oben hingewiesen worden.[8]) Die Rechenfälle gehören allen vier Grundrechnungsarten an, vorwiegend aber der Addition und Subtraktion. Alle vier Grundrechnungsarten findet man in den beiden ersten Einheiten vertreten, nur Addition und Subtraktion kommen in den übrigen Einheiten vor.

Weil die Addition und Subtraktion der zweistelligen Zahlen eine Anzahl ungleich-schwieriger Rechenfälle bringt, so liegt es nahe, dieselben vom Leichten zum Schweren fortschreitend auf die einzelnen methodischen Einheiten zu verteilen. Das geschieht wie folgt:

a) Die 2. Einheit (Zehnerreihe): Zuzählen und Abzählen der Zehner zu und von Zehnern. Beispiel: $50 + 40$; $90 — 40$.

b) Die 3. Einheit (1 bis 20): Zuzählen und Abzählen der Einer. Beispiel:

$$10 + 5; \quad 15 — 5.$$

c) Die 4. Einheit (1 bis 30): Zuzählen und Abzählen der Zehner. Beispiel:

$$15 + 10; \quad 25 — 10.$$

d) Die 5. Einheit (1 bis 40): Zuzählen und Abzählen gemischter Zahlen. Beispiel:

$$20 + 15; \quad 35 — 15.$$

e) Die 6. Einheit (1 bis 50): Zuzählen und Abzählen der Einer ohne Erreichung eines Zehners. Beispiel:

$$45 + 3; \quad 48 — 3.$$

8) Vergl. S. 194.

f) Die 7. Einheit (1 bis 60): Zuzählen und Abzählen gemischter Zahlen ohne Erreichung eines Zehners durch die Einer. Beispiel:

$45 + 13; \quad 58 - 13.$

g) Die 8. Einheit (1 bis 70): Zuzählen und Abzählen von Einern, welche zum Zehner ergänzen. Beispiel:

$65 + 5; \quad 70 - 5.$

h) Die 9. Einheit (1 bis 80): Zuzählen und Abzählen gemischter Zahlen, deren Einer zum Zehner ergänzen. Beispiel:

$65 + 15; \quad 80 - 15.$

i) Die 10. Einheit (1 bis 90): Zuzählen und Abzählen von Einern, welche den nächsten Zehner überschreiten. Beispiel:

$75 + 8; \quad 83 - 8.$

k) Die 11. Einheit (1 bis 100): Zuzählen und Abzählen von gemischten Zahlen, deren Einer den nächsten Zehner überschreiten. Beispiel:

$75 + 18; \quad 93 - 18.$

Das sind zusammen zehn Rechenfälle. Dieselben schließen alle Möglichkeiten für Addition und Subtraktion innerhalb der Zahlreihe 1 bis 100 in sich.

Jeder Rechenfall wird als Erwerb für immer mit in die nachfolgenden Einheiten hinübergenommen, um dort in einem neuen Zahlgebiete von neuem durchgeübt, beziehentlich angewandt zu werden. Bezüglich der Division ist zu bemerken, daß jetzt beide Formen derselben, Messen und Teilen, auftreten können: das Messen auf der Grundlage der Subtraktion, durch unmittelbare Anschauung gewonnen, Messen und Teilen zugleich als Umkehrungen der Multiplikation mit benannten Zahlen. Doch ist es besser, das Teilen auch hier noch auszuschließen. Auch bleiben noch immer Bruchzahlen und Dezimalzahlen aus denselben Gründen wie im ersten Schuljahre ausgeschlossen.

Mehr noch als auf der ersten Stufe ist die mündliche und schriftliche Darstellung der Zahlen innerhalb des Zahlsystems zu beachten. Die mündliche Darstellung: Der Abschnitt 1 bis 20 bringt eine Reihe von Zahlnamen, deren richtige Erfassung manchen Kindern nicht geringe Schwierigkeiten bereitet. Erst von 21 ab wird die Bildung der Zahlwörter eine einfachere. Wenn aber manche Methodiker Wert darauf legen, daß anfangs „Zig“ anstatt „Zehner“ gesagt werde, so können wir uns diesem Vorgange deshalb nicht anschließen, weil auf der Mittelstufe die Bezeichnung „Zig“ doch wieder fallen gelassen wird, es aber in jedem Falle richtiger ist, gleich das Bleibende zu nehmen, sofern es (wie hier) keine besondern Schwierigkeiten in sich schließt.[9] Die schriftliche Darstellung: Zunächst sind die Zehnerzahlen 10, 20, 30 . . . 100 zu schreiben, dann 11, 12, 13 . . . 19; 21, 22, 23 . . . 29 u. s. w. Die Säulen des Tillichschen Rechenkastens leisten dabei treffliche Dienste. Insbesondere aber gilt es, die Kinder gleich so zu gewöhnen, daß sie die Zahlen stets von links nach rechts schreiben. Übungen im Vorwärts- und Rückwärtszählen in der natürlichen Zahlreihe und mit Weglassung

9) Vergl. Göpfert, Bräutigam und Schneyer a. a. O.

einzelner Zahlen, Schreiben der Zahlen nach Diktat, Lesen des Geschriebenen u. dgl. m. sind weitere hierhergehörige Übungen.

Sachen und Vorstellungen, welche allen Kindern bekannt sind, bilden wieder die Ausgangspunkte der zwölf Einheiten. Mit einigen derselben werden die Kinder vorher im Sachunterrichte bekannt gemacht, andere erfordern eine Behandlung in den Rechenstunden selbst. Zu den letztern gehören unser Geld und unsere Maße. Unser Geld: Mark und Pfennige, letztere in den verschiedenen Münzen (1-, 2-, 5-, 10-, 20- und 50-Pfennigstücke); unsere Maße: a) Meter und Centimeter, b) Hektoliter und Liter, c) Jahr und Monat, Woche und Tag, Tag und Stunde, d) Schock und Mandel, Mandel und Stück, Dutzend und Stück. Eben diese Sachen und Vorstellungen treten auch am Ende der Einheiten wieder auf, indem die erworbenen Rechenoperationen auf sie angewendet werden. Die „angewandten Aufgaben" in mannigfachen „Einkleidungen" bilden noch mehr als im ersten Schuljahre einen Hauptbestandteil der Rechenübungen.

Die Sachgebiete, welche nicht nur den an Sachgebiete überhaupt zu stellenden Forderungen entsprechen, sondern die sich auch den einzelnen Rechenoperationen anpassen lassen, verteilen sich wie folgt auf die zwölf methodischen Einheiten:[10])

1. Sachgebiete des ersten Schuljahres (Wiederholung). 2. Mark und Zehnpfenniger. 3. Die kleinen Geldsorten. 4. Haus und Garten (Mandel, Stück). 5. Feld und Wald. 6. Von einer Schulklasse (Kinder). 7. Was man in der Schule braucht (Dutzend, Stück). 8. Wie ein Haus gebaut wird. 9. Allerlei Weihnachtsvorbereitungen (Schock, Mandel, Stück). 10. Von der Post und Eisenbahn (Tag, Stunde, Minute). 11. Womit wir messen (Meter, Centimeter; Hektoliter, Liter). 12. Womit wir zahlen (Mark, Pfennig).

Daraus ergeben sich für die Verteilung des Rechenstoffes im zweiten Schuljahre folgende Gesichtspunkte:

1) Das Zahlgebiet ist die Zahlreihe 1 bis 100.

2) Diese Zahlreihe wird in zwölf methodischen Einheiten nach vier Seiten hin behandelt:

a) Die Zahlvorstellungen werden auf anschauliche Weise in neun Gruppen gewonnen;

b) die Zahlen werden mündlich und schriftlich dargestellt und dabei als Glieder der beiden ersten Stufen des Zahlsystems aufgefaßt;

c) die Reihe wird nach Maßgabe der vier Grundrechnungsarten durchgearbeitet, doch so, daß Addition und Subtraktion vorwiegen;

d) die gewonnenen Zahlen und Zahloperationen werden auf einfache Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens angewandt.

3) Jeder methodischen Einheit ist ein Sachgebiet zuzuweisen, mit welchem die Kinder entweder schon vertraut sind, oder — wenn nicht —

10) Vergl. S. 194.

zuvor vertraut gemacht werden. Besondere Beachtung verdienen: Unser Geld (bis zur Mark), unsere Längen-, Hohl-, Zeit- und Zählmaße insoweit, als die Währungszahlen aus dem Rahmen der Zahlreihe nicht heraustreten.

4) Es werden nur ganze Zahlen behandelt (also Bruch- und Dezimalzahlen, selbst Bruchformen, Bruchnamen und dezimale Schreibweise fern gehalten).

5) Den Hauptübungsstoff bilden die einzelnen Fälle der Addition und Subtraktion; Multiplikation und Division werden, abgesehen von der Zehnerreihe, nur durch die Additions- und Subtraktionsreihen der 5, 2, 4, 8, 3, 6, 9 und 7. vorbereitet. Dabei tritt die Division immer noch ausschließlich in der Form des Messens auf.

6) Die schriftlichen Darstellungen, bei denen nur Ziffern zu verwenden sind, erstrecken sich auf alle Rechenübungen, schließen sich aber den mündlichen Darstellungen eng an. Beispiel: $28 + 46 = 28 + 40 + 6 = 68 + 6 = 74$.

c) Das dritte Schuljahr.

Fachziel: Die Reihen der Zahlen 1 bis 10. (Die Zahlreihe 1 bis 100 mit Betonung der Multiplikation und Division.)[11]

Das zweite Schuljahr hat die Zahlreihe 1 bis 100 gebracht, die einzelnen Zahlen derselben sind als Glieder des Zahlsystems aufgefaßt worden, es ist mit ihnen nach Maßgabe der vier Grundrechnungsarten operiert worden, auch zahlreiche angewandte Aufgaben haben Berücksichtigung gefunden. Die Stellung der Zahlreihe 1 bis 100 im Volksschulrechenunterrichte ist indessen eine so wichtige, die innerhalb derselben erlangte Sicherheit und Fertigkeit für die ganze Folgezeit eine so entscheidende, daß die Arbeit eines Schuljahres unter gewöhnlichen Verhältnissen nicht für ausreichend erachtet werden kann. Gilt das aber schon bezüglich der Additions- und Subtraktionsübungen, so doch noch vielmehr in Rücksicht auf die Multiplikations- und Divisionsübungen. Die vier „Einse“ — das Einsundeins, Einsvoneins, Einsmaleins und Einsdurcheins — wollen für immer erworben sein, ganz besonders aber die beiden letzten. Und daher müßte es methodisch falsch genannt werden, wenn schon jetzt die Zahlkenntnis, etwa durch Einführung in die Zahlreihe 1 bis 1000, erweitert werden sollte. Denn was nützten die weitern Grenzen, wenn schließlich doch nur ein kleines Gebiet innerhalb derselben gut ausgebaut werden könnte? Nur der Schein eines Fortschrittes wäre vorhanden und die Gefahr, die Schüler an unsichere Leistungen zu gewöhnen, oder den Fleiß derselben durch mühsames Herbeiholen dessen, was geläufig sein soll, zu drücken, läge nahe. Das ist ja eben eine von den Ursachen, welche den Volksschulrechenunterricht keine guten Resultate zeitigen lassen: es wird zuviel entwickelt und

11) Vergl. Rechenbuch, Heft 2 (Ausg. A).

zu wenig geübt! Die Stelle aber, an der dieses am allerwenigsten vergessen werden sollte, ist entschieden in der Zahlreihe 1 bis 100 zu suchen.

Da wir im dritten Schuljahre aus diesen Gründen die natürliche Zahlreihe nicht erweitern, so sind auch keine neuen Zahlen aufzufassen. Ebensowenig kann von neuen mündlichen oder schriftlichen Darstellungen in Rücksicht auf das Zahlsystem die Rede sein. Der Schwerpunkt ist vielmehr in die Rechenoperationen (und zwar in die Multiplikation und Division) zu verlegen. Die Reihen der Grundzahlen nennt unser Rechenbuch als Stoff des dritten Schuljahres. Damit sind die Reihen der Zahlen 2 bis 9 in der Ordnung 5, 2, 4, 8, 3, 6, 9, 7 gemeint. Jede derselben tritt in vier Hauptformen auf: als Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionsreihe. So z. B. die Fünferreihe: a) 5, 10, 15 .... 100; b) 100, 95, 90 .... 5, 0; c) 5 . 1, 5 . 2, 5 . 3 ... 5 . 20; d) 5 : 5, 10 : 5, 15 : 5 .... 100 : 5. Dazu kommen noch zwei Nebenformen (für Multiplikation und Division), z. B. für die Fünferreihe: e) 1 . 5, 2 . 5, 3 . 5 .... 20 . 5; f) 5 : 1, 10 : 2, 15 : 3 ... 100 : 20.

Nicht unwesentlich ist es, ob die Aufstellung der Reihen für benannte Zahlen oder unbenannte Zahlen erfolgt. Denn bei *benannten* Zahlen giebt es zwar nur eine Form für die Multiplikation, es müssen aber zwei Formen (Messen und Teilen) für die Division unterschieden werden. Für die Fünferreihe z. B. a) 5 ₰ . 1, 2, 3 ...; b) 5 ₰ : 5 ₰, 10 ₰ : 5 ₰ .... c) 5 ₰ : 5, 10 ₰ : 5 ... Bedenkt man ferner, daß es außerdem noch zwei Formen giebt, welche von der Multiplikation zur Division überleiten — z. B. für die Fünferreihe a) 5 = 5 . 1 ; 10 = 5 . 2; ... und b) 5 = 1 . 5; 10 = 2 . 5; ... — so erhellt, daß für jede der zu behandelnden Reihen ein Reichtum von Formen vorliegt, welcher niemals um Stoff verlegen sein läßt, auch dann nicht, wenn man ein volles Schuljahr mit wöchentlich 4 Rechenstunden auf den Gegenstand zu verwenden hat.

Nach dem Gesagten würde, wenn man jede Reihe als methodische Einheit betrachtete, Stoff für *acht Einheiten* vorhanden sein. Es empfiehlt sich aber, an den Anfang des Schuljahrs wieder *eine Einheit* zu stellen, welche den Stoff des zweiten Schuljahrs in knapper, zusammenfassender Weise wiederholt, und an das Ende des Schuljahres *drei Einheiten*, deren erste aus den Reihen der einstelligen Zahlen die Reihen der ersten zweistelligen Zahlen heraushebt, deren andere die *Restdivision* (eine Verbindung von Division, Multiplikation und Subtraktion) bringt und deren dritte die *Bruchzahlen* (als Verbindung von Multiplikation und Division) einführt. Das giebt zusammen die folgenden *zwölf methodischen Einheiten*: 1) Wiederholungsaufgaben (aus dem Stoffgebiete des zweiten Schuljahres); 2) Fünferreihe; 3) Zweierreihe; 4) Viererreihe; 5) Achterreihe; 6) Dreierreihe; 7) Sechserreihe; 8) Neunerreihe; 9) Siebenerreihe; 10) Reihen einiger zweistelligen Zahlen; 11) Messen und Teilen mit Rest; 12) Einführung der Bruchzahlen. Auch hier ist zu bemerken, daß alles Erworbene auf die nachfolgenden Übungen übertragen und in neuen Verbindungen fleißig wiederholt wird. Dezimalzahlen kommen noch nicht vor, denn es würden sonst (was methodisch nicht gut wäre) zwei neue Zahlformen auf der dritten Stufe auftreten, dazu an einer Stelle, wo der Stoff keine guten Anknüpfungspunkte für dieselben bietet.

Fraglich könnte es nach dem Gesagten nur scheinen, ob im dritten Schuljahre Addition und Subtraktion genügende Berücksichtigung finden. Doch auch dieses ist der Fall. Denn einmal beginnt jede Reihe als Additions- (vorwärts) und Subtraktionsreihe (rückwärts), dann aber treten beide Operationen noch in folgenden Fällen auf: a) bei Überschreitung des Zehnfachen der Grundzahl, z. B. $4 \cdot 16 = 4 \cdot 10 + 4 \cdot 6 = 40 + 24 = 64$; $64 : 4 = 40 : 4 + 24 : 4 = 10 + 6 = 16$; b) bei Reihen mit verschiedenen Anfängen, z. B. $1 + 4 = 5$, $5 + 4 = 9$, $9 + 4 = 13$ ꝛc. $2 + 4 = 6$, $6 + 4 = 10$, $10 + 4 = 14$ ꝛc. $3 + 4 = 7$, $7 + 4 = 11$, $11 + 4 = 15$ ꝛc. und umgekehrt $99 - 4 = 95$, $95 - 4 = 91$ ꝛc. $98 - 4 = 94$, $94 - 4 = 90$ ꝛc. $97 - 4 = 93$, $93 - 4 = 89$ ꝛc. c) in zusammengesetzten Aufgaben z. B. $4 \cdot 14 + 35$; $4 \cdot 9 - 19$; $38 + 4 \cdot 7$; $83 - 4 \cdot 16$; $92 : 4 + 38$; $72 : 4 - 7$; $49 + 24 : 4$; $41 - 4 \cdot 4$; $4 \cdot 12 + 4 \cdot 9$; $4 \cdot 24 - 4 \cdot 9$; $56 : 4 + 36 : 4$; $84 : 4 - 28 : 4$; $4 \cdot 13 + 52 : 4$; $4 \cdot 23 - 72 : 4$; $68 : 4 + 4 \cdot 4$; $96 : 4 - 2 \cdot 4$ ꝛc. ꝛc.

Jede der zwölf methodischen Einheiten geht von einem bestimmten *Sachgebiete* aus und kehrt, nachdem die neuen Rechenfälle genügend durchgearbeitet worden sind, zu demselben zurück, das Erworbene darauf anwendend. Überall ist festgehalten worden, daß die Sachgebiete den Kindern wohl bekannt sind, bevor der Rechenunterricht an sie anknüpft. Daher sind einige derselben dem vorausgehenden Sachunterrichte, einige dem Schulleben, wieder andere dem täglichen Verkehre, wie er sich der unmittelbaren Anschauung der Kinder darbietet, entlehnt. Alles im Zusammenhange mit unserm ersten Begleitworte zum Rechenbuche: „Der Rechenunterricht soll durchaus *praktisch* sein, das ist auch unsere Meinung; aber wir nennen nur den Rechenunterricht einen praktischen, der *die geistige Natur des Kindes* in erster Linie berücksichtigt." So bieten z. B. die Schulhefte mit ihren Quartblättern ein sehr zweckmäßiges Beispiel für die Viererreihe. Die Geldsorten (bis zur Mark) eignen sich vorzüglich als Grundlage für die Fünfer- und Zweierreihe. Für die Achterreihe läßt sich die Teilung des Schreibpapiers ebenfalls zweckmäßig verwenden. Schulwoche und volle Woche bieten sich der Sechser- und Siebenerreihe als Grundlage an, und bei der Neunerreihe dürfte der Umstand, daß das Durchschnittsalter der Kinder im dritten Schuljahre neun Jahre beträgt, Beachtung verdienen. Für die Dreierreihe endlich bietet sich der alte beliebte Thaler, dessen Wert 3 ℳ beträgt, an, während sich die Zähl- und Zeitmaße, deren Halbe, Viertel u. s. w. entschieden volkstümlich sind, als Grundlage für die Bruchzahlen empfehlen. So betrachtet, ergeben sich für die zwölf methodischen Einheiten folgende *Sach*-

gebiete:[12]) 1) Alle Sachgebiete des 2. Schuljahrs (Wiederholung). 2) Kleine Geldsorten (Ein-, Fünf-, Fünfzigpfenniger, Mark). 3) Kleine Geldsorten (Ein-, Zwei-, Zwanzigpfenniger, Mark). 4) Die Schulhefte (Bogen, Blatt). 5) Die Schulhefte (Bogen, Blattseite). 6) Der Thaler (3 Mark). 7) Die Schulwoche (= 6 Tage). 8) Das Lebensalter des Kindes (9 Jahr). 9) Die Woche (= 7 Tage). 10) Einige Zähl- und Zeitmaße (Dutzend, Mandel, Stück; Jahr, Vierteljahr, Monat, Woche). 11) Münzen und Maße (Zähl- und Zeitmaße). 12) Münzen und Maße (Namen, Abkürzungen, Währungszahlen).

Aus dem Vorstehenden leiten wir für die Verteilung des Rechenstoffes im dritten Schuljahre folgende Sätze ab:

1) Das Zahlgebiet ist die Zahlreihe 1 bis 100.

2) Der gesamte Rechenstoff wird in zwölf methodische Einheiten zerlegt, deren Durcharbeitung auf einen weitern Ausbau der Reihen für die Einerzahlen 2 bis 9 nach Maßgabe der vier Grundrechnungsarten, insbesondere aber der Multiplikation und Division, abzielt.

3) Jeder methodischen Einheit wird ein angemessenes Sachgebiet zugewiesen, mit dem die Kinder genügend bekannt sind. Am Ende jeder Einheit wird durch zahlreiche eingekleidete Aufgaben für Anwendung der Zahloperationen auf die Sachgebiete gesorgt.

4) Außer den ganzen Zahlen werden auch Bruchzahlen (Halbe, Drittel . . . Zehntel), und zwar im engsten Anschlusse an die Zähl- und Zeitmaße, behandelt. Dezimalzahlen haben noch fern zu bleiben.

5) Obgleich Multiplikations- und Divisionsreihen den Hauptübungsstoff bilden, wird doch durch die Additions- und Subtraktionsreihen einerseits und die aus Produkten und Quotienten zusammengesetzten Additions- und Subtraktionsaufgaben anderseits auch für die beiden ersten Grundrechnungsarten ein reicher Übungsstoff gewonnen.

6) Alle schriftlichen Darstellungen haben sich der Form nach den mündlichen Darstellungen eng anzuschließen. Beispiel: $2 \,.\, 26 = 2 \,.\, 20 + 2 \,.\, 6 = 40 + 12 = 52$ ꝛc.

d) Das vierte Schuljahr.

Fachziel: Die Zahlreihe 1 bis 1000. (Alle vier Grundrechnungsarten.)[13])

Das dritte Schuljahr hat mit der ihrer Bedeutung entsprechenden Behandlung der Zahlreihe 1 bis 100 abgeschlossen. Dadurch ist für die Rechenfertigkeit aller folgenden Schuljahre die wichtigste Grundlage gewonnen worden. Nun kann die Erweiterung der Zahlreihe über 100 hinaus unbedenklich erfolgen. Es empfiehlt sich aber, dieselbe in zwei

12) Vergl. S. 194.
13) Vergl. Rechenbuch, Heft 3 (Ausg. A).

Absätzen, den ersten bis 1000, den zweiten darüber hinaus, eintreten zu lassen und dem vierten Schuljahre davon nur die Zahlreihe 1 bis 1000 zuzuweisen. Denn diese Zahlreihe darf noch als zum Hauptgebiete des Kopfrechnens gehörig betrachtet werden und ist daher besonders geeignet, der im Gebiete der Zahlreihe 1 bis 100 erworbenen Rechenfertigkeit als erweitertes Übungsfeld zu dienen. Auch begünstigt sie die Einführung mehrerer dezimalen Maße und Gewichte und der dezimalen Schreibweise für dieselben. Und außerdem ist sie die natürliche Brücke zum schriftlichen Rechnen, d. h. zum Rechnen mit dem Stellenwerte der Ziffern, da die drei wichtigsten Stufen des Zehnersystems, Einer, Zehner und Hunderte, ihr angehören. Daß für alle vier Grundrechnungsarten eine ziemliche Anzahl neuer Rechenfälle, insbesondere solcher für Addition und Subtraktion, gleichzeitig mit der Zahlreihe 1 bis 1000 auftritt, darf auch nicht übersehen werden. Kurz: Es giebt innerhalb der Zahlreihe 1 bis 1000 soviel zu erledigen, daß für ein volles Schuljahr ausreichender Stoff vorhanden ist, und auch die Sorge, es könnten die Übungen durch zu langsames Vorwärtsschreiten etwas Schleppendes und daher Ermüdendes annehmen, erweist sich sehr bald als gegenstandslos.

Zunächst sind selbstverständlich die neuen Zahlvorstellungen zu erwerben. Dieses geschieht in noch höherem Maße als früher im engen Anschlusse an unser Zahlsystem. Auch die methodischen Einheiten werden zweckmäßig mit nach diesem bestimmt. Zuerst ist die Hunderterreihe klar aufzufassen, also die Reihe der neuen (höhern) Einheit. Die Bildung derselben erfolgt auf der Grundlage der Einer- und Zehnerreihe, bietet also in formaler Hinsicht keine Schwierigkeiten. Daher können auch sofort alle vier Grundrechnungsarten auf sie angewandt werden. Mit den Hunderten werden sodann die Zehner verbunden, wodurch man zu Zahlen gelangt, die als höhere Stufe der aus Zehnern und Einern zusammengesetzten Zahlen zu gelten haben. Auch auf diese dürfen daher sofort alle vier Grundrechnungsarten angewandt werden. Insbesondere ist dabei die Auffassung der neuen Zahlen als Vielfachen der Zehn zu betonen. Wie aber auf der zweiten Stufe eine Reihe grundlegender Rechenfälle sich dadurch ergab, daß reine und gemischte Zehner in Beziehung zu einander traten, so hier, wenn reine Hunderte und Hunderte in Verbindung mit Zehnern nach Maßgabe der Grundrechnungsarten mit einander verknüpft werden.

Addition und Subtraktion überwiegen zunächst natürlich, doch sollen Multiplikation und Division keineswegs als etwas Nebensächliches behandelt werden. Insbesondere auch nicht die Division, deren Einzelfälle beim Aufbau der Reihe 1 bis 1000 alle nach und nach zu berücksichtigen sind, und die fortgesetzt gepflegt werden muß, wenn am Ende des Schuljahres in ihr etwas geleistet werden soll. So giebt z. B. der Fall 720—200 durchaus Veranlassung, 720 : 200 in der Auffassung von 720 — 200 — 200 — 200 anzuschließen u. dgl. m.

In der fortschreitenden Entwickelung der Zahlreihe 1 bis 1000 auf der Grundlage des Zehnersystems treten die aus Hunderten und Zehnern zusammengesetzten Zahlen noch zu den reinen Zehnerzahlen und zu den ebenfalls aus Hunderten und Zehnern gemischten Zahlen in Beziehung. Schließlich folgt ihre Verbindung mit den Einern, welche wieder eine Anzahl neuer Rechenfälle bringt. Eine besondere Behandlung erfordern dabei die schriftlichen Formen der vier Grundrechnungsarten.

Wird auch im vierten Schuljahre mit einem Abschnitte begonnen, der den Hauptstoff der vorhergehenden Schuljahre in knapper und übersichtlicher Weise wiederholt, so erhält man schließlich folgende zwölf methodischen Einheiten: 1) Wiederholungsaufgaben (aus den Stoffgebieten der vorhergehenden Schuljahre). 2) Reine Hunderte. 3) Reine Hunderte und Zehner. 4), 5) und 6) Gemischte Hunderte (Hunderte und Zehner) und Zehner. 7) Die Reihen der Zehnerzahlen. 8) und 9) Hunderte, Zehner und Einer. 10) Schriftliche Addition und Subtraktion. 11) Erweiterung der Reihen (der Zahlen 2 bis 9). 12) Schriftliche Multiplikation und Division. Mit diesen zwölf Einheiten stehen einerseits bestimmte Rechenoperationen, anderseits zweckentsprechende Sachgebiete, beide sich denselben eng anschließend, in Verbindung. Als Rechenoperationen treten, nach den Einheiten geordnet, auf:

1) Die vier Grundrechnungsarten mit den Zahlen 1 bis 100 (Wiederholung).

2) Der 1. Rechenfall: Die vier Grundrechnungsarten in reinen Hunderten.

3) Der 2. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen der Zehner. Beispiel: 300 + 40; 340 — 40.

Der 3. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen der Hunderte. Beispiel: 340 + 200; 540 — 200.

Der 4. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen gemischter Zahlen. Beispiel: 300 + 250; 550 — 250.

4) Der 5. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen der Zehner ohne Überschreitung eines Hunderts. Beispiel: 340 + 50; 390 — 50.

Der 6. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen gemischter Zahlen ohne Überschreitung eines Hunderts durch die Zehner. Beispiel: 340 + 250; 590 — 250.

5) Der 7. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen von Zehnern, welche zum Hundert ergänzen. Beispiel: 340 + 60; 400 — 60.

Der 8. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen gemischter Zahlen, deren Zehner zum Hundert ergänzen. Beispiel: 340 + 260; 600 — 260.

6) Der 9. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen von Zehnern, welche das nächste Hundert überschreiten. Beispiel: 340 + 90; 430 — 90.

Der 10. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen gemischter Zahlen, deren Zehner das nächste Hundert überschreiten. Beispiel: 340 + 290; 630 — 290.

7) Die Reihen der 10, 50, 20, 40, 80, 30, 60, 90, 70.

8) Der 11. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen der Einer. Beispiele: a) 340 + 8; 242 + 6; 344 + 6; 345 + 9; 394 + 6; 395 + 9; b) 348 — 8; 348 — 6; 350 — 6; 354 — 9; 400 — 6; 404 — 9.

Der 12. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen der Zehner. Beispiele: a) 348 + 40; 348 + 60; 348 + 80; b) 388 — 40; 408 — 60; 428 — 80.

Der 13. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen der Zehner und Einer. Beispiele: a) 344 + 45; 344 + 65; 344 + 85; 348 + 45; 358 + 45; 368 + 45; 378 + 45; b) 389 — 45; 409 — 65; 429 — 85; 393 — 45; 403 — 45; 413 — 45; 423 — 45;

9) Der 14. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen der Hunderte. Beispiel: 348 + 200; 548 — 200.

Der 15. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen der Hunderte und Zehner. Beispiele: a) 348 + 230; 348 + 260; 348 + 280; b) 578 — 230; 608 — 260; 628 — 280.

Der 16. Rechenfall: Zuzählen und Abzählen der Hunderte, Zehner und Einer. Beispiele: a) 300 + 243; 320 + 243; 360 + 243; 380 + 243; 325 + 243; 327 + 243; 329 + 243; 365 + 243; 385 + 243; 367 + 243; 387 + 243; 369 + 243; 389 + 243. b) 543 — 243; 563 — 243; 603 — 243; 623 — 243; 568 — 243; 570 — 243; 572 — 243; 608 — 243; 628 — 243; 610 — 243; 630 — 243; — 612 — 243; 632 — 243.

10) Rechnen mit dem Stellenwerte der Ziffern. a) Die schriftliche Addition. b) Die schriftliche Subtraktion. Beispiele:[14]) a) 9 + 6 + 8 + 5 + 7; 70 + 50 + 80 + 60 + 90; 29 + 76 + 58 + 85 + 67; 100 + 200 + 100 + 300 + 200; 180 + 240 + 130 + 250 + 160; 148 + 226 + 159 + 265 + 167; b) 68 — 43; 61 — 43; 508 — 243; 561 — 243; 528 — 243; 521 — 243.

11) Die Reihen der Zahlen 2 bis 9 mit Überschreitung der Zahl 100. Beispiele: a) 2 . 78; 2 . 138; 2 . 278; b) 156 : 2; 276 : 2; 556 : 2. Das sogenannte große Einsmaleins. (Die Reihen der Zahlen 11 bis 20 bis zum 10fachen.)

12) Rechnen mit dem Stellenwerte der Ziffern. a) Die schriftliche Multiplikation. b) Die schriftliche Division. Beispiele:[15]) a) 168 . 2; 3 . 168; 27 . 30; 30 . 27; 27 . 36; b) 648 : 2; 658 : 2; 794 : 2; 576 : 7; 594 : 24.

Neben den Aufgaben mit **unbenannten** Zahlen kommen im Anschlusse an die **Sachgebiete** überall auch solche mit **benannten** Zahlen vor.

---

14) Vergl. Rechenbuch, Heft 3 (Ausg. A) S. 52 f.
15) Vergl. Rechenbuch, Heft 3 (Ausg. A) S. 61 f.

Die Sachgebiete der zwölf methodischen Einheiten sind folgende: 1) Die Sachgebiete, welche im dritten Schuljahre als Grundlage gedient haben (Wiederholung). 2) Mark, Meter und Hektoliter. 3) Mark, Meter und Hektoliter (mit dezimaler Schreibweise, z. B. 5,40 m). 4) Post und Eisenbahn. 5) In Haus und Garten. 6) In Küche und Keller. 7) Das Kleingeld der Zehnerreihe. 8) Was der Herbst bringt. 9) Was man im Winter erlebt. 10) Aus der Heimatkunde. 11) Was man im Haushalte braucht. 12) Was man im Haushalte braucht.

Diese Sachgebiete sind am Anfange jeder Einheit als solche eingehender zu behandeln. Zweck dieser Behandlung ist insbesondere auch eine planmäßige Einführung in unser Münz-, Maß- und Gewichtssystem (an Stelle der gelegentlichen), um dem Rechnen mit benannten Zahlen die erforderliche feste Grundlage zu gewähren. Die dezimale Schreibweise, welche dabei zum ersten Male auftritt, ist die Vorstufe für das Rechnen mit Dezimalzahlen. Dieselbe kommt namentlich auch in den schriftlichen Formen der beiden letzten Einheiten zur Geltung, woselbst sie eine wesentliche Erweiterung herbeiführt. So z. B.

$$\text{a)}\quad \begin{array}{r} 36{,}48\ \mathcal{M} \\ 75{,}56\ \text{„} \\ 59{,}37\ \text{„} \\ 87{,}95\ \text{„} \\ \hline 259{,}36\ \mathcal{M} \end{array} \qquad \text{b)}\quad \begin{array}{r} 563{,}05\ \text{m} \\ -336{,}48\ \text{„} \\ \hline 226{,}57\ \text{m} \end{array} \qquad \text{c)}\quad \begin{array}{r} 37{,}48\ \text{hl}\ .\ 24 \\ \hline 749{,}60 \\ 149{,}92 \\ \hline 899{,}52\ \text{hl} \end{array}$$

$$\text{d)}\ 357{,}38\ \mathcal{M} : 2 = 178{,}69\ \mathcal{M}.$$

Das Gesagte zusammenfassend, bekommen wir folgende Sätze über die Verteilung des Rechenstoffes im vierten Schuljahre:

1) Das Zahlgebiet ist die Zahlreihe 1 bis 1000.

2) Der gesamte Rechenstoff wird in zwölf methodischen Einheiten durchgearbeitet, deren erste eine kurze, zusammenfassende Wiederholung des Rechenstoffes innerhalb der Zahlreihe 1 bis 100 bringt und deren letzte die Überleitung zum eigentlichen schriftlichen Rechnen bilden. Die zwischenliegenden Einheiten führen in die neue Zahlreihe ein, indem sie dieselbe durch Auffassung der Zahlen als Glieder der drei ersten Stufen des Zehnersystems planmäßig aufbauen und die vier Grundrechnungsarten im engsten Anschlusse an diesen Aufbau behandeln.

3) Den methodischen Einheiten werden Sachgebiete zugewiesen, bei deren Auswahl in erster Linie unsere Münzen, Maße und Gewichte Berücksichtigung finden, weil die Fortschritte im Rechnen auf der Oberstufe wesentlich von der genauen Bekanntschaft mit denselben abhängen.

4) Es werden vorwiegend ganze Zahlen behandelt; daneben treten aber auch Bruchzahlen auf, und die Dezimalzahlen werden durch die dezimale Schreibweise der Münzen und Maße vorbereitet.

5) Die vier Grundrechnungsarten in benannten und unbenannten Zahlen finden gleichmäßige Berücksichtigung; die Anwendung derselben auf Sachgebiete erweitert sich entsprechend.

6) Die schriftlichen Darstellungen schließen sich anfangs den mündlichen Darstellungen noch eng an, berücksichtigen dann aber mehr und mehr den Stellenwert der Ziffern und führen zuletzt in das eigentliche schriftliche Rechnen ein.

e) Das fünfte Schuljahr.

Fachziel: Die unendliche Zahlreihe. (Alle vier Grundrechnungsarten.)[16])

Das vierte Schuljahr hat die Reihe der vorbereitenden Stoffe, abgesehen von der Einführung in die Zahlreihe 1 bis 1000, um weitere zwei vermehrt, die für das nachfolgende Rechnen von großer Wichtigkeit sind: die dezimale Schreibung unserer Münzen und Maße und das Rechnen mit dem Stellenwerte der Ziffern (das eigentliche schriftliche Rechnen). Es fehlt jetzt nur noch die Erschließung der unendlichen Zahlreihe, um den Zögling für die Oberstufe des Volksschulrechnens ganz reif zu machen. Dieses aber ist die Hauptaufgabe des fünften Schuljahres. Drei Schritte sind vorher gethan worden: bis Zehn, Hundert, Tausend; drei weitere Schritte sind noch zu thun: bis Zehntausend, Hunderttausend, Million. Das genügt, um das Zahlbildungsgesetz zu verstehen und reicht aus, um alle Rechenfälle der Volksschule zu erledigen. Das Kopfrechnen wird zwar keineswegs vernachlässigt, es tritt aber, solange es sich um die Erwerbung der Formen des schriftlichen Rechnens handelt, gegen früher etwas zurück. Die schriftliche Addition und Subtraktion mit einfach benannten und unbenannten Zahlen, in eingekleideten und nicht eingekleideten Aufgaben einerseits, die schriftliche Multiplikation und Division unter denselben Voraussetzungen anderseits, treten in den Vordergrund. Neben dem Normalverfahren, das vor allem sicher zu stellen ist, werden wichtige und leichtverständliche Rechenvorteile berücksichtigt. Alle Rechenvorteile beruhen auf einer Verschmelzung des Kopfrechnens mit dem Tafelrechnen. Sie müssen aber eine wirkliche Zeitersparnis herbeiführen, wenn sie annehmbar sein sollen. Die andere Beziehung, welche zwischen Kopf- und Tafelrechnen von jetzt ab besteht, ist die, daß das Kopfrechnen dem Tafelrechnen stets vorausgehen soll, wenn es sich um Lösung von Aufgaben handelt, deren Sach- und Zahlverhältnisse dem Zöglinge noch nicht genügend klar sind. Man erreicht diese Klarheit dadurch am ersten, daß man mit kleinern Zahlen (unter Beibehaltung der gegebenen Verhältnisse) operieren läßt. Daher sind jedem Abschnitte, der Neues bringt, eine Anzahl von Aufgaben für mündliches Rechnen vorauszuschicken.

Den Sachgebieten ist selbstverständlich auch auf dieser Stufe besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden. In erster Linie sind die Ergänzungen unseres Münz-, Maß- und Gewichtssystems zu berücksichtigen. Zur Einführung in die unbegrenzte Zahlreihe eignen sich die Längenmaße; bei Addition und Subtraktion erweisen sich die Gewichte als recht zweck-

16) Vergl. Rechenbuch, Heft 4 (Ausg. A).

mäßig; Multiplikation und Division lassen sich mit bestem Erfolge mit den Flächenmaßen in Verbindung bringen.

Daraus gehen die folgenden zwölf methodischen Einheiten hervor: 1) Wiederholungsaufgaben (auf die Zahlreihe 1 bis 1000 bezüglich). 2) Erweiterung der Zahlreihe (in drei Abteilungen: a) bis Zehntausend; b) bis Hunderttausend; c) bis Million). 3) Addition. 4) Subtraktion. 5) Addition und Subtraktion in Verbindung. 6) Multiplikation. 7) Division. 8) Multiplikation und Division in Verbindung. 9) Mehrfach benannte Zahlen (Erweitern und Einrichten). 10) Mehrfach benannte Zahlen (Kürzen). 11) Addition und Subtraktion (mehrfach benannter Zahlen). 12) Multiplikation und Division (mehrfach benannter Zahlen).

Diesen zwölf Einheiten werden der Reihe nach folgende Sachgebiete zugewiesen: 1) Die Sachgebiete des vierten Schuljahres. 2) Unsere Längenmaße. 3) Unsere Gewichte. 4) Unsere Gewichte im Post- und Handelsverkehre. 5) Zur Naturgeschichte. 6) Unsere Flächenmaße. 7) Unsere Flächenmaße in der Länder- und Völkerkunde. 8) Was man fürs Haus braucht. 9) Unsere Zeit- und Zählmaße. 10) Desgleichen. 11) Zeitbestimmungen (Zeitrechnung). 12) Zählmaße (im Handelsverkehre).

Über die einzelnen Rechenfälle ist zu bemerken, daß in der ersten Einheit alle 4 Grundrechnungsarten gleichmäßige Berücksichtigung finden und daß in der zweiten Einheit die Einführung in die unendliche Zahlreihe sich mündlich und schriftlich vollzieht. In jeder der übrigen Einheiten tritt eine von den vier Grundrechnungsarten in den Vordergrund, oder es werden zwei Grundrechnungsarten mit einander verbunden. Bezüglich der Einzelheiten verweisen wir auf unser Rechenbuch.[17]) Nachstehend folgt eine kurze Übersicht der hauptsächlichsten Rechenfälle.

I. Addition. A. Mündlich: a) Vorübungen innerhalb der Zahlreihe 1 bis 1000; b) 4000 + 5000; 3600 + 4000; 2590 + 3000; 2758 + 5000 (oder auch in umgekehrter Folge); c) 700 + 900; 460 + 830; 536 + 840; 465 + 834; d) 480 + 670; 305 + 908; 875 + 684; 436 + 948; 876 + 795; e) Rechenvorteile, z. B. 196 + 328 = 200 + 324; 830 + 980 = 810 + 1000; 395 + 938 = 400 + 938 — 5; 788 + 697 = 800 + 700 — 15 ꝛc. B. Schriftlich: Aufgaben mit einfach benannten und unbenannten Zahlen, mit und ohne dezimale Schreibweise, Anzahl der Summanden beliebig, Stellenzahl desgleichen. C. Angewandte Aufgaben, welche, jenachdem, mündlich oder schriftlich zu lösen sind.

II. Subtraktion. A. Mündlich: a) Vorübungen innerhalb der Zahlreihe 1 bis 1000; b) 9000 — 4000; 7600 — 4000; 5590—3000; 7758 — 5000; c) 5800 — 3400; 5080 — 3040; 5008 — 3004; 5860 — 3420; 5086 — 3042; 5806 — 3402; 5869 — 3427; d) 4000 — 600; 4000 — 60; 4000 — 6; 4800 — 60; 4800 — 6; 4820 — 6; e) 1600 — 700; 1750 — 480; 1913 — 805; f) 8000 — 3650; 3100 — 1270; 4624 — 2348; 5294 — 3748; g) Rechenvorteile, z. B. 1560

17) Vergl. Rechenbuch, Heft 4, S. 14 ff. (Ausg. A.)

— 740 = 1540 — 740 + 20; 3460 — 790 = 3490 — 790 — 30; 1670 — 590 = 1670 — 600 + 10; 1670 — 590 = 1670 — 570 — 20 ꝛc. B. Schriftlich: Aufgaben mit einfach benannten und unbenannten ganzen und dezimalen Zahlen, ohne und mit Verwandlung höherer Einheiten in niedere (sogenanntes Borgen). C. Angewandte Aufgaben, die mündlich oder schriftlich zu lösen sind.

III. Verbindung von Addition und Subtraktion. (Zusammengesetzte Aufgaben.)

IV. Multiplikation. A. Mündlich: a) Vorübungen innerhalb der Zahlreihe 1 bis 1000; b) 7 . 8; 7 . 80; 7 . 800; 7 . 8000; c) 80 . 7; 800 . 7; 8000 . 7; d) 24 . 3; 24 . 30; 24 . 300; 24 . 3000; e) 30 . 24; 300 . 24; 3000 . 24; f) 352 . 4; 352 . 40; 352 . 400; g) 4 . 352; 40 . 352; 400 . 352; h) 24 . 48; 240 . 48; 24 . 480; 240 . 480; i) Rechenvorteile, z. B. 7 . 190 = 7 . 200 — 70; 6 . 180 = 6 . 200 — 120; 14 . 48 = 14 . 50 — 28; 19 . 45 = 20 . 45 — 45; 350 . 28 = 350 . 4 . 7 = 1400 . 7 = 9800 ꝛc. B. Schriftlich: Der Multiplikand ist eine ein- oder mehrstellige (einfach benannte oder unbenannte Zahl, der Multiplikator eine ein-, zwei-, drei- oder vierstellige Zahl. C. Angewandte Aufgaben, welche mündlich oder schriftlich zu lösen sind.

V. Division.[18]) A. Mündlich: a) Vorübungen innerhalb der Zahlreihe 1 bis 1000. b) 30 : 10; 300 : 100; 3000 : 1000; c) 80 : 20; 800 : 200; 8000 : 2000; d) 3600 : 4; 3600 : 40; 3600 : 400; e) 3050 : 5; 3050 : 50; 3005 : 5; f) 6000 : 2; 6900 : 3; 6960 : 6; 6964 : 4; g) 1830 : 30; 2448 : 24; 8526 : 42; h) 7325 : 10; 6048 : 30; 2645 : 24; i) Rechenvorteile, z. B. 484 : 44 = (440 + 44) : 44; 342 : 38 = (380 — 38) : 38; 324 : 36 = 324 : 4 : 9; 375 : 25 = 375 . 4 : 100 ꝛc. B. Schriftlich: Der Dividend (welcher eine einfach benannte oder unbenannte Zahl sein kann) ist ein- oder mehrstellig, der Divisor (welcher ebenfalls eine einfach benannte oder unbenannte Zahl sein kann) ist a) einstellig, b) zweistellig, c) dreistellig, d) vierstellig. C. Angewandte Aufgaben, die teils mündlich, teils schriftlich zu lösen sind.

VI. Verbindung von Multiplikation und Division (Schlußrechnung). A. Die Divisionsprobe. B. Schluß von der Einheit auf die Mehrheit. C. Schluß von der Mehrheit auf die Einheit. D. Bruchzahlen. E. Schluß von einer Mehrheit auf eine andere. F. Durchschnittsberechnungen. G. Vermischte Aufgaben.

Durch die ersten acht methodischen Einheiten ist zwar die unendliche Zahlreihe nach den vier Grundrechnungsarten eingehend durchgearbeitet worden; es zeigt unsere Stoffverteilung an dieser Stelle aber noch eine Lücke: die Durcharbeitung der mehrfach benannten Zahlen fehlt noch. Da letztere auch auf den vorhergehenden Stufen nur vereinzelt auftreten,

18) Die doppelte Bedeutung der Division (Messen und Teilen) kommt namentlich in den Aufgaben mit benannten Zahlen zur Geltung.

so dürfte ihre zusammenhängende Behandlung hier umsomehr am Platze sein, als für eine solche noch genügend Raum vorhanden ist, dieselbe auch als Vorbereitung für die nachfolgende Behandlung der Dezimal- und Bruchzahlen sehr gute Dienste leistet. Und so fügen wir zu den acht Einheiten noch vier über die mehrfach benannten Zahlen in zwei Abteilungen: A. Sortenverwandlungen. B. Die vier Grundrechnungsarten. Die Sortenverwandlung kann eine doppelte sein: entweder werden durch Multiplikation höhere Sorten in niedere verwandelt, das giebt das Erweitern und Einrichten, gewöhnlich (in Norddeutschland) Resolution genannt; oder es werden niedere Sorten durch Division in höhere verwandelt, das giebt das Heben oder Kürzen, gewöhnlich (in Norddeutschland) Reduktion genannt. Als passende Sachgebiete erscheinen in beiden Fällen unsere Zeit- und Zählmaße. Die Behandlung der Grundrechnungsarten erfolgt in den vier Unterabteilungen: Addition, Subtraktion (beide mit Berücksichtigung der Zeitmaße), Multiplikation und Division (beide mit Berücksichtigung der Zählmaße).

Dem allen hat sich in der achten Einheit die Schlußrechnung anzuschließen. Diese bringt die wichtigste Kombination von Multiplikation und Division und berücksichtigt gleichzeitig eine Reihe von Sachverhältnissen (Was man fürs Haus braucht: Nahrung, Kleidung, Wohnung, Sonstiges), die dem Kinde nicht nur nahe liegen, sondern die auch sein Interesse ganz erheblich in Anspruch nehmen. Es ist gewissermaßen eine erste Ernte, die das Kind jetzt, gegen das Ende der einführenden Behandlung der unendlichen Zahlreihe, hält, zugleich eine Belohnung für fleißige Bearbeitung eines ziemlich spröden Materials.

Aus dem Vorstehenden ergeben sich folgende Gesichtspunkte für die Verteilung des Rechenstoffes im fünften Schuljahre:

1) Das Zahlgebiet ist die unendliche Zahlreihe, im wesentlichen aber die Zahlreihe 1 bis 1 000 000.

2) Diese Zahlreihe wird in drei Stufen: 1 bis 10 000, 1 bis 100 000 und 1 bis 1 000 000 erworben, sodann aber ungeteilt nach Maßgabe der vier Grundrechnungsarten mit unbenannten und einfach benannten Zahlen durchgearbeitet. Am Ende schließt sich die zusammenhängende Behandlung der mehrfach benannten Zahlen an. Der Addition und Subtraktion folgt eine Verbindung beider Rechnungsarten, ebenso der Multiplikation und Division, letzteren die so wichtige Schlußrechnung. Es giebt das zusammen mit der ersten Einheit, welche eine kurze Wiederholung des Rechenstoffes innerhalb der Zahlreihe 1 bis 1000 bringt, zwölf Einheiten.

3) Die den zwölf Einheiten zu Grunde liegenden neuen Sachgebiete beziehen sich auf unsere Gewichte, Längen- und Flächenmaße, die Zeit- und Zählmaße im Zusammenhange, dazu das, was man fürs Haus braucht (Nahrung, Kleidung, Wohnung, Sonstiges).

4) Außer den ganzen Zahlen, welche vorwiegend behandelt werden, treten auch Dezimal- und Bruchzahlen auf. Erstere infolge der dezimalen Schreibweise unserer dezimalen Münzen, Maße und Gewichte, letztere

namentlich in Verbindung mit der Behandlung der mehrfach benannten Zahlen.

5) Die vier Grundrechnungsarten werden gleichmäßig berücksichtigt; durch die aus einer Kombination der Multiplikation mit der Division hervorgehende Schlußrechnung erhalten dieselben diejenige Erweiterung, welche sich für die Anwendung auf die Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens als besonders wertvoll erweist.

6) Bei den schriftlichen Darstellungen ist noch mehr als vordem Rücksicht auf den Stellenwert der Ziffern zu nehmen; zugleich wird eine Reihe fester Formen gewonnen.

f) Das sechste Schuljahr.

Fachziel: Dezimal- und Bruchzahlen. 19)

Über den Stoff des sechsten Schuljahres können keine Zweifel obwalten. Wenn für das fünfte Schuljahr die unbegrenzte Zahlreihe den Hauptstoff bildet, und wenn in demselben auch das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen seine Erledigung findet, so haben als Stoff für das sechste Schuljahr jedenfalls Dezimal- und Bruchzahlen zu gelten. Unsere Auffassung von diesen Zahlen wurde oben bereits ausführlich dargelegt; insbesondere ist dort auch angegeben, weshalb wir die Dezimalzahlen vor den Bruchzahlen behandeln. Wir können deshalb sofort zur Feststellung der methodischen Einheiten übergehen. Diese aber sind für beide Arten von Zahlen fast die nämlichen: je eine Einheit über die Entstehung derselben, je eine Einheit, welche Addition und Subtraktion behandelt, zuletzt die Einheiten für Multiplikation, Division und deren Verbindungen. Bei den Bruchzahlen ist selbstverständlich zwischen Addition und Subtraktion gleichnamiger und ungleichnamiger Bruchzahlen zu unterscheiden. Das alles giebt zusammen mit einer für die Wiederholung bestimmten Einheit zwölf Einheiten, nämlich: 1) Wiederholungsaufgaben (im engen Anschlusse an die Vorstufen). 2) Die Dezimalzahlen (A. Zehntel, Hundertstel, Tausendstel; B. Zehntausendstel, Hunderttausendstel, Millionstel). 3) Addition und Subtraktion mit Dezimalzahlen. 4) Multiplikation und 5) Division desgleichen. 6) Verbindung von Multiplikation und Division. 7) Die Bruchzahlen (Halbe, Viertel, Achtel; Drittel, Sechstel, Zwölftel; Fünftel, Zehntel, Zwanzigstel; beliebige Bruchzahlen). 8) Addition und Subtraktion mit gleichnamigen Bruchzahlen. 9) Multiplikation und Division mit Bruchzahlen. (Multiplikator und Divisor sind ganze Zahlen.) 10) Addition und Subtraktion mit ungleichnamigen Bruchzahlen. 11) Multiplikation und Division mit Bruchzahlen. (Multiplikator und Divisor sind Bruchzahlen.)

Im Rahmen dieser Einheiten können alle wesentlichen, hierhergehörigen Rechenfälle erledigt werden. Die erste Einheit geht nicht über

19) Vergl. Rechenbuch, Heft 5 (Ausg. A).

das Ziel der Vorstufe hinaus, faßt aber alles kürzer und übersichtlicher zusammen, um dem Zöglinge zur Herrschaft über den Rechenstoff, der sein unverlierbares Eigentum werden soll, zu verhelfen. Aus diesem Grunde ist auch das Theoretische einigermaßen betont worden. Die zweite Einheit bringt die Einführung in die zusammenhängende Behandlung der Dezimalzahlen, auf welche auf den beiden vorhergehenden Stufen durch die dezimale Schreibweise unseres Geldes, unserer Maße und Gewichte bereits vorbereitet wurde. Diese Einführung geschieht zwar auch im Anschlusse an unsere dezimalen Münzen, Maße und Gewichte, geht zugleich aber auch von den Gesetzen der ganzen (dekadischen) Zahlen aus und betrachtet die dezimalen Zahlen als eine Fortsetzung der dekadischen. Das Ergebnis findet in der uns bekannten Übersichtstabelle seinen Ausdruck.[20])

Bei Addition und Subtraktion kommt etwas wesentlich Neues gegen früher nicht vor, insoweit es sich um benannte Dezimalzahlen handelt. Bei den unbenannten Dezimalzahlen hingegen bringen die Fälle, in denen die Anzahl der Dezimalstellen eine ungleiche ist, Abweichungen. So z. B.

a) 0,579	b) 25,9	d) 9
8,64	— 14,76	— 6,308
17,2	11,14	2,692
6,79		
35,8	c) 8,2	
0,682	— 7,709	
69,691	0,491	

Angewandte Aufgaben lassen sich hier mit Leichtigkeit beschaffen; am Ende treten beide Rechnungsarten zweckmäßig in Verbindung auf.

Bei der Multiplikation sind die Vorübungen von größter Wichtigkeit, denn hier ist, wie früher auseinander gesetzt wurde, der Punkt, welcher über die Stellung und Behandlung der Dezimalzahlen entscheidet.[21]) Demnach werden als besondere Fälle behandelt: 1) Dezimalzahl mal ganze Zahl; 2) ganze Zahl mal Dezimalzahl; 3) Dezimalzahl mal Dezimalzahl.[22]) Jede dieser Abteilungen hat wieder mehrere Unterabteilungen, denn sowohl die Dezimalzahlen als auch die ganzen Zahlen dürfen ein- oder mehrstellig sein. Es genügt aber, wenn man die Übungen bis zu drei Stellen fortführt. Folgende Übersicht in Beispielen zeigt, was dabei etwa zu beachten ist:

1) Multiplikation der Dezimalzahlen mit ganzen Zahlen.

a) 0,9 . 5; 3,5 . 30; 29,6 . 47; 9,2 . 400; 0,7 . 140; 432,6 . 763;
b) 0,07 . 8; 0,36 . 70; 3,58 . 54; 26,29 . 500; 860,57 . 260; 3,08 . 687; 19,28 . 504;

20) Vergl. S. 134.
21) Vergl. S. 135 f.
22) Vergl. Rechenbuch, Heft 5. S. 19 f. (Ausg. A.)

c) 0,006 . 7; 0,057 . 80; 0,483 . 93; 0,209 . 300; 6,345 . 540; 29,087 . 687; 904,057 . 905.

2) Multiplikation ganzer Zahlen mit Dezimalzahlen.

Die einzelnen Fälle erhält man durch Vertauschung der Faktoren in den vorstehenden Beispielen.

3) Multiplikation von Dezimalzahlen mit Dezimalzahlen.

a) 0,6 . 0,7; 3,40 . 3,6; 0,25 . 74,9; 2,730 . 60,8; 0,847 . 0,9; 4,039 . 5,2; 0,406 . 17,9;

b) 0,8 . 0,06; 5,60 . 0,68; 23,47 . 9,43; 0,069 . 64,05; 9,543 . 0,26; 68,402 . 3,45;

c) 56,7 . 0,009; 4,30 . 0,046; 0,89 . 0,507; 53,042 . 0,963; 8,567 . 7,008.

Hierüber noch eine Probe von den angewandten Aufgaben: Wie schwer ist die Luft, die sich in unserm Schulzimmer befindet? (Das Zimmer ist 8,25 m lang, 6,12 m breit und 3,85 m hoch; 1 cbm Luft wiegt 1,299 kg.)

Auch die Division hat wichtige Vorübungen zu erledigen. Hier gilt es, die Regel zu gewinnen, welche für die Lösung aller Aufgaben ausreicht: „Man verwandle den Divisor vor der Ausrechnung in eine ganze Zahl!“ Da diese Operation auf dem Satze beruht: „Der Quotient bleibt unverändert, wenn man Dividend und Divisor mit derselben Zahl multipliziert;“ so wird auch hier am besten von ganzen Zahlen ausgegangen. Man nimmt z. B.

a) 36 : 9 = 4, denn 4 . 9 = 36;
b) 360 : 90 = 4, denn 4 . 90 = 360;
c) 3600 : 900 = 4, denn 4 . 900 = 3600;
d) 36000 : 9000 = 4, denn 4 . 9000 = 36000 ꝛc.

Die nachfolgenden Übungsaufgaben verteilen sich auf vier Gruppen: 1) Ganze Zahl durch ganze Zahl; 2) Dezimalzahl durch ganze Zahl; 3) ganze Zahl durch Dezimalzahl; 4) Dezimalzahl durch Dezimalzahl. Die Einzelfälle werden in ähnlicher Weise wie bei der Multiplikation dadurch gewonnen, daß man überall zwischen ein- und mehrstelligen Zahlen unterscheidet. Wichtig ist die Verbindung der Multiplikation und Division zur Schlußrechnung in angewandten Aufgaben. Beispiel: „Bei 3,75 m Höhe würde der Luftraum eines Schulzimmers 169,5 cbm betragen; wieviel beträgt er, wenn man als Höhe 3,85 m nimmt?

Den Dezimalzahlen folgen die Bruchzahlen. Unter Zugrundelegung von Halben, Dritteln, Vierteln ꝛc. werden behandelt: Entstehung der Bruchzahlen, Zähler und Nenner, echte und unechte Bruchzahlen, gemischte Zahlen, Verwandlung unechter Bruchzahlen in ganze oder gemischte Zahlen und umgekehrt, gleichnamige und ungleichnamige Bruchzahlen, Erweitern und Kürzen, Gleichnamigmachen (Hauptnennersuchen), Wertveränderungen durch Veränderungen am Zähler und Nenner u. s. w. Alsdann schließen sich die Grundrechnungsarten mit Bruchzahlen an.

Bei Addition und Subtraktion sind zunächst nur Fälle mit gleichnamigen Bruchzahlen zu berücksichtigen. Dieselben lassen sich zweckmäßig wie folgt gruppieren: A. *Addition.* 1) Es werden nur Bruchzahlen addiert, deren Summe a) kleiner, b) gleich, c) größer ist als 1 Ganzes. Dabei ist nicht zu kürzen. 2) Es werden Bruchzahlen und gemischte Zahlen addiert, wobei die Summe der Bruchzahlen a) kleiner, b) gleich, c) größer ist als 1 Ganzes. Dabei ist nicht zu kürzen. 3) Es werden gemischte Zahlen addiert, bei denen die Summe der Bruchzahlen ebenfalls a) kleiner, b) gleich, c) größer ist als ein Ganzes. Dabei ist ebenfalls nicht zu kürzen. 4) bis 6) dieselben Fälle wie unter 1) bis 3), aber so, daß am Ende der Rechnung noch zu kürzen ist. B. *Subtraktion.* 1) Minuend und Subtrahend sind Bruchzahlen; der Rest ist nicht zu kürzen. 2) Der Minuend ist eine gemischte, der Subtrahend eine Bruchzahl, letztere ist kleiner als die des Minuenden; der Rest ist nicht zu kürzen. 3) Minuend und Subtrahend sind gemischte Zahlen, die Bruchzahl des Subtrahenden ist die kleinere; der Rest ist nicht zu kürzen. 4) Der Minuend ist eine ganze, der Subtrahend eine Bruchzahl. 5) Der Minuend ist eine gemischte, der Subtrahend eine Bruchzahl, letztere ist größer als die des Subtrahenden; der Rest ist nicht zu kürzen. 6) Minuend und Subtrahend sind gemischte Zahlen, der Subtrahend hat die größere Bruchzahl, der Rest ist nicht zu kürzen. 7) bis 12) Dieselben Fälle wie unter 1) bis 6), doch so, daß der Rest zu kürzen ist. C. *Addition und Subtraktion in Verbindung.* Hier, wie auch schon bei A. und B., Aufgaben mit unbenannten und benannten Zahlen, dazu angewandte Aufgaben.

In der *Multiplikation* werden drei Hauptfälle unterschieden: a) Bruchzahl mal ganze Zahl; b) ganze Zahl mal Bruchzahl; c) Bruchzahl mal Bruchzahl. Die Einzelfälle lassen sich aus folgenden Beispielen leicht erkennen: a) $\frac{1}{3} . 2$; $\frac{2}{5} . 2$; $\frac{1}{7} . 9$; $\frac{5}{8} . 7$; $3\frac{1}{3} . 2$; $2\frac{2}{5} . 2$; $9\frac{1}{6} . 7$; $9\frac{7}{9} . 7$; $\frac{1}{8} . 6$; $\frac{2}{9} . 3$; $\frac{1}{8} . 16$; $\frac{5}{6} . 6$; $\frac{1}{6} . 9$; $\frac{5}{8} . 12$; $4\frac{1}{6} . 4$; $7\frac{2}{9} . 3$; $5\frac{1}{5} . 5$; $9\frac{1}{8} . 16$; $6\frac{1}{4} . 6$; $3\frac{2}{3} . 3$; $6\frac{3}{4} . 10$. b) Die Einzelfälle ergeben sich, wenn die Faktoren in den vorstehenden Aufgaben vertauscht werden. c) $\frac{1}{2} . \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} . \frac{3}{4}$; $\frac{2}{3} . \frac{4}{5}$; $2\frac{3}{5} . \frac{1}{2}$; $2\frac{3}{5} . \frac{2}{3}$; $\frac{5}{7} . 4\frac{1}{2}$; $3\frac{5}{6} . 5\frac{3}{8}$; $\frac{2}{3} . \frac{3}{5}$; $2\frac{1}{2} . \frac{3}{5}$; $3\frac{1}{4} . 3\frac{4}{13}$; $\frac{4}{9} . \frac{3}{8}$; $\frac{8}{15} . \frac{9}{10}$; $1\frac{2}{3} . 2\frac{1}{10}$; $5\frac{5}{12} . 4\frac{4}{15}$.

Dazu Aufgaben mit benannten Zahlen und angewandten Aufgaben.

Die Division bringt vier Hauptfälle: a) Ganze Zahl durch ganze Zahl (Teilung); b) Bruchzahl durch ganze Zahl (Teilung); c) ganze Zahl durch Bruchzahl (Messung); d) Bruchzahl durch Bruchzahl (Messung). Die Einzelfälle ergeben sich aus folgenden Beispielen: a) 1 : 2; 2 : 3; 3 : 2; 149 : 8; 536 : 12; b) $\frac{4}{5} : 2$; $2\frac{1}{2} : 5$; $5\frac{1}{3} : 4$; $633\frac{3}{5} : 12$; $\frac{1}{2} : 2$; $\frac{3}{4} : 2$; $3\frac{1}{2} : 4$; $7\frac{1}{3} : 3$; $\frac{4}{5} : 6$; $439\frac{2}{5} : 19$; $763\frac{5}{7} : 36$; c) $1 : \frac{1}{2}$; $1 : \frac{2}{3}$; $89 : \frac{3}{4}$; $1 : 2\frac{1}{3}$; $79 : 3\frac{5}{8}$; $2 : \frac{2}{3}$; $258 : \frac{3}{4}$; $6 : \frac{4}{9}$; $365 : \frac{15}{16}$; d) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$; $\frac{7}{8} : \frac{4}{5}$; $\frac{23}{25} : \frac{11}{12}$; $\frac{6}{7} : \frac{3}{4}$; $\frac{43}{47} : \frac{3}{8}$; $\frac{5}{9} : \frac{2}{3}$; $\frac{127}{256} : \frac{3}{4}$; $\frac{8}{15} : \frac{4}{5}$; $2\frac{11}{16} : \frac{3}{4}$; $\frac{8}{15} : \frac{6}{7}$; $71\frac{1}{9} : 11\frac{1}{5}$; $3\frac{1}{6} : 2\frac{3}{4}$; $\frac{23}{24} : \frac{13}{16}$; $5\frac{5}{8} : 4\frac{1}{6}$; $7\frac{7}{24} : \frac{14}{15}$. Dazu noch Aufgaben in benannten Zahlen und angewandten Aufgaben. Von besonderer Wichtigkeit ist auch hier die Verbindung der Multiplikation und Division als Schlußrechnung. Beispiel: „Ein Schriftsetzer setzte während des Vormittags in $4\frac{1}{5}$ Stunden $\frac{3}{8}$ Bogen; wieviel bringt er unter gleichen Umständen während eines Tages in $10\frac{2}{3}$ Stunden fertig?“

Methodische Rücksichten bestimmen, auch die Multiplikation und Division in zwei getrennten Gruppen zu behandeln. Erste Gruppe: Multiplikator und Divisor sind ganze Zahlen. Zweite Gruppe: Multiplikator und Divisor sind Bruchzahlen. Die erste Gruppe wird nach der Addition und Subtraktion mit gleichnamigen Bruchzahlen eingeschaltet. Nicht allein wegen ihres Schwierigkeitsgrades. Dieselbe ist namentlich auch für das Kürzen und Erweitern der Bruchzahlen von Bedeutung. Denn letztere sind nichts anderes als eine Verbindung von Multiplikation und Division einer Bruchzahl mit einer ganzen Zahl. Multipliziert man Zähler und Nenner der Bruchzahl $\frac{2}{3}$ mit 5, so hat man dieselbe einerseits mit 5 multipliziert, anderseits durch 5 dividiert. Dividiert man Zähler und Nenner der Bruchzahl $\frac{10}{15}$ durch 5, so hat man dieselbe einerseits durch 5 dividiert und anderseits mit 5 multipliziert. Da nun das Gleichnamigmachen der Bruchzahlen nichts anderes ist als ein Erweitern nach vorhergegangenem Aufsuchen des Hauptnenners und der Erweiterungszahlen, so schließt sich dieses dem Kürzen und Erweitern zweckmäßig gleich an. Also ist hier in der That die geeignetste Stelle, das Verfahren, den Hauptnenner zu suchen, zu lehren.

Was die Sachgebiete anbelangt, so können für die erste Einheit selbstverständlich nur die auf der fünften Stufe herangezogenen in Frage kommen. Für die zweite Einheit eignen sich die dezimalen Münzen, Maße und Gewichte am besten. Die Maße sind teils Längen-, teils Flächen-, teils Körpermaße. Von letztern kennen wir bis jetzt aber nur die Hohlmaße: Hektoliter und Liter. Es fragt sich daher, ob man nicht die Körpermaße im Zusammenhange jetzt einführen soll. Wir entscheiden uns dafür. Der Umstand aber, daß diese Maße nur dann begriffen werden können, wenn gewisse Multiplikationen zur Ausführung gelangen, verweist dieselben jedenfalls in die vierte und fünfte Einheit, zur Multiplikation und Division mit Dezimalzahlen. Für die dritte Einheit, Addition und Subtraktion mit Dezimalzahlen, bieten sich die verschiedenen Fälle des Einkaufs und Verkaufs von Waren als geeignetes Material an. Wertvolle Aufgaben mit Dezimalzahlen liefert namentlich auch die Erdkunde.

Die Einführung in die Rechnung mit Bruchzahlen schließt sich zweckmäßig den nichtdezimalen Maßen, Zeit- und Zählmaßen an. Die Addition und Subtraktion mit Bruchzahlen, welche etwa um die Weihnachtszeit herum zur Behandlung gelangen, knüpfen an diejenigen Weihnachtseinkäufe an, welche nach Schock, Mandel, Dutzend und Stück erfolgen, ziehen weiterhin aber auch noch die Zeitgrößen heran, da der Anfang des bürgerlichen Jahres das Interesse für dieselben jedenfalls mehr als sonst rege sein läßt. Aber auch für die Multiplikation und Division giebt es ein sehr geeignetes Sachgebiet. Einzelne Rechenmethodiker haben bekanntlich die Multiplikation und Division mit Bruchzahlen für überflüssig erklärt, seitdem unsere Münzen, Maße und Gewichte dezimale geworden sind. Allein sie haben nicht bedacht, daß die üblichen Zinsfüße sich nach wie vor in gemischten Zahlen, wie $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{2}{3}$ ꝛc. bewegen. So lange dieses noch der Fall ist, so lange können Multiplikation und Division mit Bruchzahlen auch nicht entbehrt werden. Es besteht also ein enger Zusammenhang zwischen der Multiplikation und Division mit Bruchzahlen und der Zinsenberechnung. Und deshalb ist ein Sachgebiet, welches die Zinsenberechnung fordert, hier auch das geeignetste. Ein derartiges Sachgebiet ist aber jedenfalls die Sparkasse mit ihren auch das Kind in hohem Maßstabe interessierenden Einrichtungen. Daß schließlich auch die mancherlei hauswirtschaftlichen Verhältnisse hier ein brauchbares Sachgebiet abgeben, ist selbstverständlich.

Und so ergiebt sich, nach den methodischen Einheiten geordnet, folgende Reihe der Sachgebiete:

1) Die Sachgebiete der fünften Stufe. 2) Unsere dezimalen Münzen, Maße und Gewichte. 3) Warenverkauf und Warenversand. (Frachttarif.) 4) Unsere Körpermaße (Kubikmeter, Hektoliter, Liter, Kubikcentimeter, Kubikmillimeter). 5) Desgleichen. 6) Zur Erkunde. 7) Unsere nichtdezimalen Maße. 8) Kleine Einkäufe (nach Schock, Mandel, Stück, Dutzend, Gros). 9) Von der Sparkasse. 10) Von der Zeit. 11) Zinsrechnung (im engern Sinne: Aufsuchung der Zinsen). 12) Hauswirtschaftliches. Anschließend auch Aufgaben zu den Reichsversicherungen.

Das alles läßt sich schließlich in folgende sechs Sätze über die Verteilung des Rechenstoffes im sechsten Schuljahre zusammenfassen:

1) Das Zahlgebiet umfaßt a) die Reihe der ganzen Zahlen; b) die Dezimalzahlen; c) die Bruchzahlen.

2) Von diesen drei Gruppen ist nur die erste als bekannt vorauszusetzen; die beiden andern bedürfen einer nochmaligen Grundlegung. Alle drei Gruppen, besonders aber die beiden letzten, werden nach Maßgabe der vier Grundrechnungsarten durchgearbeitet, so zwar, daß die Zahlen als unbenannte und benannte, besonders auch in angewandten Aufgaben auftreten. Der gesamte Rechenstoff gliedert sich in zwölf methodische Einheiten.

3) Als Sachgebiete gelten (außer denen der fünften Stufe): a) für die Dezimalzahlen die dezimalen Münzen, Maße und Gewichte, Einkauf und Verkauf von Waren, Körpermaße, Erdkundliches; b) für die Bruchzahlen die nichtdezimalen Maße, allerlei Einkäufe, die Zeit, die Sparkasse, Hauswirtschaftliches.

4) Die Dezimalzahlen gelten als Fortsetzung der dekadischen (ganzen) Zahlen von den Einern aus abwärts, sie sind daher Systemzahlen (keine Bruchzahlen); den Bruchzahlen liegen Einheiten zu Grunde, welche durch Teilung der Eins (eines Ganzen) entstanden sind.

5) Die vier Grundrechnungsarten kommen teils mit unbenannten, teils mit benannten Dezimal- und Bruchzahlen, besonders auch in angewandten Aufgaben zur Durchführung, und ihre Berücksichtigung ist eine möglichst gleichmäßige; in den Formen der Multiplikation und Division, namentlich

aber in der aus beiden hervorgehenden Schlußrechnung, werden sie in ausgiebigster Weise auf die Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens angewandt.

6) Die schriftlichen Darstellungen haben bei den Dezimalzahlen ausnahmslos nach festen Formen zu erfolgen; bei den Bruchzahlen darf in einzelnen Fällen das mündliche Verfahren die Form des schriftlichen bestimmen.

g) Das siebente und achte Schuljahr.

Fachziel: Das bürgerliche Rechnen. (Schluß- und Prozentrechnungen.)[23])

Durch die Behandlung der Dezimal- und Bruchzahlen im Zusammenhange, wie sie das sechste Schuljahr brachte, hat der theoretische Teil des Rechenunterrichts, soweit derselbe überhaupt in die Volksschule gehört, im wesentlichen seinen Abschluß gefunden. Dem siebenten und achten Schuljahre (den nach unseren Voraussetzungen beiden letzten Volksschuljahren) bleibt vorbehalten, auch den praktischen Teil soweit fortzuführen und abzurunden, daß er als ein abgeschlossenes Ganzes gelten kann. Auf den vorigen Stufen bestimmten meist schon die Rechenoperationen als solche den Fortschritt von einer Einheit zur andern; jetzt, da über sämtliche Rechenoperationen auf allen Zahlgebieten verfügt wird, ist der Rechenstoff im weitern Sinne, also der aus der Natur oder dem Menschenleben entlehnte Stoff, auf welchen die Rechenoperationen angewandt werden, für die Verteilung entscheidend. Allerdings hört die Weiterentwickelung der Rechenoperationen auch jetzt noch nicht auf. Es sind einige Ergänzungen zu machen: gewisse Verfahrungsweisen bei der Addition und Subtraktion ganzer, dezimaler und gebrochener Zahlen, die abgekürzten Rechnungsarten mit Dezimalzahlen, die Verwandlung der Dezimal- in Bruchzahlen, das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel u. dgl. m. Indessen können dieselben doch nur in gehobenen Schulen auf Berücksichtigung Anspruch erheben. Dagegen dürfen unter den Rechenstoffen jetzt solche, die im Sachunterrichte (Geschichte, Erdkunde, Naturkunde) behandelt worden sind, nicht fehlen. Auch müssen, da viele der im bürgerlichen Leben vorkommenden Verhältnisse den Kindern der beiden letzten Schuljahre nicht unbekannt sind, solche in größerem Umfange als vordem herangezogen werden. Außerdem führt die Verknüpfung des Rechnens mit der Geometrie zu wichtigen Aufgabengruppen u. s. w.

Von den Grundrechnungsarten werden jetzt ungleich mehr als die Addition und Subtraktion die Multiplikation und Division in Gebrauch genommen. Ganz besonders aber die schon auf der fünften und sechsten Stufe vorbereitete Verbindung beider, die Schlußrechnung. Man kann wohl sagen, daß der ganze praktische Teil des Volksschulrechnens,

23) Vergl. Rechenbuch, Heft 6 (Ausg. A).

namentlich aber der der Oberstufe, auf der Schlußrechnung beruht. Zwar giebt es für die einzelnen Unterabteilungen des praktischen Rechnens eine ganze Reihe von Namen, und manche Rechenbücher scheinen sich darin zu gefallen, dieselben möglichst vollständig vorzuführen. Diese Namen sind aber nach unserer Auffassung weder nötig noch nützlich. Nicht nötig: denn sie bezeichnen weder die Sachgebiete noch die Operationen genügend scharf; nicht nützlich: denn sie führen in den Köpfen vieler Kinder zur Verwirrung anstatt zur Klarheit. Das soll aber keineswegs heißen, daß nun auch die unter jenen Namen aufgeführten Aufgaben wegbleiben sollen. Was davon zum Notwendigen gehört, muß behandelt werden. Das Wünschenswerte möge unter besonders günstigen Verhältnissen Berücksichtigung finden, das Entbehrliche aber bleibe besser ganz fern. Zum Notwendigen dürften gewisse Teilungen nach vorgeschriebenen Verhältnissen (Gesellschaftsrechnung), Durchschnitts- und Mischungsrechnungen u. dgl. m. neben einfachen Zins- und Prozentrechnungen, Einkaufs- und Verkaufsrechnungen, Raumrechnungen u. s. w. zu zählen sein.

Bei der Lösung aller dieser Rechenaufgaben ist die Einhaltung übersichtlicher, möglichst rasch zum Ziele führender Formen nicht zu unterschätzen. Diese Formen, unter der Bezeichnung „Ansätze“ bekannt, müssen aber das Ergebnis gemeinsamer Schularbeit sein, auch haben sie sich möglichst eng den sprachlich korrekten mündlichen Darstellungen anzuschließen.

Diese Bemerkungen dürften ausreichen, um die für das siebente und achte Schuljahr in unserm Rechenbuche aufgestellten zwölf methodischen Einheiten zu rechtfertigen. Diese Einheiten sind nämlich: A. Für das siebente Schuljahr. 1) Wiederholungsaufgaben (im Anschlusse an die vorhergehenden Stufen). 2) Schlußrechnung (ohne und mit Nebenbestimmungen, mit geraden und ungeraden Verhältnissen). 3) Schlußrechnung (ebenso). 4) Prozentrechnung (gesucht werden: a) Zinsen; b) Zinsfuß). 5) Prozentrechnung (Gewinn und Verlust; Preisänderungen). 6) Prozentrechnung (Zu- und Abnahmen; Bestandteile). Anschließend Aufgaben zu den Reichsversicherungen und zur Einkommensteuer. B. Für das achte Schuljahr. Erweiterungen und Abschlüsse. 7) Zu den Grundrechnungsarten. 8) Zur Schluß- und Prozentrechnung (Zusammengesetzte Schlußrechnung, Verteilungs- und Mischungsrechnung; Kapital und Zeit werden gesucht, Zinseszins und Promillerechnung). 9) Für besondere Lebensverhältnisse (darunter Warenrechnung, Diskontrechnung). Anschließend Aufgaben zu den Reichsversicherungen und zur Einkommensteuer. 10) Aus andern Unterrichtsfächern. 11) Desgleichen (insbesondere auch Raumlehre). 12) Ausländische Münzen, Maße und Gewichte. Anhang: Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel.

Aus diesen Überschriften lassen sich die Sachgebiete bereits erkennen. Es sind in der Reihenfolge der methodischen Einheiten folgende:

1) Sachgebiete der sechsten Stufe. 2) Preise und Löhne. 3) Messen, Zählen und Wägen. 4) Gelderwerb durch Geld. 5) Gelderwerb durch Handel (Warenrechnung): a) Gewinn und Verlust; b) Preisänderungen, insbesondere Steigen und Sinken der Preise, Preisaufschläge und Preis-

abzüge. 6) Zur Natur-, Länder- und Völkerkunde. 7) Unsere Münzen, Maße und Gewichte. 8) Die Sachgebiete der Einheiten 2) bis 6). 9) Aus dem bürgerlichen Leben: Hauswirtschaftliches, Landwirtschaftliches, Gewerbliches und Kaufmännisches. 10) Geschichte und Erdkunde: Zur Bibelkunde, Weltgeschichte, Erdkunde. 11) Naturkunde und Raumlehre: Zur Naturgeschichte, Naturlehre, Raumlehre. 12) Ausländische Münzen, Maße und Gewichte: a) Münzen; b) Längen-, Flächen- und Körpermaße. c) Gewichte.

Über die Rechenoperationen ist folgendes zu bemerken. Die erste Einheit gliedert sich in mehrere Gruppen. In der ersten Gruppe werden außer unserm Münz-, Maß- und Gewichtssysteme die Zeit- und Zählmaße zusammengestellt, in der zweiten Gruppe ganze und dezimale Zahlen nach ihren Eigenschaften berücksichtigt und in der dritten Gruppe Aufgaben aus allen Gebieten des Rechnens, soweit dieselben bis zur sechsten Stufe bearbeitet worden sind, in geordneter Folge geboten. Die zweite und dritte Einheit, welche die Schlußrechnung im Zusammenhange bringen, unterscheiden die drei Hauptfälle der Schlußrechnung: a) Schluß von der Einheit auf die Mehrheit; b) Schluß von der Mehrheit auf die Einheit; c) Schluß von einer Mehrheit auf eine andere über die Einheit. In jedem Falle giebt es aber Aufgaben a) ohne und b) mit Nebenbestimmungen, außerdem Aufgaben mit a) geraden und b) ungeraden Verhältnissen. In der vierten und fünften Einheit, die für die Prozentrechnung bestimmt sind, werden a) Kapitalzinsen, b) Zinsfuß, c) Gewinn und Verlust, d) Preisänderungen im Geld- und Warenhandel berechnet. Die sechste Einheit dehnt die Prozentberechnung auf die Verhältnisse der Natur, der Länder und Völker aus. Die siebente Einheit behandelt Zahlen, welche über die Million hinausreichen, berücksichtigt Rechenvorteile bei den Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen (Ergänzung zu Zehnern bei Addition längerer Summandenreihen, Subtraktion durch Aufwärtszählen, Division mit sofortiger Niederschrift der Reste, Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Faktors), bringt die abgekürzten Rechnungen mit Dezimalzahlen, Vorteile beim Rechnen mit Bruchzahlen, Verwandlung derselben in Dezimalzahlen und umgekehrt. Die achte Einheit ergänzt die Schlußrechnung durch Aufgaben aus der zusammengesetzten Schlußrechnung, sogenannten Gesellschaftsrechnung, Durchschnitts- und Mischungsrechnung, während die Prozentrechnung durch Hinzunahme der Kapital- und Zeitberechnung, der Zinseszins- und Promillerechnung bereichert wird. Die neunte Einheit bringt Aufgaben, welche nicht nach Rechenoperationen geschieden sind, ebenso die zehnte und elfte Einheit. Hier treten die Grundrechnungsarten einzeln sowohl als in Verbindung auf. Es kommen Aufgaben vor, die nach den Regeln der Schlußrechnung, wiederum andere, die nach denen der Prozentrechnung zu lösen sind. Eine besondere Stellung nehmen die im Anschlusse an die Geometrie gegebenen Aufgaben ein. Hier wird eine Reihe von Berechnungsregeln auf Grund sachlicher Verhältnisse gewonnen, es wird ferner quadriert und kubiert, und schließlich werden Quadrat- und Kubikwurzeln gezogen. Die zwölfte Einheit bringt Umrechnungsaufgaben.

Aus dem Gesagten leiten wir folgende Sätze für die **Verteilung des Rechenstoffes im siebenten und achten Schuljahre** ab:

1) Das Zahlgebiet umfaßt a) die unbegrenzte Reihe der ganzen Zahlen, b) die Dezimalzahlen und c) die Bruchzahlen.

2) Alle drei Gebiete sind als bekannt vorauszusetzen, ebenso alle gebräuchlichen Operationen innerhalb derselben. Daher wird der Fortschritt von einer Einheit zur andern weniger durch die Rechenoperationen als durch die Stoffe, auf welche diese Operationen angewandt werden, bestimmt. Im ganzen werden zwölf methodische Einheiten unterschieden.

3) Als **Sachgebiete** gelten die Bedürfnisse des täglichen Lebens, der Geldverkehr beim Verborgen, Einkaufen und Verkaufen, Zunahmen und Abnahmen aller Art, haus- und landwirtschaftliche, gewerbliche und kaufmännische Vorkommnisse, die Gebiete der Geschichte, Erdkunde, Naturkunde und Geometrie, die ausländischen Münzen, Maße und Gewichte.

4) Der zwischen Dezimal- und Bruchzahlen bestehende Zusammenhang ist zwar zu berücksichtigen, doch nur unter günstigen Schulverhältnissen. Dasselbe gilt von einigen Erweiterungen der vier Grundrechnungsarten und der Quadrat- und Kubikwurzelausziehung.

5) Von den vier Grundrechnungsarten treten Multiplikation und Division mehr als Addition und Subtraktion hervor, ganz besonders aber bildet die unter dem Namen Schlußrechnung bekannte Verbindung der Multiplikation und Division die Grundlage der meisten Aufgaben des praktischen Rechnens.

6) Unter den schriftlichen Darstellungsformen sind jetzt die sogenannten **Ansätze** von besonderer Wichtigkeit, da sie auf kürzestem Wege die Lösung der Aufgaben einleiten und auch die sprachlich korrekte mündliche Darstellung wesentlich fördern.[24])

h) Ergänzende Bemerkungen.

Indem durch das Vorstehende der Rechenstoff der deutschen Volksschule auf acht Schuljahre verteilt wird, erscheint jeder für ein Zwischen-Schuljahr bestimmte Teil desselben als ein Stoffausschnitt, welcher nach unten und oben Anschluß hat. Derselbe hat den Stoff des vorhergehenden Schuljahres weiterzuführen und den des nachfolgenden vorzubereiten, er soll also **weiterführender und vorbereitender** Stoff zugleich sein. Als verbindende Glieder werden von einem Schuljahre zum andern diejenigen methodischen Einheiten eingeschaltet, welche **Wiederholungsaufgaben** enthalten. Daß dieselben von größter Wichtigkeit sind, bedarf keines besondern Nachweises. Aber auch sie reichen noch nicht aus, um volle Sicherheit und Geläufigkeit im Gebrauche des Rechenlehrstoffes herbeizuführen. Deshalb werden jeder methodischen Einheit noch zwei Aufgaben-

24) Über die Verteilung des Rechenstoffes in ein-, zwei-, drei- u. s. w. stufigen Schulen geben die zu jeder Ausgabe des Rechenbuchs erschienenen **Lehrerhefte** genauere Auskunft.

gruppen beigegeben: Aufgaben für Proberechnen und Aufgaben für fortlaufende Übungen.[25] Jene sollen zeigen, ob der Zögling über den Stoff der letzten Einheit verfügt, diese sollen helfen, daß Sicherheit und Geläufigkeit innerhalb des ganzen bis dahin durchlaufenen Stoffgebietes immer größere werden.

Die Stoffabschnitte der einzelnen Schuljahre sind von uns nach Umfang und Inhalt genau bestimmt worden. Daß es sich dabei zur Zeit noch nicht um allgemein anerkannte Stoffmengen handelt, folgt schon aus dem Paragraphen, welcher sich über die Rechenstufen verbreitet[26] Im Interesse aller deutschen Rechenschüler und Rechenlehrer läge es aber sicher, wenn unsere auf wohlerwogener Grundlage ruhende und seit Jahren bewährte Stoffverteilung zur allgemeinen Geltung käme. Die einseitige Klage der Eltern, daß auch die Volksschule ihre Schüler überbürde, müßte dann, soweit sie sich auf das Rechnen bezöge, verstummen, die gemeinsame Klage der Eltern und Lehrer, daß die Erfolge des Rechenunterrichts keine der aufgewandten Zeit und Kraft angemessenen seien, ebenfalls. Besonders in den ersten drei Schuljahren, denen wir, entgegen der zumeist noch üblichen Stoffverteilung, die Reihen 1 bis 10 und 1 bis 100 zuweisen, würde sich das zeigen. Aber auch weiterhin und namentlich wieder in den beiden letzten Schuljahren.

An Anzeichen, welche darauf hindeuten, daß unser Standpunkt mehr und mehr Anklang findet, fehlt es zwar heute nicht mehr. Die große Verbreitung, welche unser Rechenbuch in Stadt- und Landschulen des ganzen deutschen Reiches binnen wenigen Jahren gefunden hat, ist ein solches Anzeichen. Auch hat sich die Versammlung des sächsischen Schuldirektorenvereins besonders zu unsern die ersten vier Schuljahre betreffenden Vorschlägen im Jahre 1891 bekannt. Dazu kommen noch die zahlreichen zustimmenden Beurteilungen unserer Rechenwerke in pädagogischen Blättern. Indessen ist das doch immer nur ein Anfang, die Hauptsache muß erst noch kommen. Und sie kann nur kommen, wenn man sich auf die alte Wahrheit besinnt: Nicht möglichst hohe, sondern sicher erreichbare Ziele hat sich die Volksschule zu stecken! Überlassen wir die hohen Ziele den „höheren" Schulen. Die Volksschule darf ihren Ruhm in der Sicherheit und Geläufigkeit des Wissens und Könnens dessen, was sie durchgearbeitet hat, suchen. Nicht das Was? allein ist das Entscheidende, sondern auf das Wie? kommt es an. Nicht in der Quantität, sondern in der Qualität des Wissens und Könnens müssen die Volksschulen einander zu überbieten suchen. Dazu noch eine kleine, jedenfalls lehrreiche Geschichte.

Ein österreichischer Beurteiler unserer Rechenbücher hat wiederholt bemerkt, dieselben möchten allenfalls für Landschulen ausreichen, für Stadt-

25) Diese Übungen findet man für Ausgabe A in den Schülerheften, für die Ausgaben B, C und D in den Lehrerheften.

26) Vergl. S. 152.

schulen aber forderten sie viel zu wenig.[27]) Das ist deutlich. Mancher Stadtschullehrer, der es gelesen hat, wird sich danach gesagt haben, es lohnt nicht, diese Rechenbücher anzusehen. Andere wieder, die sie trotzdem ansahen, werden einen gewaltigen Respekt vor den Leistungen der österreichischen Volksschulen in Stadt und Land bekommen haben. Wir selbst aber haben alle Ursache, dem österreichischen Kollegen für seine Bemerkungen — recht dankbar zu sein. Denn wenn irgend etwas, so waren sie geeignet, uns Gewißheit darüber zu verschaffen, daß wir uns — auf dem richtigen Wege befinden. Und das kam so. Annaberg, die bedeutendste Stadt des Obererzgebirges, übt auch auf die benachbarten österreichischen (böhmischen) Städte und Dörfer, welche auf der Linie Komotau — Karlsbad und nördlich davon liegen, eine große Anziehungskraft aus. Eine Folge davon ist, daß alljährlich durchschnittlich 15 junge Leute aus diesen Ortschaften nach Annaberg kommen, um in Geschäften der verschiedensten Art als Lehrlinge einzutreten. Diese jungen Leute sind nach einem Übereinkommen der sächsischen und österreichischen Regierung in Sachsen fortbildungsschulpflichtig. Und so liegt jedenfalls für manchen sächsischen Schulmann die Möglichkeit vor, die Leistungen österreichischer Schüler im Rechnen kennen zu lernen. Für uns insbesondere handelt es sich um die Leistungen von mehr als 200 österreichischen Schülern, welche ihren Zeugnissen zufolge das Ziel ihrer heimischen Volks- oder Bürgerschule erreicht hatten. Was aber leisteten dieselben im Rechnen? Hier steht's: Viele waren in den Grundrechnungsarten noch sehr unsicher; andere verfügten über dieselben zwar annähernd, zeigten sich aber doch außerstande, angewandte Aufgaben selbständig zu lösen; nur sehr wenige gab es, die den Anforderungen, welche die sächsische Volksschule an Schüler, die das Schulziel gut erreicht haben sollen, im Rechnen stellt, genügten. Und wie verhielten sich die Leistungen dieser Schüler zu denen der sächsischen bei entsprechenden Zensurgraden? Auch hier können wir uns kurz fassen: Die größere Sicherheit und Geläufigkeit war stets auf seiten der sächsischen Schüler. Hunderte von Belegen dafür befinden sich noch in unsern Händen! Sollte aber der Einwand erhoben werden, daß diese Leistungen wesentlich durch die den österreichischen Schülern neuen sächsischen Verhältnisse bedingt seien, so bemerken wir ausdrücklich, daß den österreichischen Schülern jederzeit, besonders aber in den Prüfungen, gestattet wurde, in ihrer heimischen Weise zu rechnen.

Exempla docent. Was die kleine Geschichte uns gelehrt hat, haben wir bereits gesagt. Was der Leser derselben entnehmen kann, liegt nahe. Was aber unser österreichischer Beurteiler, sollte er sie zu Gesicht bekommen, daraus lernen möchte, das wollen wir noch hinzufügen: Forderungen, denen nur eine kleine Zahl von Schülern genügen kann, dürfen für die Volksschule nicht als mustergiltige hingestellt werden!

---

27) Vergl. Päd. Jahresberichte für 1886 bis 1891. Leipzig, Brandstetter.

§ 20.

Verbindungen des Lehrstoffs.

Litteratur. Bergner, Materialien zur speziellen Pädagogik von T. Ziller. (3. Aufl. des Leipziger Seminarbuchs.) Dresden 1886. Conrad, P. Ein Handbuch für den Rechenunterricht. Dörpfeld, F. W. Grundlinien einer Theorie des Lehrplans. Hartmann-Ruhsam, Rechenbuch. (Schüler- und Lehrerhefte.) Just, K. Das Rechnen im ersten Schuljahre. Krusche, G. Beiträge zur Methodik des Rechenunterrichts. Leipziger Seminarbuch (im 5. Jahrbuche des Vereins für wiss. Päd.). Pädagogische Warte. Wochenschrift. Leipzig, Schneider. Praxis der Erziehungsschule. Monatsschrift. Altenburg, Pierer. Rein, Pickel und Scheller, Schuljahre. Teupser, J. K. Das Rechnen im zweiten Schuljahre. Hierüber: Rechenbücher von Backhaus, Büttner, Bußmann, Dorschel-Lindau, Gadow & Sohn, Gasser, Haesters und Röhm, Heinze und Hübner, Hentschel, Knabe und Ostwald, Schröter, Steuer. (Litteraturbericht S. 229 f.) Schriften über die Sachgebiete des Rechnens (§ 13), zur Konzentration des Unterrichts und zum erziehenden Unterrichte (§§ 8. 9.).

Wiederholt ist darauf hingewiesen worden, daß der Rechenunterricht von Sachgebieten auszugehen habe und daß die Zahlen und Zahloperationen auf die Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens anzuwenden seien. Auch ist die Verbindung der Grundrechnungsarten unter einander selbst betont worden. Es waren dieses aber nur vereinzelt auftretende Andeutungen, die gegenüber der Wichtigkeit der Sache, auf welche sie sich beziehen, noch nicht als ausreichende gelten können. Denn wie bei jedem Unterrichtsfache, so müssen auch beim Rechnen von vornherein Vorkehrungen getroffen werden, durch welche in planmäßiger Weise einerseits die Herstellung eines einheitlichen Gedankenkreises innerhalb des Faches selbst, anderseits die Gewinnung fester Beziehungen zu den übrigen Unterrichtsfächern (behufs gegenseitiger Unterstützung) und zu gewissen Verhältnissen des Menschenlebens gesichert werden. Da aber der Rechenunterricht zu den formunterrichtlichen Fächern gehört, so muß in der Verbindung, welche er innerhalb seiner eigenen Grenzen und mit andern formunterrichtlichen Fächern eingeht, das Formale, in der Verbindung, welche er mit den sachunterrichtlichen Fächern und gewissen menschlichen Verhältnissen unterhält, das Materiale in den Vordergrund treten. Wir unterscheiden daher zweckmäßig Verbindungen formaler und materialer Natur.

a) Verbindungen formaler Natur.

Die Grundlage des Volksschul-Rechenunterrichts ist die Reihe der ganzen Zahlen. Weiterhin schließen sich an die Reihen der Dezimal- und Bruchzahlen. Zwischen diesen Reihen sind jetzt Verbindungen herzustellen: die Dezimalzahlen treten als Fortsetzung der ganzen Zahlen abwärts von den Einern auf; die Bruchzahlen erhalten ihre Einheiten durch Teilung der Einheit der ganzen Zahlen, der Eins. Diese Verbindungen werden am Anfange der zusammenhängenden Behandlung der

Dezimal- und Bruchzahlen betont. Die Verbindung der Dezimalzahlen mit den Bruchzahlen findet, wenn überhaupt, erst nach jener Behandlung Berücksichtigung in der Verwandlung der Bruchzahlen in Dezimalzahlen und umgekehrt. Der Wert aller dieser Verbindungen beruht darauf, daß sie die Zahlkenntnis und das Zahlverständnis wesentlich vertiefen, mithin das theoretische Rechnen mittelbar fördern. Dem praktischen und theoretischen Rechnen gleicherweise dienstbar erweisen sich die mannigfachen Verbindungen der Zahlen in den Rechenoperationen. Schon die Entwickelung der vier Grundrechnungsarten hat darauf Rücksicht zu nehmen. Die Grundlage derselben bildet die Addition, das Zuzählen. Die Umkehrung der Addition, das Abzählen, bringt die Subtraktion. Praktisch verwertet finden wir den Zusammenhang der Subtraktion mit der Addition in dem bekannten Verfahren, nach welchem die Differenz durch Ergänzung des Subtrahenden zum Minuenden bestimmt wird. Die Addition gleicher Summanden führt zur Multiplikation, die Division darf als Umkehrung der Multiplikation sowohl (beim Teilen und Messen), wie auch als fortgesetzte Subtraktion gleicher Subtrahenden (beim Messen) aufgefaßt werden. Mehr noch greifen ins praktische Rechnen aber diejenigen Verbindungen ein, in denen mehrere Rechenoperationen gleichzeitig bei Lösung einer Aufgabe Verwendung finden. Schon auf der Unterstufe sind solche Aufgaben, wenn auch (um die kleinen Rechner nicht zu überanstrengen) mit Vorsicht heranzuziehen. Die als Taktrechnen von uns im Rechenbuch aufgeführten Aufgaben gehören hierher. Verbunden werden können, abgesehen von der Wiederholung einer Operation: a) zwei Operationen, nämlich Addition und Subtraktion, Addition und Multiplikation, Addition und Division, Subtraktion und Multiplikation, Subtraktion und Division, Multiplikation und Division; b) drei Operationen, z. B. Addition, Subtraktion und Multiplikation; Addition, Subtraktion und Division u. s. w. c) vier Operationen, also Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Die bei weitem wichtigste aller dieser Verbindungen ist die Verbindung der Multiplikation mit der Division in der Schlußrechnung, denn diese beherrscht den praktischen Teil des Rechenunterrichtes fast ausschließlich.

Eine andere hierher gehörige Verbindung entsteht durch Anwendung des Rechnens auf die Geometrie. Schon die Entwickelung der Quadrate und Kuben erfolgt zweckmäßig unter Anlehnung an die entsprechenden geometrischen Gebilde. Mehr noch wollen die Berechnungen von Längen, Flächen und Körpern besagen, welche ebensosehr der Geometrie als dem Rechnen angehören und bei denen die Verwendung von Multiplikation und Division wieder vorherrscht. Auch ist der Verbindung von Kopf- und Tafelrechnen, der Anwendung von Rechenvorteilen, der Wiederholung gewisser Rechenfälle, insbesondere des Einsundeins, Einsvoneins, Einsmaleins und Einsdurcheins, sowie des Aufbaues der verschiedenen Systeme benannter Zahlen zu gedenken.

Endlich darf nicht unbeachtet bleiben, daß auch Beziehungen formaler Natur zum Schreib-, Zeichen- und Gesangunterrichte vorliegen. Zum

Schreibunterrichte: das Zifferschreiben bringt eine solche Beziehung, außerdem das Taktschreiben. Zum Zeichenunterrichte: hier giebt es zu messen, es sind Verhältnisse zu bestimmen u. dgl. m. Zum Gesange: die verschiedenen Taktarten, die Notenwerte und Geschwindigkeiten geben dazu Veranlassung.

b) Verbindungen materialer Natur.

Es steht fest, daß Sachgebiete, mit denen das Kind genügend vertraut ist, die besten Ausgangspunkte für den Rechenunterricht abgeben. Das meinte schon Pestalozzi, indem er die Notwendigkeit der unmittelbaren Anschauung immer und immer wieder betonte. Derselben Ansicht waren aber auch alle bedeutenden Rechenmethodiker nach ihm. In diesem Sinne haben sich neuerdings namentlich Methodiker Herbartscher Richtung vernehmen lassen, wir erinnern nur an Dörpfeld und Ziller. „Auch die selbständigen Fertigkeiten — Rechnen, Singen, Zeichnen — müssen den Zusammenhang mit der Basis alles Unterrichts, mit den Wissensfächern (Sachgebieten), festhalten," lautet der sechste Grundsatz in Dörpfelds „Theorie des Lehrplans".[1]) Im „Leipziger Seminarbuche" aber heißt es: „Die Disziplinen Rechnen und Mathematik sind beide stets von den Sachgebieten (gesinnungs- und naturkundlichen, bez. geographischen Stoffen) aus durchzuarbeiten, denen sie genauere Bestimmungen in Bezug auf die formale Seite der Natur beifügen. Dadurch gewinnen die Sachgebiete an Bestimmtheit und Deutlichkeit und die beiden Disziplinen selbst an Interesse. Im Rechnen ist daher von der sogenannten benannten Zahl zur unbenannten überzugehen . . ."[2]) Und in seinem Aufsatze: „Mängel im angewandten Rechnen" faßt Krusche beide Forderungen wie folgt zusammen: „Die Fertigkeit im Gebrauche der Zahlen und in der Lösung der Rechenaufgaben ist nicht in der Weise zu erzielen, daß der Stoff als eine zufällige oder willkürliche Einkleidung erscheint, wie dies bei der oben bezeichneten Art der Aufgabensammlungen thatsächlich der Fall ist. Vielmehr handelt es sich, wie Ziller in seiner ‚Grundlegung' sehr richtig hervorhebt, vor allem darum, daß der Zögling die Zeit- und Raumverhältnisse des Lebens, der Geschichte und Natur, die Beziehungen des Einzelnen zum Verkehr, zur Gesellschaft, zum Staat, die auf quantitative Bestimmungen führen (was sehr wesentliche Seiten von Natur und Menschenwelt sind), auffassen lernt."[3])

Das alles gilt bereits für das Rechnen im ersten Schuljahre, also für die Behandlung der Grundzahlen. Denn über einige Sachgebiete verfügt das Kind schon beim Eintritte in die Schule, andere bietet ihm der „Anschauungsunterricht" rechtzeitig dar. Es kann sich dabei selbstverständlich nur um Sachen handeln, die man auch wirklich zu zählen

1) Dörpfeld a. a. O., S. 75.
2) A. a. O. S. 217.
3) Deutsche Blätter für erziehenden Unterricht. Langensalza 1882. S. 402.

pflegt, die gleichsam zum Zählen auffordern, und nicht um Sachen, die man allenfalls zählen kann. Also nicht nur oder vorwiegend um „die drei Leute, die im Hause des Sternthalermädchens waren, als Vater und Mutter noch lebten," nicht um „die fünf kleinen Mädchen, welche im ersten Märchen auftreten", oder um „die sieben Geißlein mit ihrer Mutter im Märchen."[4]) Sondern um Sachgebiete, wie sie in unserm Rechenbuche vorkommen: Schulzimmer, Schulkinder, Fenster, Finger, Wochentage, Kegelspiel, kleine Geldstücke u. s. w.

Mehr noch gilt das Gesagte aber für die spätern Schuljahre. Die Zahlreihe wird in diesen fortgesetzt erweitert und die Grundrechnungsarten werden auf die Erweiterungen übertragen; zu den ganzen Zahlen treten die Dezimal- und Bruchzahlen. Da schließen sich ganz zweckmäßig auch die eigentlichen Sachgebiete des Rechnens, die Münzen, Maße und Gewichte, die verschiedenen Zähl- und Zeitmaße in stufenmäßiger Aufeinanderfolge an. Sachgebiete des Rechnens nennen wir sie aus zwei Gründen: erstens, weil sie eine gründliche sachliche Behandlung erfordern, und zweitens, weil für eine solche außer im Rechenunterrichte selbst kein recht geeigneter Platz sich finden läßt, wenigstens nicht immer und zur rechten Zeit. Wenn also vom Gelde die Rede ist, so genügt es durchaus nicht, zu wissen, daß die Mark 100 Pfennig hat; es muß auch mit den Münzen als solchen Bekanntschaft gemacht werden. Das Liter und seine Verwendung muß sachlich behandelt werden, die gebräuchlichen Gewichtsstücke dürfen dem Kinde nicht unbekannt bleiben, ebensowenig später der Zusammenhang zwischen den Maßen und Gewichten. Wozu die verschiedenen Maße und Gewichte gebraucht werden, das gilt als mindestens eben so wichtig, wie die rein formale Addition von Metern, Kilogrammen u. dgl. m. Eine eingehende sachliche Behandlung erfordern ganz entschieden auch die Zeitmaße, schon deshalb, weil ohne sie z. B. das bürgerliche Jahr nicht zu verstehen ist, ganz abgesehen von ihrer Bedeutung für den Geschichtsunterricht u. dgl. m. Ebenso weisen die Zählmaße auf ganz bestimmte Sachgebiete hin: Schock, Mandel und Stück auf andere als Gros, Dutzend und Stück. Und das Geld im Handel und Wandel, wieviele Sachgebiete, auf welche andere Fächer nicht führen, werden da berührt! Unser Rechenbuch gedenkt besonders der Sparkasse, da diese vor allem geeignet erscheint, das Kind mit einer Reihe wichtiger Begriffe, z. B. Kapital, Zins, Prozent, Gläubiger, Schuldner u. s. w. bekannt zu machen. Es widmet aber auch der Haus- und Landwirtschaft, den gewerblichen und kaufmännischen Vorkommnissen besondere Abschnitte.

Und über das alles noch die Verbindungen des Rechnens mit den Sachgebieten, welche in besondern Unterrichtsstunden zu behandeln sind: Geschichte (biblische und profane), Erdkunde, Naturgeschichte und Naturlehre. Sie dürfen in keinem Falle übersehen werden, denn sie schließen eine solche Fülle des Anregenden und Bildenden in sich, wie keine andere

4) Rein, Das erste Schuljahr, 2. Aufl. S. 144. Just a. a. O. S. 183 f.

Partie des Volksschulrechnens sie aufzuweisen hat. Übersehen darf man hierbei freilich nicht, daß die entsprechenden sachlichen Belehrungen für diese Gebiete nicht in den Rechenunterricht, sondern in den betreffenden Sachunterricht gehören. Es setzt also die rechnerische Behandlung die sachliche noch in anderm Sinne als bei den vorhergenannten Sachgebieten voraus. Damit die sachliche Behandlung aber auch jetzt genügend ausgenutzt werden kann, erscheint es wünschenswert, daß sachliche und rechnerische Behandlung der Zeit nach möglichst zusammenfallen. Ob sich dieses ohne Zwang immer einrichten läßt, ist freilich eine andere Frage, und es könnte, wollte man daran durchaus festhalten, wohl kommen, daß die Folge eine Stoffzerreißung in rechnerischem Sinne wäre. Diese muß selbstverständlich vermieden werden. Nur die Vorausbehandlung des betreffenden Sachgebietes darf in keinem Falle unterbleiben.

Schon oben ist darauf hingewiesen worden, daß der Vorteil solcher Verbindungen des Rechnens mit den Sachunterrichtsfächern für beide Teile ein gleich großer ist. In die Verhältnisse der Sachgebiete kommt größere Klarheit, während das Rechnen an Interesse gewinnt. Die Stoffverteilung unseres Rechenbuches aber zeigt, in welcher Aufeinanderfolge die Verbindungen stattfinden können. Zuerst (d. h. im ersten und zweiten Schuljahre) erweisen sich die im sachlichen Anschauungsunterrichte behandelten Stoffe als gut verwendbare; weiterhin lassen sich Naturgeschichte und Heimatkunde (im dritten und vierten Schuljahre) heranziehen. Vom fünften Schuljahre ab können Geschichte und Erdkunde auftreten; im siebenten und achten Schuljahre endlich kommt auch die Naturlehre hinzu.[5])

Ein Haupterfordernis für alle diese Aufgabengruppen bleibt stets die innere Verwandtschaft der einzelnen aufeinanderfolgenden Aufgaben. In dieser Hinsicht aber lassen, wie der Kundige weiß, fast alle Rechenwerke noch viel zu wünschen übrig. Die meisten derselben ordnen bis zum letzten Schuljahre die Aufgaben lediglich nach den Rechenoperationen, also nicht nach ihrer sachlichen Verwandtschaft an, und das hat oft ein so buntes Sachallerlei zur Folge, daß das Kind fast mit jeder nächsten Aufgabe in ein neues Sachgebiet geführt wird. Und wenn auch eine einfache psychologische Erwägung sagt, daß dergleichen selbst dann, wenn gute Rechenlehrer den Unterricht erteilen, zerstreuend wirken muß; so hat es vorläufig doch noch nicht den Anschein, als sollte es in dieser Beziehung bald anders, nämlich besser werden. Wer das bezweifelt, sehe sich nur einige unserer verbreitetsten Rechenwerke an; sie halten es fast ausnahmslos noch mit der alten Praxis, d. h. mit dem Sachallerlei, sobald sie angewandte Aufgaben bringen. Ja, ihre angewandten Aufgaben sind meist gar keine solchen, sondern nur in Worte gekleidete Übungsaufgaben, nackte Zahlbeispiele, denen ein Mäntelchen umgehängt worden ist. Einige Beispiele werden das zeigen.

Backhaus verwendet in 15 aufeinanderfolgenden Aufgaben als

5) Vergl. Rechenbuch 1. bis 6. Heft. (Ausg. A.) Dazu die Lehrerhefte. Auch oben S. 193 f.

Sachen: Frachtfuhren, Getreideernte, Schweinschlachten, Schulkinderzahl, Tage des Jahres, Pferdeverkauf, Wiesenhandel, Weinhandel, Geldausgabe, Baumbestand, Lebensalter, Faßinhalt, Schafherde, Haselnußverteilung, Kirschbäume.[6]) Büttner geht ohne Aufenthalt von Länge und Breite eines Gartens zu den Kindern einer Schulklasse über, läßt darauf mit dem Alter eines Vaters und seines Sohnes rechnen, bestimmt das Verhältnis der Kaffee- und Zuckerpreise, des Arbeitslohnes von Mann und Frau, des Preises von Buchen- und Fichtenholz, kommt dann zum Mehlverbrauche in einer Haushaltung, zur Fahrgeschwindigkeit von Eisenbahn und Post, Versorgung einer Festung mit Proviant u. s. w.[7]) Bußmann führt seine Rechner in der einklassigen Volksschule unmittelbar nacheinander vom Saatfelde an einen Wasserbehälter, aufs Schiff, auf ein Getreidefeld, in die Kaserne, an den Webstuhl, in eine Familie, einen Krämerladen, Kuhstall, den Bahnwagen u. s. w.[8]) In der Umarbeitung von Dorschel-Lindau stehen beisammen: Ankauf eines Damenkleides, Kindererbschaft, Theatervorstellung, Eisenbahnbau, Goldgehalt einer Doppelkrone, Glockenmetall, Wasserzusammensetzung.[9]) Das Hildburghäuser Rechenbuch für Mädchenschulen läßt in einer Übung Schulhefte kaufen, eine Nähmaschine anschaffen, Braten teilen, Kuchen backen, Zinsen einnehmen, Wein kaufen, Spirituspreise berechnen, den Montblanc mit deutschen Bergen und die Donau mit den übrigen deutschen Strömen vergleichen, die Zahl der Sitzplätze in einer Schulklasse ermitteln, Schweinefleisch einsalzen und Bohnen einmachen.[10]) Gasser stellt zusammen: Sandfuhren, Bäumchenverkauf, Gedichtlernen, Schafherde, Alter von Vater und Sohn.[11]) Haester und Röhm reihen aneinander: Eisenbahnbau, Schaffütterung, Arbeitsdauer, Betttücher für ein Krankenhaus, Fußboden einer Kirche, Dielung eines Schulzimmers, Hafervorrat, Haushalt, Straßenbäume, Witwenkasse, Uhrverlosung u. s. f.[12]) Bei Heinze und Hübner findet man nebeneinander: Milchtopf, Geldwechsel, Kinderkrankheit, Schulkinderzahl, Obstgarten, Kramladen, Faßinhalt, Eierverkauf, Schulden, Lesebuchschrift, Alter zweier Brüder, Schieferstifte, Bilderbogen, Eierpreise, Arbeitslohn, Kaffeeeinkauf, Pfennigsparkasse, Wochentage, Bleistifte, Stühle, Schulbänke, Gartenschaden, Druckzeilen im Buche.[13]) Hentschel läßt nacheinander berechnen: Bekleidung armer Kinder, Papierinhalt von Büchern, Radumfang, Zinsen, Weizenpreise, Wochenlöhne, Staatsschuld Friedrich I., Brezelverteilung, Apfelsinenzahl, Wegstunden eines Landbriefträgers.[14]) Knabe und Ostwald bringen: Erbteilung, Wochenausgabe, Kohlenverbrauch in

6) Heft I, Abt. I. § 2.
7) Heft V, § 1.
8) § 7. S. 89.
9) Heft II, S. 50.
10) Heft IV, S. 28.
11) Heft III, S. 27.
12) Heft II, S. 29.
13) Heft II, S. 28.
14) Heft VII, S. 107.

einer Schule, Schuhmacher- und Schneiderrechnung, Zuckerrübenverarbeitung, Stuhlversteigerung, Wildhandel, Botenlöhne, Feldverpachtung, Gemüsehandel u. dgl. m.[15]) Bei Schröter finden wir friedlich beisammen: Kassenetat, Verpflegungsstation, Beamtenhausstand, Feldertrag, Krämerladen, Fußreise, Butterkauf, Ofensetzen, Kaffeemischung, Tabakmischung, Geburten, Ausbildung eines Sohnes.[16]) Bei Steuer stehen nebeneinander: Beamtengehalt, Ernteertrag, Reise, Getreidepreise, Einwohnerzahl Berlins, Brotbacken, Holzfuhren, Mehlverbrauch in einer Familie, Straßenbäume, Gerstenertrag, Springbrunnen, Verwandlung von Morgen in Hektar.[17]) Bald darauf vereinigt derselbe in einer Übung: Gulden- und Rubelwerte, Wein-, Zucker- und Erbsenpreise, Goldfische, tägliche Ausgaben, Fahrgeschwindigkeiten, Stroh- und Eierpreise, deutsches Reichsheer, Thüranstrich, Gutskauf, Baumpflanzung, Weinfüllung, Holzverkauf, Milchpreise, Kaffeehandel, Fußboden einer Turnhalle, St. Gotthard- und Mont Cenis-Tunnel.[18])

Diese Beispiele dürften genügen. Geht man den Einzelheiten derselben nach, so stößt man wiederholt auf Stellen, deren Wechsel auch der kühnsten Phantasie Ehre machen würde, sofern gefordert worden wäre, weitauseinanderliegende Sachgebiete zusammenzustellen. Bemüht man sich aber noch, die einzelnen Sachen nebeneinander vorzustellen, so darf man einer hochkomischen Wirkung sicher sein. Selbst beim Kinde möchte sich dieselbe einstellen. Und so muß man es schließlich noch als einen glücklichen Umstand bezeichnen, wenn das Kind sich gegen die Sachen gleichgiltig verhält. Welchen Zweck aber kann es dann überhaupt haben, dieselben heranzuziehen? Wenn irgendwo in der Behandlung der Rechenstoffe, so thut hier Wandel dringend not. Freilich, ein solcher kann dann erst wirklich eintreten, wenn man die Bedeutung der Sachgebiete des Rechnens in unserm Sinne anerkannt und die Verbindung des Rechenlehrstoffes unter sich und mit andern Stoffen der allgemeingiltigen Konzentrationsidee, diese wieder der Idee des erziehenden Unterrichts untergeordnet haben wird. Einzelne Anzeichen sind da, daß die Einsicht in dieser Hinsicht im Wachsen begriffen ist. Und nicht zum wenigsten dürften unser Handbuch[19]) und unsere Besprechungen einzelner Rechenwerke in pädagogischen Blättern[20]) dazu mit beigetragen haben. Es sind das aber nur Anzeichen. Die Hauptsache muß erst noch kommen.

15) Heft IV, S. 45.
16) Heft III, S. 46.
17) Heft IV, S. 49.
18) Heft IV, S. 52.
19) Vergl. H. I, S. 144. Was z. B. dort über Thieme-Schlossers Rechenübungen gesagt werden mußte, trifft heute nicht mehr zu, weil es inzwischen berücksichtigt wurde.
20) Praxis der Erziehungsschule, Päd. Warte u. a.

Vierter Abschnitt.

Das Lehrverfahren im Rechenunterrichte.

§ 21.

Die Formalstufen.

Litteratur. Bergner, Materialien 2c. Diesterweg, F. A. W. Wegweiser für deutsche Lehrer. Neue Auflage in zwei Bänden. 2. Bd. Essen 1838. Dörpfeld, F. W. Grundlinien einer Theorie des Lehrplans. Gütersloh 1873. Dörpfeld, F. W. Denken und Gedächtnis. 2. Aufl. Gütersloh 1884. Dörpfeld, F. W. Der didaktische Materialismus. 2. Aufl. Gütersloh 1886. Fickenwirth, O. Methodik für einen einheitlichen Rechenunterricht. Breslau 1892. Gleichmann, Über Herbarts Lehre von den Stufen des Unterrichts. 2. Aufl. Langensalza 1891. Glöckner, Die formalen Stufen bei Herbart und seiner Schule. (Im 24. Jahrbuche des Vereins f. wiss. Päd.) Dresden 1892. Hanns, Drei Zeitfragen. Dresden 1887. Hartmann-Ruhsam, Rechenbücher (Schüler- und Lehrerhefte). Herbarts Päd. Schriften. Ausg. von Willmann. Herbarts Sämtliche Werke. Ausg. von Hartenstein. Neudruck. Leipzig 1887 f. Just, K. Zur Lehre von den formalen Stufen des Unterrichts. (Im 24. Jahrb. 2c.) Dresden 1892. Lange, K., Über Apperzeption. 4. Aufl. Plauen 1891. Leipziger Seminarbuch (im 5. Jahrb. des V. f. wiss. Päd.) Leutz, F. Lehrbuch der Erziehung und des Unterrichts. 2. Teil. Die Unterrichtslehre. Tauberbischofsheim 1885. Magnus, K. H. L. Lehrerhefte zu Ferdinand Heuers Rechenbuch. Hannover 1890 f. Räther, H. Theorie und Praxis des Rechenunterrichts. Breslau 1891. Reich, Die Theorie der Formalstufen. Langensalza 1889. Rein, Pickel und Scheller, Die Schuljahre (insbesondere das 1. Schuljahr, 5. Aufl.). Leipzig 1892. Richter, K. Die Herbart-Zillerschen formalen Stufen des Unterrichts. Leipzig 1888. Schmid, Die Hauptforderungen der Herbart-Zillerschen Unterrichtslehre. Eßlingen 1889. Stoy, K. V. Encyklopädie, Methodologie und Litteratur der Pädagogik. 2. Aufl. Leipzig 1878. Ufer, Chr. Vorschule der Pädagogik. 6. Aufl. Dresden 1892. Wiget, Die formalen Stufen des Unterrichts. 3. Aufl. Chur 1892. Willmann, Päd. Vorträge. 2. Aufl. Leipzig 1886. Ziller, T. „Allgemeine Pädagogik" und „Grundlegung zur Lehre vom erziehenden Unterrichte". Hierüber: Aufsätze und Präparationen in pädagogischen Zeitschriften, z. B. Praxis der Erziehungsschule (Altenburg), Deutsche Schulpraxis (Leipzig), Reins Päd. Studien (Dresden), Allgemeine Deutsche Lehrerzeitung (Dresden-Leipzig), Pädagogische Blätter (Gotha), Lehrproben und Lehrgänge (Halle a. S.), Die Mädchenschule (Bonn) u. a. m.

Selbst dann, wenn der Lehrstoff unter steter Rücksichtnahme auf die Natur des Objekts und des Subjekts (des Lehrstoffes und des Zöglings) ausgewählt und verteilt worden ist, bleibt die Frage nach der besten Art und Weise seiner Übermittelung immer noch eine offene. Sie zu beantworten, ist die besondere Aufgabe der Theorie des Lehrverfahrens. Während der Lehrplan die Frage nach dem Was? behandelt, wird durch das Lehrverfahren die Frage nach dem Wie? erledigt. Fragt man aber: Wie gelangt der Zögling in den Besitz des Lehrstoffes? so will man den Weg, der nach einem bestimmten Ziele führt, den Gang des Unterrichts, kurz die Unterrichtsmethode kennen lernen.[1]) Das ist freilich auch ein Gebiet, auf dem die Ansichten der Pädagogen bis heute noch auseinandergehen. Denn es giebt immer noch solche, welche meinen, daß es durchaus genüge, wenn man sich mit dem Lehrstoffe vertraut mache; die Art der Mitteilung, die Lehrmethode, stelle sich ganz von selber ein und brauche nicht erst besonders erlernt zu werden. Andere wieder sind der Ansicht, daß jeder Lehrer seine „eigene Methode“ nicht nur haben dürfe, sondern unter Umständen haben müsse. Demgegenüber läßt sich aber nachweisen, daß beide Ansichten auf Unkenntnis des eigenen Vermögens und des Wesens der Methode beruhen.

Noch immer gilt, was der Mathematiker Wittstein, ein Schüler Herbarts, vor Jahren gesagt hat: „Es giebt unter den Lehrern der glücklichen Naturen wirklich, welche sich mit glücklichem Takte ein System von Manieren, in Behandlung des Lehrstoffes wie der Schüler, anzueignen wissen und damit die besten Erfolge erlangen; aber dergleichen Naturen sind selten und viel häufiger trifft man den entgegengesetzten Fall, wo der Lehrer aus methodischer Unkenntnis weder den Stoff zu formen noch die Schüler zu gewinnen vermag und endlich nach vergeblichem Ringen sich zu derjenigen Indolenz hinabgedrückt sieht, mit welcher das Lasttier sein Tagewerk vollbringt.“[2]) Und beistimmen muß man auch dem, was Stoy hinzufügt: „Das Bedürfnis einer Methode ruht auf demselben heiligen Grunde wie die Pädagogik. Es kann und darf nicht dem Zufalle überlassen bleiben, ob der Lehrer zu jenen wenigen glücklichen Naturen der Pfadfinder gehöre oder nicht, auch die glückliche Natur wird durch die Anweisungen der Methode nicht beengt und wirksam gemacht, sondern für sie ist recht eigentlich höherer Gewinn zu erwarten. Ja, und wenn auch wirklich schließlich dasselbe Resultat zu erwarten wäre (was aber eine unerlaubte Voraussetzung ist), so würde ein Hinblick auf die kurze Spanne Zeit zur äußersten Ersparnis antreiben. Denn es handelt sich nicht bloß darum, in irgend welcher Zeit Kenntnisse mitzuteilen, sondern Kenntnisse, welche dienstbar sind dem Interesse. Wenn der Unterricht nicht soweit vordringen wollte, dann würde er ein ‚schreckliches Geschenk‘ gemacht haben, denn eben das ‚schrecklichste Geschenk, das ein feindlicher Genius dem Zeitalter macht, sind vielleicht Kenntnisse ohne Fertigkeiten.‘“[3])

Auch das, was Diesterweg sagt, ist wohl zu beherzigen: „Es giebt im ganzen und großen nur eine Rechenmethode, welches diejenige ist, die zugleich der Natur des zu entwickelnden Geistes, namentlich den durch den Rechenstoff zu bildenden theoretischen Anlagen und praktischen Vermögen, und dem Wesen des Materials entspricht. Ganz verwerflich ist daher die Meinung derer, welche nur subjektive Unterschiede in den

1) Hier wird Methode im engern Sinne genommen; im weitern Sinne rechnet man zu ihr auch die Anordnung des Lehrstoffes, also das, was der Lehrplan bietet.

2) Wittstein nach Stoy a. a. O. S. 72.

3) Stoy a. a. O. S. 73.

Methoden anerkennen wollen, daß sich die eine Methode für jene, die andere für diese Lehrer- und Schülerindividualität eigne, von einer, als der besten und darum allein guten, nicht die Rede sein könne. Wäre diese Ansicht begründet, so würde sich jede Methodologie in ein Nichts auflösen und jeder einzelne das Recht haben, auf seine Weise sich eine Ansicht von seiner oder des Schülers Individualität zu bilden und eine Methode ad libitum zu wählen. Das kann aber die Meinung derer, welche die Menschennatur als die eine und gleiche und ihre Entwickelungsgesetze als dieselben erkannt haben und in jedem Unterrichtsstoffe eine Eigentümlichkeit auffinden, nicht sein. Darum darf die Wahl der Methode im allgemeinen dem Belieben der Lehrer nicht überlassen werden." [4]) Und schließlich bleibt es selbst dann, wenn gewisse Erfolge durch eine sogenannte „eigene Methode" erzielt werden, immer noch sehr fraglich, ob das in Anwendung gekommene Lehrverfahren wirklich das rechte war. Es können dabei zufällige Umstände mitgewirkt haben, die Aneignung kann auf mechanische, also nicht bildende Weise erfolgt sein u. dgl. m.

So ist denn durchaus daran festzuhalten, daß jedes rationelle Lehrverfahren durch die besondere Beschaffenheit des Lehrstoffes und den geistigen Standpunkt des Schülers bestimmt werden muß. Allerdings kann das auch so noch auf doppelte Weise geschehen: Es kann die Rücksicht auf den Lehrstoff vorherrschen, und man kann darauf ausgehen, denselben unter bestimmte Begriffe zu bringen, ihn logisch zu gliedern und durch Beweise zu stützen; oder es kann der geistige Standpunkt des Schülers, die jeweilige geistige Entwickelungsstufe desselben, ausschlaggebend sein. Das führt im ersten Falle zur wissenschaftlichen, im zweiten zur elementaren Methode. Für die Volksschule kann nur die letztere in Betracht kommen. Denn wissenschaftliche und elementare Methode erscheinen als Gegensätze. Nicht nur deshalb, weil jene das Objekt, diese das Subjekt in den Vordergrund stellt, sondern ganz besonders auch deshalb, weil erstere von obersten Begriffen, denen sie alle Erkenntnis unterordnet, ausgeht, letztere aber von den Elementen der Erkenntnis, von Anschauungen, die zu jenen Begriffen erst führen. [5]) Man darf aber erwarten, daß in der Volksschule überall mit Anschauungen begonnen und mit Begriffen geendet werde.

Jedes Lehrverfahren, durch welches man zunächst die Anschauungen gewinnt und weiterhin die Begriffe ableitet, wird durch eine Reihe von Stufen gekennzeichnet, die für alle Unterrichtsfächer dieselben bleiben und die man daher mit Recht Formalstufen nennt. Diese Stufen sind das Ergebnis einer eingehenden psychologischen Überlegung, die zweckmäßig vom Wesen der Anschauung ausgeht. [6]) Vergegenwärtigen wir uns kurz ihren Verlauf. Bekanntlich ist jede Anschauung etwas Zusammengesetztes, eine Gesamtwahrnehmung, durch die in der Seele ein

---

4) Vergl. S. 80.
5) Vergl. Leutz a. a. O. S. 43.
6) Vergl. Wiget a. a. O.

Gesamtbild, ein durch mehrere gleichzeitige Sinnesempfindungen vermitteltes Bild, erzeugt wird, wie z. B. die Anschauung einer Blume durch gleichzeitige Wahrnehmung von Gestalt, Farbe, Geruch u. dgl. m. Dabei darf man nur nicht außer acht lassen, daß es vollkommene und unvollkommene Anschauungen giebt und daß vollkommene Anschauungen bloß solche sein können, denen keine einzige der zugehörigen Wahrnehmungen fehlt. Es ist selbstverständlich, daß der Schulunterricht sein Absehen auf vollkommene Anschauungen zu richten hat, sofern er zu klaren Begriffen führen will. Finden sich solche Anschauungen beim Kinde bereits vor, dann benutzt man sie natürlich sofort. In der Regel aber werden sie fehlen, und daher müssen die von früher vorhandenen oder eben gewonnenen Anschauungen stets geprüft, jenachdem berichtigt oder ergänzt werden. Mit andern Worten: das, worüber der Zögling verfügt, hat den Ausgangspunkt zu bilden; das, was ihm noch fehlt, ist hinzuzufügen; alles zusammen aber hat sich zu einer möglichst vollkommenen Anschauung zu vereinigen.

Da das geistige Besitztum des Schülers, so unvollkommen es auch an sich sein mag, stets als ein Ganzes gelten darf, so muß es, um zu erfahren, was zu ihm gehört und was ihm noch fehlt, zergliedert, auf seine einzelnen Bestandteile untersucht, analysiert werden: das elementare Lehrverfahren hat also mit einer Analyse zu beginnen. Dieselbe schließt damit ab, daß das vorgefundene Brauchbare geordnet, zusammengefaßt und für die Folge bereitgestellt wird. Dann erst darf das Fehlende herbeigeschafft werden. Dieses ist im Gegensatze zu dem Vorhandenen ein Einzelnes, Teil eines Ganzen, nämlich der erstrebten vollkommenen Anschauung. Daher muß auch seine Behandlung in Gegensatz zu derjenigen des Vorhandenen treten, sie muß eine aufbauende, zusammenstellende, erweiternde, synthetische sein: das elementare Lehrverfahren hat also mit einer Synthese fortzufahren. Stellt sich aber am Ende dieser Synthese die erstrebte vollkommene Anschauung ein, dann darf der erste Hauptteil des Lernprozesses als abgeschlossen betrachtet werden. Wenn nicht, dann ist nochmals zu beginnen.

Der zweite Hauptteil des Lernprozesses erhält die Aufgabe, die Anschauungen in Begriffe überzuführen. Wie Begriffe entstehen, ist bekannt. Die unmittelbare (sinnliche) Anschauung führt zu gewissen psychischen Gebilden, Erinnerungsbildern, die wir Vorstellungen nennen. Die in mehreren Vorstellungen enthaltenen gleichartigen Elemente lassen sich zu einer neuen Vorstellung vereinigen. Diese ist eine allgemeine Vorstellung, d. h. eine allen Einzelvorstellungen gemeinsame Vorstellung. Die Begriffe sind aber nichts anderes als eben solche allgemeine Vorstellungen.[7]) Und so tritt uns ein Zwiefaches in der Begriffsbildung

7) Zu bemerken ist indessen, daß sich das Gesagte nur auf die eigentlichen oder logischen Begriffe bezieht. Neben diesen giebt es noch psychische Begriffe. Diesen haften außer den gleichen auch mancherlei ungleiche Elemente an. Sie sind gleichwohl sehr wichtig, da wir für gewöhnlich nur in psychischen Begriffen denken.

entgegen: Aufsuchung der gleichartigen Elemente und Zusammenfassung derselben. Jene setzt eine Vergleichung, diese eine Absonderung voraus. Vergleichung vorhandener Vorstellungen behufs Heraushebung des Gleichartigen und Vergesellschaftung desselben ist Assoziation; Feststellung und Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Assoziation ist Systembildung. So reihen sich also der Analyse und Synthese, denjenigen Lernakten, durch welche vollkommene Anschauungen gewonnen werden sollen, Assoziation und Systembildung als zwei weitere Lernakte, durch welche die Hauptformen der Erkenntnis, die Begriffe, abgeleitet werden sollen, an.

Das alles läßt sich schließlich kurz so zusammenfassen: Die Gewinnung der Anschauungen ist ein Aufnehmen, Einreihen und Aneignen — eine Apperzeption; die Ableitung der Begriffe ist ein Vergleichen und Absondern — eine Abstraktion. Der Lernprozeß ist also in seiner ersten Hälfte ein Apperzeptionsprozeß, in seiner zweiten Hälfte ein Abstraktionsprozeß.

Handelte es sich nur darum, Begriffe zu bilden, dann hätte der Lernprozeß mit der als Systembildung bezeichneten formalen Stufe sein Ende erreicht. Aber eine naheliegende Erwägung sagt uns, daß es in unserem Falle nicht so sein kann. Denn der Begriff, das Wissen an sich, hat für den Zögling noch keinen Wert. Dieser entsteht erst, wenn das Wissen in ein bewußtes Können übergeht. Da aber letzteres sich nicht von selbst einstellt, wie man sich immer wieder überzeugen kann, so bleibt eben nichts anderes übrig, als den Lernprozeß auch auf diesen Akt auszudehnen, d. h. den vier formalen Stufen noch eine fünfte, eine Stufe, welche das Erlernte richtig gebrauchen lehrt, hinzuzufügen. Diese Stufe hat Herbart Methode genannt. Der Name ist heute freilich mehrdeutig; behalten wir ihn aber vorläufig bei, so ergiebt sich folgende Übersicht des Lernprozesses:

1. Analyse, d. i. Aufsuchung, Zerlegung und Ordnung derjenigen ältern Vorstellungen, an welche sich die neuen anschließen sollen.

2. Synthese, d. i. Entwickelung, Feststellung und Einprägung der neuen Vorstellungen, welche mit den ältern zusammen ein Ganzes bilden sollen.

3. Assoziation, d. i. Zusammenstellung, Vergleichung und Vereinigung der neuen Vorstellungen unter sich und mit den verwandten ältern Vorstellungen.

4. System, d. i. Feststellung, Absonderung und systematische Anordnung des allen Einzelvorstellungen Gemeinsamen (des Begrifflichen).

5. Methode, d. i. Rückkehr vom Allgemeinen zum Besondern, Umsetzung des Wissens in ein sicheres, bewußtes Können.

Die vorstehend gebrauchten Bezeichnungen sind die Herbart-Zillerschen. Wir geben indessen, da sie die Sache teilweise ungenau bezeichnen, nicht ihnen, sondern den folgenden fünf deutschen Namen (nach dem Vorgange Reins) den Vorzug: 1. Vorbesprechung.

2. Darbietung (des Neuen). 3. Verknüpfung (des Neuen unter sich und mit anderem). 4. Zusammenfassung (des Begrifflichen). 5. Anwendung (des gewonnenen Allgemeinen).[8])

Durch vorstehende Darlegungen sind alle bei den Formalstufen in Betracht kommenden wesentlichen Punkte bis auf einen berührt worden, die der Behandlung vorausgehende Zielangabe. Dieselbe soll direkt auf den Willen des Zöglings einwirken, indem sie ihn mit dem Ziele bekannt macht, das erreicht werden soll. „Diese Zielangabe ist von großer Wichtigkeit. a) Sie verdrängt die bis dahin in dem erleuchteten Bewußtsein vorhandenen Vorstellungen und macht den auszubildenden Vorstellungen Platz. b) Sie versetzt den Schüler in den Gedankenkreis, in dem er sich nun bewegen soll, und befördert dadurch das freie Steigen von ältern Vorstellungen, die bei der Erarbeitung des Neuen die willkommensten Hilfen sind. c) Sie erregt die Erwartung, und das ist die günstigste Stimmung für den beginnenden Unterricht. d) Sie giebt dem Schüler einen kräftigen Antrieb zum Wollen, zur selbstthätigen Mitarbeit bei Lösung der Unterrichtsaufgabe.“[9]) Daß sich die Durcharbeitung nach den Formalstufen auf ein genau begrenztes Stoffganzes, methodische Einheit genannt, erstreckt und bei jedem neuen Stoffganzen von neuem anhebt, liegt so nahe, daß der bloße Hinweis darauf genügt.[10])

Die allgemeinen Erörterungen über die Formalstufen noch weiter fortzusetzen, ist hier zwar nicht der Ort.[11]) Doch genügende Klarheit über ihre Verwendbarkeit im Rechenunterrichte müssen wir uns zu verschaffen suchen. Zu dem Ende wollen wir nicht nur jede Formalstufe, sondern auch die methodischen Einheiten und das Ziel einer besondern Betrachtung unterwerfen.

a) Die methodischen Einheiten.

Der gesamte Volksschulrechenstoff zerfällt naturgemäß in soviele Stoffgruppen, als Schuljahre zur Verfügung stehen. In unserm Falle also in acht Gruppen. Es würde aber falsch sein, wollte man jede dieser Gruppen in einem Zuge durcharbeiten. Es sind vielmehr gewisse Sammel- und Ruhepunkte dadurch zu gewinnen, daß man jede der acht Gruppen wieder in eine Reihe kleinerer Gruppen zerlegt, deren jede ein Ganzes für sich bildet. Diese kleineren Gruppen sind nun die metho-

8) Rein a. a. O. Erstes Schuljahr. 5. Aufl. S. 102. Dörpfeld a. a. O. unterscheidet drei Stufen: Anschauen, Denken, Anwenden. Im Grunde genommen meint er aber dasselbe wie die andern.

9) Rein a. a. O. Erstes Schuljahr, 5. Aufl. S. 103.

10) Die methodischen Einheiten, welche unser „Rechenbuch“ bringt, sind im vorigen Abschnitte bereits aufgeführt worden. Vergl. § 19.

11) Wer sich eingehender mit diesem Gegenstande beschäftigen will, den verweisen wir, außer auf die Quellenschriften von Herbart und Ziller, auf die bereits erwähnte Schrift von Wiget, auf Reins „Schuljahre“, Leutz „Unterrichtslehre“ und die übrige oben aufgeführte Litteratur.

dischen Einheiten. So mannigfaltig aber der Rechenstoff ist, eben so mannigfaltig kann auch der Inhalt der methodischen Einheiten sein: sie können Zahlen, Zahlreihen, Zahloperationen, einzelne Rechenfälle und Anwendung der Operationen auf die Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens in sich schließen. Um das Interesse des Zöglings aber zu wecken und zu erhalten, empfiehlt es sich durchaus, die methodischen Einheiten niemals durch bloße Formen bestimmen zu lassen, sondern sie stets mit geeigneten Sachgebieten in Verbindung zu bringen. Man wird daher vor Bestimmung der methodischen Einheiten diejenigen Gebiete des Sachunterrichts (und des praktischen Lebens, insoweit dieses dem Verständnisse des Kindes nahe liegt) auswählen, welche eine rechnerische Behandlung zulassen, beziehentlich fordern, und dann erst überlegen, mit welchem Teile des Rechenstoffes im engern Sinne (also des fachwissenschaftlichen Stoffes) sie verbunden werden können. Später, nachdem alle Rechenoperationen soweit erledigt sind, daß der Zögling sich frei innerhalb derselben bewegen kann, dürfen diese Einheiten auch ausschließlich von Sachgebieten abhängig gemacht werden. Dazu einige Beispiele.[12]) Im ersten Schuljahre bilden unter Anlehnung an zweckentsprechende Sachgebiete die Zahlen von 1 bis 10 den Inhalt der methodischen Einheiten; im zweiten Schuljahre sind es gewisse Abschnitte der Zahlreihe 1 bis 100; im dritten Schuljahre die Reihen der Zahlen 2 bis 9 u. s. w. Die dem Gebiete der Dezimalzahlen entlehnten methodischen Einheiten treten mit den dezimalen Münzen, Maßen und Gewichten in enge Verbindung, während das Gebiet der Bruchzahlen auf die nichtdezimalen Maße, den Geldverkehr (wie z. B. die Sparkasse) u. s. w. verweist. Nach Abschluß des theoretischen Rechnens treten die Bedürfnisse des praktischen Lebens mehr als vorher in den Vordergrund. Es lassen sich daher methodische Einheiten mit Beziehung auf Nahrung, Kleidung und Wohnung, unter Beachtung gewerblicher, kaufmännischer, haus- und landwirtschaftlicher Verhältnisse bilden, nicht minder solche, die Rücksicht auf die sachunterrichtlichen Fächer, Geschichte, Erd- und Naturkunde, nehmen.

b) Das Ziel.

Das Ziel wird im allgemeinen durch den Inhalt der zugehörigen methodischen Einheit bestimmt. Im besondern unterscheidet man aber dreierlei Ziele: das fachwissenschaftliche Hauptziel, das fachwissenschaftliche Teilziel und das Unterrichtsziel. Nur bei größern methodischen Einheiten treten alle drei, dabei Teil- und Unterrichtsziel mehrfach (nur in gleicher Anzahl), auf. Bei kleinern Einheiten brauchen keine Teilziele aufgestellt zu werden. Da auch im Rechnen der Inhalt der methodischen Einheiten kein rein formaler sein soll, so muß jedes der drei Ziele sachlich, es muß konkret gehalten sein. Die fachwissenschaftlichen Ziele beziehen sich lediglich auf den Stoff, haben mehr die Bedeutung

12) Vergl. von hier ab: Rechenbuch, Heft 1 ff. (Ausg. A).

von Stoffüberschriften und ergeben sich ohne weiteres aus der Stoffverteilung, also aus den Lehrplanarbeiten. Das Unterrichtsziel hingegen soll sich direkt an den Zögling wenden, soll diesen in den Kreis derjenigen Vorstellungen versetzen, mit denen er sich weiterhin zu beschäftigen hat. Da sind denn vor allem psychologische Erwägungen nötig, während dort nur logische erforderlich waren. Und noch eins ist zu beachten. Es wird der Lehrer den Kindern das sachwissenschaftliche Ziel gewöhnlich gar nicht ankündigen, während er das Unterrichtsziel beim Beginne der methodischen Durcharbeitung der betreffenden Einheit so aufstellt, daß es von allen wohl verstanden und behalten werden kann.

Das Unterrichtsziel soll auf den Willen einwirken, indem es den Vorstellungen des Kindes eine bestimmte Richtung, in welcher sich ihre Gedanken nun bewegen sollen, anweist. Da kommt natürlich auch viel mit auf die Form, in welcher das Ziel auftritt, an. Und da für das Rechnen die Aufgabe als bedeutungsvollste Form der Einkleidung gelten darf, so liegt es gewiß nahe, auch das Unterrichtsziel in Form einer Aufgabe an das Kind herantreten zu lassen. Es kann das freilich nicht jede beliebige Aufgabe sein. Dieselbe muß vielmehr stets dem Sachgebiete, das die ganze Einheit beherrscht, entnommen werden, es muß ihr für alle nachfolgenden Aufgaben eine grundlegende Bedeutung innewohnen, auch darf sie nicht allgemein gehalten sein, es wäre denn, daß die besondere Absicht vorläge, eine solche allgemeine Zielaufgabe mit Hilfe des Schülers näher zu bestimmen. So kann jedenfalls das Unterrichtsziel nicht lauten: Wir wollen heute mit der Sechserreihe rechnen! Das könnte höchstens den Inhalt eines fachwissenschaftlichen Zieles ausmachen. Wohl aber wird gesagt werden dürfen: Wir wollen ausrechnen, wieviele Schultage die seit Ostern verflossenen Schulwochen zählen! Ferner wird es nicht heißen dürfen: Wir wollen heute mit Dezimalzahlen multiplizieren! Es wird aber aufgefordert werden können: Wir wollen ausrechnen, wieviel die Luft in unserm Schulzimmer wiegt! Nur würden dann zunächst diejenigen Bestimmungen, die auf Multiplikationsaufgaben führen, aufzusuchen sein u. s. w.

Eine der größern methodischen Einheiten ist z. B. die, in welcher die Schlußrechnung behandelt wird. Hier hat als fachwissenschaftliches Hauptziel jedenfalls die Verbindung von Multiplikation und Division behufs Bestimmung einer Größe, die 3 (5, 7 . . .) gegebene Größen so ergänzt, daß daraus 2 (3, 4 . . .) Größenpaare mit gleichen Verhältnissen entstehen, zu gelten. Als fachwissenschaftliche Teilziele aber müssen auftreten: a) Schluß von der Einheit auf die Mehrheit; b) Schluß von der Mehrheit auf die Einheit; c) Schluß von einer Mehrheit auf eine andere über die Einheit; d) Schluß von einer Mehrheit auf ein Vielfaches derselben; e) Schluß von einer aliquoten Mehrheit auf einen Teil derselben; f) Schluß mit Hilfe eines gemeinschaftlichen Teilers. Die Unterrichtsziele hingegen, wovon ebensoviele als Teilziele aufzustellen sind, werden sich durchaus nach dem Inhalte der Aufgabengruppen, also den Sachgebieten, zu richten haben. Solche Sachgebiete könnten z. B.

die Bedürfnisse des täglichen Lebens: Nahrung, Kleidung, Wohnung u. s. w. sein. Man hätte dann nur nötig, nach jedem Teilziele eins dieser Bedürfnisse in das Unterrichtsziel aufzunehmen, z. B. nach dem ersten Teilziele: *Es soll ausgerechnet werden, wieviel eine Familie für Nahrungsmittel während eines Jahres (Monats ꝛc.) auszugeben hat!* — Da die im Ziele heranzuziehenden Sachgebiete übrigens stets von der Verbindung des Rechenunterrichts mit den sachunterrichtlichen Fächern einerseits und von dessen Beziehungen zu Natur und Menschenleben überhaupt anderseits abhängen sollen, so kann es nicht schwer halten, Unterrichtsziele aufzustellen, die den obengestellten Anforderungen genügen. Wünschenswert bleibt dabei nur noch, daß das Ziel in derselben Stunde, in welcher es angekündigt wurde, auch erreicht wird. Läßt sich dieses aber nicht einrichten, dann muß dasselbe — unter Berücksichtigung des bereits Erledigten — in der nachfolgenden Stunde noch einmal aufgestellt werden u. s. f. In solchen Fällen wird man natürlich vorziehen, durch die Kinder selbst die Wiederholung, beziehentlich Abänderung des Zieles vornehmen zu lassen.

c) Die Vorbesprechung (1. Stufe).

Die Vorbesprechung hat sich der Zielaufgabe eng anzuschließen und ist soweit zu führen, daß über den Gang der Lösung derselben volle Klarheit herrscht. Ist die Aufgabe allgemein gehalten, dann beginnt die Analyse mit der nähern Bestimmung derselben. Der günstigste Fall ist der, daß die Kinder selbst auf das Gesuchte kommen. Daher soll man ihnen auch nicht ohne Not gleich Hilfe gewähren. Andernfalls ist an Bekanntes, das mit dem Gesuchten verwandt ist, zu erinnern. Auch weiterhin darf nichts übersehen werden, was geeignet wäre, die Lösung der Aufgabe zu fördern. Überhaupt soll alles dem Standpunkte der Klasse angemessen sein. Wenn sich hieraus aber ergiebt, daß die Vorbesprechung die genaue Bekanntschaft mit dem Neuen seitens des Lehrers fordert, so darf sie doch für den Schüler von dem Neuen selbst nichts vorweg nehmen. Sie hat vielmehr ihr Ende erreicht, wenn die zur Lösung der Aufgabe erforderlichen einzelnen Arbeiten wohlgeordnet zusammengefaßt und eingeprägt worden sind. Diese Einprägung darf niemals versäumt werden; denn sie vor allem stärkt die kindliche Kraft und führt zu jenem „frohen Fleiße“, ohne welchen jegliche Schularbeit wertlos ist.

Gesetzt also, das Unterrichtsziel wäre das oben angegebene: *Es soll ausgerechnet werden, wieviel die Luft des Schulzimmers wiegt!* — dann folgte zunächst die Überlegung, daß die Luft das ganze Schulzimmer ausfüllt, daß man es also mit einem Luftkörper zu thun hat, dessen Gestalt und Größe durch die des Schulzimmers bestimmt wird. Es ist deshalb vor Allem nötig, die Größe des Schulzimmers zu berechnen, um jene Luftmenge kennen zu lernen. Das Schulzimmer wird aber von sechs Seiten begrenzt und erinnert insofern an den Würfel. Freilich ist es kein Würfel, weil es Seiten von ungleicher Größe hat. Um seinen

Inhalt zu finden, ist zuerst die Bodenfläche zu berechnen. Angenommen, dieselbe sei 8 m lang und 6 m breit u. s. w. u. s. w. Erfährt man auf diese Weise, wieviel Kubikmeter Luft das Zimmer enthält, so kennt man doch deren Gewicht noch nicht. Soll dieses berechnet werden, so erinnert sich das Kind, daß ein Kubikcentimeter Wasser 1 Gramm wiegt, ein Kubikmeter also 1000 Kilogramm. Ein Kubikmeter Luft wird freilich viel weniger wiegen. Wieviel? Angenommen, den 500. Teil, dann würde ein Kubikmeter Luft 1000 kg : 500 = 2 kg wiegen u. s. w. Zusammenfassung: Um berechnen zu können, wieviel die Luft des Schulzimmers wiegt, müssen wir zuerst die Größe des Schulzimmers (in Kubikmetern), dann das Gewicht eines Kubikmeters Luft kennen. Erstere wird gefunden, wenn man (kurz gesagt) die Bodenfläche des Zimmers mit der Höhe multipliziert, letzteres, wenn man 1000 kg durch die Zahl dividiert, welche angiebt, wieviel mal so schwer als die Luft das Wasser ist. Und wie dann weiter? Es wird das Gewicht von 1 cbm Luft soviel mal genommen, als Kubikmeter Luft vorhanden sind.

Dazu noch Ausrechnung der Aufgabe in ganzen (bequemen) Zahlen, z. B. 8 m Länge, 6 m Breite und 4 m Höhe für das Zimmer; 2 kg als Gewicht von 1 cbm Luft. Das sind allerdings nicht die Zahlen, mit denen wir es in Wirklichkeit zu thun haben. Diese müssen durch Messung u. s. w. erst noch ermittelt werden.

d) Die Darbietung des Neuen (2. Stufe).

Die als Unterrichtsziel aufgestellte Aufgabe, deren Behandlung in der Vorbesprechung so weit gediehen ist, daß Klarheit über ihren Inhalt und den Gang ihrer Lösung herrschen, soll nun unter Benutzung der genauen Zahlwerte wirklich gelöst werden. Dabei können wieder zwei Fälle eintreten. Erster Fall: die Lösung der Aufgabe kann sofort erfolgen; zweiter Fall: die Lösung der Aufgabe kann nicht sofort erfolgen. Im ersten Falle wird die Aufgabe so behandelt, daß Sicherheit und ein gewisser Grad von Geläufigkeit in der Lösung derselben sich auch bei den schwächern Schülern einstellen. Im zweiten Falle gilt es, die neuen Hindernisse zu beseitigen. Das führt aber, wenn nicht ein Versehen bezüglich der in der Zielaufgabe benutzten Sachverhältnisse vorliegt, stets zu einer Erweiterung auf dem Gebiete des theoretischen Rechnens: zu einer Fortführung der Zahlreihe, Einführung neuer Zahlformen, Zahloperationen, bez. neuer Rechenfälle in schon bekannten Operationen u. dgl. m. Hier hat die Zielaufgabe also vorerst nur die Bestimmung, das Interesse für das theoretische Rechnen zu beleben; danach soll sie selbst gelöst werden. Ist dieses aber geschehen, so können, jenachdem, gleich noch einige ähnliche Aufgaben behandelt werden. Alles Durchgenommene ist schließlich nicht nur in seinen Einzelheiten, sondern auch zusammenhängend in der ursprünglichen Form sowohl, als auch abgeändert fest einzuprägen, daher genügend oft zu wiederholen.

Auf unser in der Vorbesprechung behandeltes Beispiel angewandt, gestaltet sich die Darbietung so, daß der zweite Fall (die Lösung der Aufgabe kann nicht sofort erfolgen!) eintritt. Die Messung des Schulzimmers führt z. B. auf 8,25 m Länge, 6,12 m Breite und 3,85 m Höhe, während das Gewicht von 1 cbm Luft 1,299 kg beträgt. Hieraus ergeben sich nach einander die Rechenfälle: $8{,}25 \,.\, 6{,}12 = a$; $a \,.\, 3{,}85 = b$; $b \,.\, 1{,}299$; d. h. die Zielaufgabe führt auf die Multiplikation mit Dezimalzahlen. Daß man letztere mit dem einfachsten Falle, Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer ganzen Zahl, zu beginnen hat, ist selbstverständlich. Auch wird man nacheinander ein-, zwei- und mehrstellige Dezimalzahlen berücksichtigen, bis schließlich die Fälle, welche unmittelbar aus der Zielaufgabe hervorgehen, an die Reihe kommen u. s. w.

e) Die Verknüpfung (3. Stufe).

Das, was auf der zweiten Stufe dargeboten worden ist, wird nun unter sich sowohl, als auch mit früher Erworbenem verglichen. Denn dadurch allein wird es möglich, zwischen dem Neuen und Alten feste und dauernde Verbindungen herzustellen: das in beiden enthaltene Gleiche und Ungleiche zu erkennen, das Gleiche zusammenzustellen und das Ungleiche abzusondern. Auf diese Weise gewinnt man schließlich das Material zu einer oder mehreren Rechenregeln. Zweierlei ist bei solchen Vergleichungen aber stets zu beachten: es darf nicht alles verglichen werden, was sich überhaupt vergleichen läßt, — und es darf nichts Neues (d. h. dem Inhalte nach Neues) hinzukommen. Denn wollte man alles vergleichen, was sich vergleichen läßt, dann würde nicht nur viel Zeit darüber vergehen, sondern es könnten auch sehr leicht die Hauptsachen verdunkelt werden. Käme aber Neues hinzu, dann würde dieses nicht an der rechten Stelle des Lernprozesses auftreten, also auch keine Verschmelzung desselben mit dem vorhandenen Alten zu erwarten sein. Beachtet man dieses aber, so wird eine Folge nicht ausbleiben: Was man zur Vergleichung heranzieht, das wird auf wertvolle Zusammenhänge führen, und darunter stehen diejenigen, welche zu Anwendungen befähigen, jedenfalls obenan.

Noch ein Punkt indessen ist es, der besonders beachtet werden muß. Es handelt sich hier, wie gesagt, um Vergleichung dessen, was auf der zweiten Stufe dargeboten wurde. Das aber sind Verfahrungsarten zur Lösung einer oder einiger Rechenaufgaben. Und wenn dabei auch jedes Verfahren eingehend besprochen und eingeprägt worden ist, so kann das doch noch nicht genügen, um in dem Zöglinge die Überzeugung von seiner Allgemeingiltigkeit entstehen zu lassen. Diese setzt vielmehr voraus, daß dasselbe Verfahren auf eine größere Anzahl von Aufgaben angewandt worden ist. Wenn daraus aber folgt, daß die dritte Formalstufe mit den ihr zufallenden Vergleichungen nicht sofort beginnen kann, so ist damit gleichzeitig gesagt, daß sie ihr Augenmerk vorerst noch auf Lösung einer genügenden Anzahl gut gewählter Aufgaben zu richten hat. Denn diese allein sind imstande, die Gleichheit des Verfahrens zum Bewußtsein zu bringen, und letzteres wieder bildet die natürliche Grundlage der Überzeugung von der Allgemeingiltigkeit des Verfahrens. Wenden wir auch dieses auf den vorhin weitergeführten speziellen Fall an.

Die Darbietung hat sich auf Lösung einer Reihe von Aufgaben, die der Multiplikation mit Dezimalzahlen angehören, erstreckt. In diesen Aufgaben sind die einzelnen Fälle der Multiplikation, fortschreitend vom Leichten zum Schweren, enthalten. Auch die Zielaufgabe gehört ihrer Form nach dazu. Man hat nämlich: 8,2 . 6; 8,25 . 6; 8 . 6,1; 8 . 6,12; 8,2 . 6,1; 8,25 . 6,1; 8,25 . 6,12; weiterhin aber auch, nachdem 8,25 . 6,12 = 50,49 gelöst ist, 50,49 . 1,299 u. s. w. Jede Lösung ist gründlich besprochen und eingeübt worden. Die dritte Stufe wird nun zu jeder Aufgabe noch eine genügende Anzahl ähnlicher Aufgaben hinzufügen, dieselben lösen, die Lösungen vergleichen und das Gleiche in denselben angeben lassen. So von Fall zu Fall fortschreitend, ergiebt sich durch Vergleichung schließlich das Material, welches den Zögling befähigt, Dezimalzahlen mit einander zu multiplizieren. Vorher hat er bereits die Multiplikation mit ganzen Zahlen kennen gelernt. Das Verfahren bei dieser wird daher kurz wiederholt und mit demjenigen bei Dezimalzahlen verglichen. Dadurch gewinnt das Neue, nachdem es vorher schon die wünschenswerte Klarheit erlangte, ganz erheblich an Deutlichkeit, und der Zögling gelangt soweit, daß er selbstthätig eine Rechenregel aufstellen kann.

f) Die Zusammenfassung (4. Stufe).

Das Gleichartige, was auf der dritten Stufe aufgesucht und aufgefaßt worden ist, wird nun zusammengefaßt. Das ist der Abschluß des dem Apperzeptionsprozesse folgenden Abstraktionsprozesses, der bereits am Ende der zweiten Stufe eingeleitet wurde. Die Zusammenfassung selbst kann auf dreierlei Weise erfolgen: in Worten (Regeln), durch Beispiele (Regelbeispiele) oder durch beides zugleich. Das erstere empfiehlt sich im allgemeinen für die Volksschule weniger als das zweite und dritte. Denn nachdem eine größere Anzahl von Aufgaben auf der dritten Stufe gelöst und die Lösungen derselben miteinander verglichen worden sind, gewinnt die einzelne gelöste Aufgabe die Bedeutung eines Musterbeispiels. Ihr bloßer Anblick schon erinnert den Zögling daran, daß eine ganze Reihe von Aufgaben in gleicher Weise gelöst worden ist: das Musterbeispiel wird für ihn zum T y p u s. Deshalb empfiehlt es sich auch durchaus, solche Beispiele in ein besonderes Heft eintragen zu lassen. Denn ein derartiges Heft ersetzt, wenn auf lückenloses Fortschreiten gehalten wird, dem Schüler das Lehrbuch, und zeitweilige Wiederholungen schließen sich zweckmäßig an seinen Inhalt an.

Zu unserm speziellen Falle zurückkehrend, wird sich die Zusammenfassung für diesen wie folgt gestalten: Mündliche Angabe, in welcher Reihenfolge die Multiplikationen jeder typischen Aufgabe auszuführen sind und was man dabei in jedem einzelnen Falle erhält, also z. B. Einer mal Zehntel giebt Zehntel, Zehntel mal Zehntel giebt Hundertstel, Hundertstel mal Zehntel giebt Tausendstel u. s. w. Zusammenfassung der einzelnen Fälle in eine die Multiplikation mit Dezimalzahlen überhaupt umfassende Regel. Schriftliche Ausführung einer entsprechenden Anzahl von Musterbeispielen. Schließlich vollständige (mündliche und schriftliche) Lösung der Zielaufgabe.

g) Die Anwendung (5. Stufe).

Die auf der vierten Stufe gefundene Regel ist nun nach Maßgabe der Musterbeispiele bei Lösung von Aufgaben solange anzuwenden, bis sich eine angemessene Rechensicherheit und Rechenfertigkeit einstellt. Die Aufgaben dürfen dabei, um den Zögling ganz frei zu machen, nicht einseitige sein: nicht bloß solche in unbenannten Zahlen oder der Form nach gegebene. Es müssen vielmehr benannte und unbenannte Zahlen in eingekleideten und nicht eingekleideten Aufgaben dabei vorkommen, besonders aber hat das durch die Zielaufgabe angezogene Sachgebiet in einer möglichst streng nach Form und Inhalt geordneten Reihe angewandter Aufgaben Berücksichtigung zu finden. Das ist zugleich der Punkt, wo eine reichhaltige und nach richtigen methodischen Grundsätzen bearbeitete Aufgabensammlung die besten Dienste zu leisten vermag. Wie wir uns aber eine solche Aufgabensammlung für den angezogenen speziellen Fall (Multiplikation mit Dezimalzahlen) eingerichtet denken, das zeigt unser „R e ch e n b u ch“, auf welches wir also verweisen.

Über die Formalstufen sei im allgemeinen noch bemerkt, daß es beim Rechnen allerdings auch Fälle giebt, in denen diese Stufen nicht am Platze sind. Dahin gehören die W i e d e r h o l u n g e n, welche von Zeit zu Zeit angestellt werden müssen, um sich zu überzeugen, ob der Schüler über gewisse Stoffabschnitte noch mit der wünschenswerten Sicherheit und Geläufigkeit verfügt. Hier wird gewöhnlich nur nach den auf der vierten Stufe gewonnenen Hauptsätzen, Regeln und Musterbeispielen fortzuschreiten sein. Dahin gehören die f o r t l a u f e n d e n Ü b u n g e n, das P r o b e r e ch n e n u. a. m.

Auf der Unterstufe dürfen die methodischen Einheiten keine so umfänglichen sein, als auf der Mittel- und Oberstufe. Selbst die Ausdehnung der einzelnen Formalstufen hat sich nach der Fassungskraft der Kinder zu richten. An dem Wesen der Formalstufen selbst ändert das natürlich nichts. Unser Rechenbuch nimmt auch hierauf gebührende Rücksicht, wie man sich bald überzeugen wird. Überhaupt ist zu bemerken, daß unser Rechenbuch den Stoff der einzelnen methodischen Einheiten in einer Weise anordnet, welche die Anwendnng der Formalstufen wesentlich begünstigt, — mehr begünstigt als irgend ein anderes der zur Zeit vorhandenen Volksschulrechenbücher.

§ 22.

Anschauungs- und Lehrmittel.

Litteratur. Adam, R. Der Rechenlehrer. Beetz, K. O. Das Typenrechnen. Böhme, A. Anleitung. Bräutigam, H. Methodik des Rechenunterrichts. Büttner, A. Anleitung. Dittes, F. Schule der Pädagogik. 2. Aufl. Leipzig 1878. Förster, Das erste Schuljahr. Leipzig 1882. Göpfert, E. Der Rechenunterricht. Hartmann-Ruhsam, Rechenbücher (Schüler- und Lehrerhefte). Hentschel, E. Lehrbuch. Jänicke, E. Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts. Kaselitz, F. Wegweiser. Kehr, K. Praxis der Volksschule. 7. Aufl. Gotha 1875. Knabe, K. Aufgaben fürs Kopfrechnen. Gütersloh 1883. Knilling, R. Zur Reform des Rechenunterrichts. Leutz, F. Lehrbuch. Linde, R. Rechenbuch. Magazin für Lehr- und Lernmittel. Leipzig 1881. Meier, Lehrplan für den Rechenunterricht. Frankenberg i. S. 1887. Pädag. Jahresbericht. Leipzig, Brandstetter. Pfaff, Anleitung zum Gebrauche der Russischen Rechenmaschine. Freiburg i. B. 1872. Steuer, W. Methodik des Rechenunterrichts. Stoy, K. V. Allgemeine Schulzeitung. Jahrg. 1874. Tanck, W. Das Rechnen auf der Unterstufe. Tillich, E. Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik oder Anleitung zur Rechenkunst für Jedermann. Leipzig 1806. Wiedemann, Der Lehrer der Kleinen. Neu-Ruppin. (Vergl. hierzu die § 16 aufgeführte Rechenlitteratur.);

Will der Unterricht einen der Natur des kindlichen Geistes entsprechenden Gang einschlagen, dann hat er sein Augenmerk nacheinander auf Gewinnung von Anschauungen, Ableitung von Begriffen und Überführung des Wissens in Können zu richten. So lautet die allgemeine pädagogische Forderung. Wir wissen aber auch bereits, daß dieser Forderung durch eine saubere Durcharbeitung der Lehrstoffe nach den formalen Unterrichtsstufen entsprochen werden kann. Und was insbesondere unsern Gegenstand, das Rechnen, anlangt, so ist vorhin gezeigt worden, in welcher Weise dieses zu geschehen hat. Wir haben dadurch die Grundzüge eines Lehrverfahrens kennen gelernt, dessen psychologische Richtigkeit den zu stellenden Anforderungen genügen dürfte. Aber wir sind damit noch nicht am Ende unserer Betrachtungen über das Lehrverfahren im Rechenunterrichte überhaupt angelangt. Insbesondere wäre es falsch, wollten wir annehmen, daß ein an sich richtiges Lehrverfahren in jedem einzelnen Falle auf Erfolg rechnen könnte. Der Erfolg hängt vielmehr noch von einer Reihe pädagogischer Hilfsmittel und Kunstgriffe ab, deren Kenntnis für den Lehrer darum fast ebenso wichtig ist, als diejenige der Grundzüge des Verfahrens selbst. Und so muß es wohl unsere Aufgabe sein, wenn nicht alle, so doch die brauchbarsten dieser Hilfsmittel und Kunstgriffe noch kennen zu lernen.

Was zunächst die pädagogischen Hilfsmittel anlangt, so sind in erster Linie diejenigen zu nennen, welche die dem Rechnen als Grundlage dienenden Anschauungen gewinnen helfen sollen, also die Anschauungsmittel oder Veranschaulichungsmittel für den Rechenunterricht. Wir können dieselben im allgemeinen als Vorrichtungen bezeichnen, welche dem Kinde die Auffassung der Zahlen und Zahloperationen durch äußere (unmittelbare) Anschauungen erleichtern sollen. Wir sagen ausdrücklich „sollen“, denn ob es wirklich geschieht, das hängt wieder von mancherlei Umständen ab. Insbesondere wird dabei vorausgesetzt, daß jeder Lehrer, welcher mit den Anschauungsmitteln etwas erreichen will, vor allen Dingen sich selbst über das Wesen der Zahl klar sei. Daß dieses nicht immer so ist, wissen wir bereits. Auch kennen wir die Gründe, welche Veranlassung dazu sind.[1]) Wir verweisen also auf die frühern Darlegungen und heben nur noch einmal diejenigen Punkte hervor, auf welche es im vorliegenden Falle besonders ankommt.

Vergleicht man die Zahlen mit den Sinnendingen, also z. B. Bäumen, Tieren, Häusern, so gewinnt man alsbald die Überzeugung, daß sie sich wesentlich von diesen unterscheiden. Anschauungen von Sinnendingen entstehen, sobald letztere auf die Sinne einwirken und die dadurch in der Seele hervorgerufenen Empfindungen auf das den Sinnesreiz veranlassende Objekt bezogen werden. Sie verschwinden auch nicht wieder mit dem Objekte. Denn hört der Reiz auf, so lassen die Anschauungen Bilder in der Seele zurück, die um so treuer und frischer sich erhalten, je klarer und deutlicher die Wahrnehmungen gewesen sind. Diese Bilder können außerdem jederzeit wieder in das Bewußtsein zurückkehren, und dabei stellen sich die zugehörigen (nicht gegenwärtigen) Objekte so vor die Seele, als ob sie wirklich vorhanden wären. Solche in der Seele aufbewahrte Anschauungen nennen wir bekanntlich Vorstellungen. Ganz anders bei den Zahlen. Diese treten uns niemals in sinnlich wahrnehmbarer Gestalt entgegen, insbesondere niemals als selbständige Einzeldinge, wie z. B. der Baum, das Tier, das Haus. Sie können nur jederzeit mit und an vorhandenen selbständigen Dingen, gleichviel welcher Art, wahrgenommen werden. Aus dem uns bekannten, einfachen Grunde, weil sie zu denjenigen Seelengebilden gehören, die sich nicht aus Qualitäts-, sondern Relationsabstraktionen entwickeln.

Es muß aber zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen unterschieden werden. Um in den Besitz einer bestimmten Zahl zu gelangen, reicht die bloße Relationsabstraktion nicht aus. Denn gesetzt, es liegen 100 Markstücke beieinander, und wir thun weiter nichts, als daß wir sie ansehen, so sind wir nicht imstande, anzugeben, wieviele Markstücke es sind, mögen wir in der Kunst des Abstrahierens noch so sehr geübt sein. Oder angenommen, es werde mit einer Glocke geläutet, und wir thun weiter nichts, als daß wir zuhören, so können wir durch bloße Abstraktion nicht dahinter kommen, wieviele Schläge es gewesen sind. Um zu einer bestimmten Zahl zu gelangen, genügt also nicht die einfache ruhende Wahrnehmung durch Vermittelung der Sinne und eine damit verbundene Relationsabstraktion, sondern es muß noch etwas hinzukommen, was rein geistiger Natur ist, unabhängig von der sinnlichen Wahrnehmung, — der Zählakt, wie schon oben auseinandergesetzt worden ist.

Darin liegt aber bereits, daß es ein großer Irrtum wäre, wollte jemand annehmen, mit Hilfe gewisser Anschauungsmittel müsse es gelingen,

1) Vergl. S. 234 ff.

die Zahlen durch Anschauung und nachfolgende Abstraktion zu gewinnen. Solche Anschauungsmittel giebt es nicht, kann es nicht geben. Was die Anschauungsmittel im Rechenunterrichte zu leisten vermögen, kann nur dieses sein: Sie bieten Objekte dar, welche den zur Gewinnung bestimmter Zahlen erforderlichen Zählakt so begünstigen, daß er sich schließlich mit einer nicht mehr ins Bewußtsein fallenden Schnelligkeit und Leichtigkeit vollzieht.[2])

Vorhin ist darauf hingewiesen worden, daß die Anschauung eines Sinnendinges, z. B. eines Baumes, ein Bild in der Seele zurückläßt, das in das Bewußtsein zurückzukehren vermag, also reproduziert werden kann. Geschieht letzteres aber, dann ist es, als ob auch das zugehörige (abwesende) Objekt wieder vor uns hingestellt würde. Allerdings — muß hinzugefügt werden — mehr oder minder abgeschwächt, verschwommen, unklar, undeutlich, jenachdem die ursprüngliche Einwirkung war. Ist das bei den Zahlen ebenso? Schon eine einfache Überlegung sagt uns: Wenn die Zahlen nicht durch reine Sinnesvermittelung gewonnen werden können, wenn sie nur als unbestimmte Mengen infolge bloßer Sinneswahrnehmungen erscheinen, dann kann auch nicht von klaren und deutlichen Gebilden, die sie in der Seele zurücklassen, die Rede sein. Mit andern Worten: klare und deutliche Vorstellungen in dem Sinne, wie es klare und deutliche Vorstellungen von Sinnendingen giebt, können bei Zahlen nicht vorkommen. Zwei Beispiele mögen auch dieses erläutern.

Angenommen, ein Kind sieht zum ersten Male einen Elefanten, so wird dieses einmalige Sehen genügen, in seiner Seele eine Vorstellung von diesem Tiere zu erzeugen, klar und deutlich genug, um in einem zweiten Falle sofort entscheiden zu lassen, ob es wieder einen Elefanten sieht. Angenommen dagegen, ein geübter Rechner zählt Markstücke ab, indem er sie in eine einzige Reihe (entsprechend der Zahlreihe) legt, und er weiß nun, daß es genau 78 sind; wird derselbe Rechner auf Grund bloßer Sinneswahrnehmung (also ohne zu zählen) auch sofort angeben können, daß 78 andere Markstücke, ebenso nebeneinander gelegt wie die ersten, genau 78 sind? Gewiß nicht! Das heißt dann aber doch nichts anderes, als daß die eben erworbene Zahlvorstellung eine so wenig klare und deutliche ist, daß sie sich schon unmittelbar hinterher als durchaus unbrauchbar erweist.

Ist dem aber so, dann befinden sich alle diejenigen im Irrtume, welche meinen, die Anschauungsmittel seien dazu da, um lediglich auf dem Wege der Anschauung und Abstraktion zu klaren und deutlichen Vorstellungen bestimmter Zahlen zu führen. Selbst dann, wenn man das Zählen zu Hilfe nimmt, lassen sich nur für die vier oder fünf ersten bestimmten Zahlen klare und deutliche Vorstellungen erzielen, bei den vier

2) Vergl. hierüber auch Knilling a. a. O. S. 23—27. Derselbe bringt an dieser Stelle manches Beachtenswerte über Zahlanschauungen. Daß wir seine Schlußfolgerungen aber nur zum Teil als richtige anerkennen können, folgt aus unsern in § 17 gegebenen Darlegungen.

oder fünf folgenden Zahlen werden sie schon schwächer, und weiterhin treten sie thatsächlich als unklare und undeutliche auf. Das läßt sich kurz und bündig schließlich so ausdrücken: Die Deutlichkeit der Zahlvorstellungen steht im umgekehrten Verhältnisse zur Größe der Zahlen! Und daraus folgt insbesondere: Die Anschauungsmittel können bei Behandlung der Zahlreihe 1 bis 10 gute Dienste leisten, bei Behandlung der Zahlreihe 1 bis 100 wird das schon viel weniger der Fall sein, darüber hinaus aber müssen sie sich als nahezu oder völlig wirkungslos erweisen.[3])

Eine weitverbreitete Ansicht ist die, daß man, um eine Zahl zu begreifen, dieselbe an möglichst vielen Anschauungsmitteln vorführen müsse, wie an den Fingern, an Strichen, Bohnen, Kugeln u. dgl. m. Denn so erscheine die Zahl als das Bleibende im Wechsel der Dinge und man erhalte eine reine (nicht von den Dingen beeinflußte) Vorstellung von ihr. Demgegenüber ist entschieden zu bemerken, daß der Zahlbegriff schon mit Hilfe eines einzigen Anschauungsmittels gewonnen werden kann. Es empfiehlt sich sogar, namentlich im Anfange, die Anschauungsmittel nicht zu häufen, da der Wechsel mit denselben leicht von der Hauptsache ablenken könnte. Die Zahl tritt weder als ein einzelnes Merkmal auf, noch als eine Merkmalsgruppe, die an gewissen Dingen haftet, kann also auch nicht von den Dingen wie ein Merkmal oder eine Merkmalsgruppe losgelöst werden. Der Zahlbegriff ist und bleibt ein Beziehungsbegriff.[4])

Eine andere Ansicht geht dahin, daß man den Zahlbegriff erhalte, sobald man anfangs gebrauchte sachliche Benennungen der Zahlen von einem gewissen Zeitpunkte ab weglasse, also zur unbenannten oder reinen Zahl übergehe, die eben der Zahlbegriff sei. Hierzu ist zu bemerken, daß man zwar jede sachliche Benennung weglassen kann, daß dadurch aber keineswegs zwischen der Sache und der Zahl jede Verbindung aufgehoben wird, indem es thatsächlich unmöglich ist, sich eine Zahl klar vorzustellen, ohne gleichzeitig an gewisse Gegenstände (die gezählt worden sind) zu denken. Man ergänzt eigentlich in Gedanken stets, wenn man unbenannte Zahlen gebraucht, und der ganze Unterschied zwischen benannten und unbenannten Zahlen besteht lediglich darin, daß man bei benannten Zahlen an bestimmte Einheiten zu denken hat, während man bei unbenannten Zahlen an ganz beliebige Einheiten denken kann. Mit dem Zahlbegriffe decken sich also die unbenannten Zahlen keineswegs. Die Zahl ist in jedem Falle das Wieviel, und im Zahlbegriffe treten uns nur zwei Merkmale entgegen: Das Etwassein und das Zusammensein.

Nach diesen Vorbemerkungen kommen wir zu den Anschauungsmitteln selbst. Diese lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten einteilen.

---

3) Für die Zahlreihe 1 bis 100 muß, um überhaupt etwas zu erreichen, schon eine Gruppierung nach Zehnern und Einern eintreten, deren Übersichtlichkeit aber in demselben Verhältnisse abnimmt, wie die Deutlichkeit der Zahlvorstellungen für die Reihe 1 bis 10.

4) Vergl. S. 244.

Gewöhnlich aber unterscheidet man: a) natürliche und b) künstliche und bei den letztern wieder α) körperliche und β) graphische Anschauungsmittel. Diese Einteilung soll darum auch die unsere sein.

a) Natürliche Anschauungsmittel.

Zu den natürlichen Anschauungsmitteln gehören vor allem Teile des menschlichen Körpers, z. B. die Finger, ferner Gegenstände im Gesichtskreise der Kinder, z. B. Fenster, Thüren, Wände und Bänke des Schulzimmers, sodann Teile des tierischen Körpers, auch Pflanzenteile, Früchte, Kugeln u. s. w. Unter allen diesen Anschauungsmitteln behaupten jedenfalls die Finger den Vorrang. Sie haben den Vorteil für sich, daß sie buchstäblich stets zur Hand sind, auch bezeichnen sie viele Rechenmethodiker als das schlechthin beste Anschauungsmittel, wenigstens soweit es sich um das Rechnen innerhalb der Zahlreihe 1 bis 10 handelt. So heißt es z. B. bei Meier: „Die Finger sind das allgemeine, natürliche und beste Rechnungsmittel, weil sie stets zur Hand sind und sich mit Hilfe derselben die Operationen im Zahlraume von 1 bis 10 bequem ausführen lassen. Die Schüler werden bei fleißiger Benutzung dieses Hilfmittels in körperlicher Thätigkeit erhalten, und der Lehrer ist fortwährend in der Lage, sie zu überwachen; ist einer unthätig oder hat er die Aufgabe falsch aufgefaßt, so legen seine Finger Zeugnis ab, und es kann Hilfe geleistet werden. Auch insofern sind sie von Wichtigkeit, als die Schüler, sobald ihnen die Verwendung fürs Rechnen bekannt und geläufig geworden ist, außer der Schule davon Gebrauch machen und so den Rechenunterricht fördern. Schon hier sei darauf hingewiesen, daß man die Kinder in der Benutzung der Finger zum Rechnen gewähren lassen soll, solange es ihnen notwendig erscheint. Sobald sie entbehrlich geworden sind, kommen sie von selbst außer Benutzung." [5]) Die beiden letzten Sätze lauten bei Dittes ausführlicher: „Wenn von einigen neuern Schulmännern das Fingerrechnen (in der Elementarklasse) verworfen wird, weil sich die Kinder dasselbe vielleicht nicht wieder abgewöhnen könnten, so ist dies eine grundlose Besorgnis, denn, sobald das Kind die Zahlanschauungen seinem Geiste gehörig eingeprägt und Übung im Rechnen erlangt hat, macht es sich selbst los vom Gebrauche der Finger, weil es nunmehr ohne dieselben schneller zum Ziele kommt." [6]) Nicht so unbedingt beifällig äußert sich Jänicke über die Finger als Anschauungsmittel: „Sie sind das allgemeinste, natürlichste, immer bereite und fertige Rechen-Hilfsmittel aller Völker und Zeiten, das buchstäblich an die Hand gegeben ist, das daher auch die Schule nicht entbehren will. Aber weil es nur auf die Grundzahlen beschränkt ist, und weil diese 10 einander überdies nicht gleichen Dinge sich nicht beliebig trennen und zusammenfügen lassen, so ist es nicht ausreichend." [7])

5) Meier a. a. O. S. 26.
6) Dittes, a. a. O. S. 658.
7) Jänicke a. a. S. 125.

Wir sind ebenfalls nicht in der Lage, in das Lob der Finger an dieser Stelle rückhaltlos einstimmen zu können. Denn wenn auch zuzugeben ist, daß die Finger ein natürliches und volkstümliches Rechenhilfsmittel sind und daß sie bei der Behandlung der Zahlreihe 1 bis 10 als Anschauungsmittel gute Dienste leisten können, so ist doch nicht weniger gewiß, daß sich gegen ihre Benutzung mancherlei einwenden läßt. Wie schon Jänicke bemerkt, die Finger sind nicht 10 gleiche Dinge, sie lassen sich auch nicht beliebig trennen und zusammenfügen. Das macht zwar nichts aus, solange es sich nur um einfaches Zählen handelt, führt aber ganz gewiß zu Anschauungen und Vorstellungen, die allerlei Übelstände im Gefolge haben, sobald mit den Zahlen gerechnet werden soll. Denn wenn es heißt $1 + 1 = 2$, so werden keine andern als gleiche Einheiten vorausgesetzt, also Einheiten, welche durch Zählung gleicher Dinge gewonnen worden sind. Nun kann man zwar auch beim Zählen der Finger an gleiche Dinge denken; thut man dieses aber, so verlieren die Finger die Eigenschaft eines wirklichen (unmittelbaren) Anschauungsmittels, sie deuten dann ein solches nur noch an, werden also zu Stellvertretern. Und selbst dann, wenn man sich an ihre Ungleichheit nicht stoßen wollte, wie gezwungen müssen doch die Grundrechnungsarten mit den Fingern verlaufen. Addition und Subtraktion möchten noch angehen, Multiplikation und Division aber nicht. Man denke nur an 3 mal 3, an 7 : 3 u. s. w. Will man die Finger trotzdem auch hier noch benutzen, so muß man immer wieder auf ein Zu- und Abzählen von Einern zurückgreifen, also auf die allererste und schwerfälligste Form des Rechnens. Und daran gewöhnt sich das Kind schließlich so sehr, daß sein Rechnen mehr und mehr in einen Fingermechanismus hineinrät, der, weil er gewöhnlich in Verbindung mit Fingerberührungen steht, keineswegs unbedingte Sicherheit bietet, namentlich dann, wenn eine Operation mit größerer Geschwindigkeit ausgeführt werden soll, denn es können da leicht fehlerhafte Berührungen vorkommen. Man könnte nun zwar die Berührungen ganz weglassen. Indessen würde dadurch nichts gebessert, denn das Auge, welchem dann alle Wahrnehmungen allein überlassen blieben, würde sich bei der unvermeidlichen Anwesenheit unbenutzter Finger noch viel leichter irren als vorher. Es sind eben die Berührungen eine wesentliche Unterstützung des Auges. Den ganzen Fingermechanismus aber wird das Kind (trotz aller gegenteiligen Versicherungen) sobald und so leicht nicht wieder los. Mindestens auf der zweiten Stufe, d. h. bei Behandlung der Zahlreihe 1 bis 100, zeigt er sich noch. Wenn hier aber etwas lähmend wirkt, so ist es die Benutzung der Finger bei Aufgaben wie $46 + 8$, $53 - 9$ u. s. w.

Erfahrungen beweisen gewöhnlich nicht viel, wenn sie am eigenen Thun gemacht werden. Hier jedoch sind wir in der Lage, auf Grund sorgfältiger Feststellungen bei zahlreichen Kassenprüfungen versichern zu können, daß für diejenigen Kinder, welchen die Verwendung der Finger beim Rechnen im zweiten Schuljahre noch gestattet wurde, stets erheblich geringere Leistungen zu verzeichnen waren, als für die, welche die Finger nicht benutzen durften.

Das sind Einwirkungen des Fingerrechnens auf die Leistungen im Rechnen selbst. Es giebt (nach unseren Beobachtungen) neben ihnen aber auch noch solche, die sich auf den gesamten Schulunterricht und die Schulzucht beziehen. Zunächst ist soviel gewiß, daß das Fingerrechnen, wenn es nicht nutzlos sein oder sogar schädlich wirken soll, die Aufmerksamkeit des Lehrers in viel höherem Maße in Anspruch nimmt als das Rechnen unter Anwendung eines einzigen Anschauungsmittels, auf welches sich die Augen der ganzen Klasse zu richten haben. Sodann verleitet es ganz gewiß viele Kinder zu einer körperlichen Beweglichkeit, die auf den Unterricht störend einwirkt. So z. B. zeigen die Kinder Neigung, das, was sie an den Fingern abzählen sollen, leise mit vor sich hin zu sagen, und damit wird der Grund zu dem bekannten lispelnden Rechnen, welches sich, wenn es einmal eingerissen ist, nur schwer wieder beseitigen läßt, gelegt. Gerade in den beiden ersten Schuljahren ist es von Wichtigkeit, daß Lehrer und Kinder während des Unterrichts einander in die Augen sehen, solange gesprochen wird, oder daß sie gemeinsam ihre Augen auf den Gegenstand richten, der der Besprechung zu Grunde liegt. Das Fingerrechnen läßt die Augen der Kinder hin- und herwandern, und das beeinträchtigt die äußere Aufmerksamkeit, welche die Vorbedingung der innern ist. Es sind das noch keineswegs alle Gründe, die wir gegen die Finger als Hauptanschauungsmittel für das Rechnen des ersten Schuljahrs anführen können. Sie dürften indessen genügen, um unser Endurteil zu rechtfertigen: Die Finger können nur solange das Hauptanschauungsmittel des Rechenunterrichts sein, als ein besseres der weiter unten genannten künstlichen Anschauungsmittel nicht zu haben ist. Verschweigen wollen wir indessen nicht, daß wir selbst die Striche, die das Kind auf seine Schiefertafel macht, als Anschauungsmittel höher stellen als die Finger, sobald es sich um wirkliches R e c h n e n und nicht bloß um das einleitende Z ä h l e n handelt. Denn von den Strichen werden stets nur soviele dargestellt, als gerade nötig sind; bei den Fingern hingegen hat das Kind jedesmal auch noch diejenigen vor Augen, die nicht gebraucht werden. Und daraus erklärt es sich auch, daß wir im „R e c h e n b u c h e" den Fingern einen ganz bestimmten Platz unter den Anschauungsmitteln angewiesen haben: sie liefern das Sachgebiet für Behandlung der Zahl 5 und der Zahlreihe 1 bis 5 auf der ersten Rechenstufe.[8])

Was die übrigen natürlichen Anschauungsmittel betrifft, so eignen sich wohl alle mehr oder weniger zu allgemeinen, d. h. für alle Rechenübungen zu benutzenden Anschauungsmitteln; indessen dürften unter ihnen doch diejenigen die wertvollsten sein, welche als Sachgebiete auf der ersten Rechenstufe Verwendung finden können, also die, welche in bestimmter Anzahl vorkommen oder welche eine unveränderliche Anzahl von Teilen besitzen. Unerwähnt lassen wollen wir schließlich nicht, daß man auch den

8) Rechenbuch, Heft 1. S. 5 f. (Ausg. A.)

Versuch gemacht hat, in den Rechenstunden alle Kinder gleichzeitig mit geeigneten natürlichen Anschauungsmitteln am Platze arbeiten zu lassen, so z. B. mit Bohnen, Nüssen, Roßkastanien u. dgl. m. Man gab nämlich jedem Kinde soviele Stück des betreffenden Anschauungsmittels, als gerade nötig waren. Für nicht zu starke Schulklassen mag sich dieses Verfahren empfehlen. Andernfalls aber will es mit Vorsicht angewandt sein.

b) Künstliche Anschauungsmittel.

Die künstlichen Anschauungsmittel für den Rechenunterricht verdanken ihre Entstehung jedenfalls der Einsicht (oder doch wenigstens Ansicht), daß die natürlichen Anschauungsmittel nicht ausreichen, um den Anforderungen, die hier zu stellen sind, zu genügen. Das ist in jedem Falle beachtenswert, umsomehr, wenn man bedenkt, daß mehrere der tüchtigsten Methodiker zugleich Erfinder künstlicher Anschauungsmittel für den Rechenunterricht sind. Im Laufe der Jahre ist freilich die Zahl der Rechenmaschinen, Rechenapparate und wie diese künstlichen Anschauungsmittel alle heißen mögen, eine bedenklich große geworden. Bedenklich deshalb, weil neben wenigen guten viele mittelmäßige und noch mehr geringe Leistungen der pädagogischen Welt dargeboten worden sind. Welches der vielen Anschauungsmittel mag da wohl das beste sein? Diese Frage tritt an jeden gewissenhaften Rechenlehrer heran. Wir werden aber gut thun, wenn wir, ehe wir eine Entscheidung treffen, zunächst die andere Frage beantworten: Welchen Anforderungen müssen gute Anschauungsmittel für den Rechenunterricht genügen?

„Die Erfahrung allein genügt in diesem Falle nicht, denn diese giebt nur ein relatives Kriterium, je nachdem eben ein Lehrer mit Fleiß und Geschick das eine oder das andere benutzt. Das absolut Beste kann nur das sein, was empirisch und psychologisch zugleich begründet ist. In Rücksicht darauf lassen sich aber die Anforderungen an das Veranschaulichungsmittel in folgenden Sätzen zusammenfassen: 1) Es muß möglichst einfach sein, damit die Vorstellung vom Werte und Verhältnisse einer Zahlgröße nicht durch fremde Vorstellungen gehemmt wird. 2) Jede Zahlgröße der ersten Ordnung muß so aus Einsen zusammengesetzt sein, daß jede einzelne Größe wiederum für sich als ein Ganzes erscheint, damit durch solche Einheit und Beweglichkeit aller Größen alle Operationen veranschaulicht werden können.“ 9)

„Die Anschauungsmittel beim ersten Rechenunterrichte lassen sich unterscheiden a) in ständige und b) in zufällige. Die erstern zerfallen wieder 1) in Anschauungsmittel in der Hand des Lehrers und 2) in solche in der Hand des Schülers. — Die ständigen Anschauungsmittel müssen, wenn sie zweckmäßig sein sollen, folgende Anforderungen erfüllen: 1) Sie

9) Bräutigam a. a. O. S. 3.

müssen leblose Gegenstände sein. 2) Sie müssen abgerundete einfache Einheiten sein. 3) Sie müssen sich leicht handhaben lassen. 4) Die Anschauungsmittel in der Hand des Lehrers müssen eine passende Größe haben, um von allen Schülern deutlich gesehen werden zu können; sie müssen ferner eine entsprechende Form haben, damit sie beim Zusammenschieben in Reihen auch den entfernter sitzenden Schülern noch als abgesonderte Einheiten erscheinen. 5) Die Anschauungsmittel in der Hand des Schülers müssen leicht herzustellen und ihr Gebrauch muß für die Schüler durchaus gefahrlos sein." [10])

„Notwendig bleibt es immer, einen Rechenapparat für den Klassengebrauch zu besitzen, welcher selbstverständlich alle die Eigenschaften aufweisen muß, welche zu seiner Brauchbarkeit erforderlich sind. Die Veranschaulichungsmittel am Rechenapparate müssen gleichartig und beweglich sein. Die Gleichartigkeit bezieht sich besonders auf die Gestalt: doch soll es auch gestattet sein, verschieden gefärbte Objekte zu benutzen, wodurch die Unterscheidung erleichtert wird. Die Farbe soll aber so gewählt werden, daß sie auf das Auge wohlthuend wirkt und die Deutlichkeit in größerer Entfernung nicht beeinträchtigt. Die Beweglichkeit ist notwendig, damit die betreffenden Operationen leicht ausgeführt, eine Trennung leicht bewirkt und der nicht zur Verwendung kommende Teil beseitigt werden kann. Die Anschauungsobjekte müssen so groß sein, daß auch das auf der letzten Bank befindliche Kind dieselben ohne Anstrengung wahrnehmen und unterscheiden kann. Der Rechenapparat muß möglichst einfach konstruiert und so eingerichtet sein, daß die Kinder selbst an demselben arbeiten können; deshalb ist jeder künstliche Mechanismus zu vermeiden. Der Apparat muß die Möglichkeit gewähren, nur gerade das Material zur Anschauung zu bringen, was für den einzelnen Fall erforderlich ist, damit die Aufmerksamkeit der Kinder nicht abgelenkt, sondern auf einen Punkt konzentriert und fixiert werde. . . . Die Zahlvorstellungen und die Operationen sollen aber an einem Rechenapparate nur so weit veranschaulicht werden, als es möglich und notwendig ist. Ist es wohl möglich, einige tausend Einheiten zu übersehen und aufzufassen? Die Frage muß verneint werden; es ist überflüssig, eine solche Zahl zur Anschauung bringen zu wollen. . . . Es muß die Möglichkeit vorhanden sein, daß nach erlangtem Resultate die einzelnen Teile der Aufgabe noch zu erkennen sind. (Man kann z. B. bei der Russischen Rechenmaschine, wenn die Addition ausgeführt ist, die einzelnen Addenden nicht mehr erkennen, und bei der Multiplikation treten die Faktoren nicht mehr hervor.) . . . . Selbstverständlich dürfte noch die Anforderung zu stellen sein, daß jeder Rechenapparat dauerhaft gearbeitet sein muß; auch aus diesem Grunde ist jeder künstliche Mechanismus zu vermeiden." [11])

In den vorstehenden, unabhängig von einander entstandenen und offenbar von verschiedenen pädagogischen Standpunkten aus geforderten

10) Pfaff a. a. O.
11) Magazin für Lehr- und Lernmittel. Jahrg. 1881. S. 167 f.

Eigenschaften der Anschauungsmittel für den Rechenunterricht ist jedenfalls das enthalten, was als Antwort auf unsere vorhin aufgeworfene Frage gelten darf. Wir können diese Antwort deshalb jetzt kurz dahin zusammenfassen:

Ein gutes Anschauungsmittel für den Rechenunterricht muß sein:

a) einfach, um nicht von der Hauptsache — Gewinnung der Zahlvorstellungen und Veranschaulichung der Zahloperationen — abzulenken;

b) genügend groß, um von allen Kindern deutlich gesehen zu werden;

c) beweglich, um sich leicht — auch durch Kinder — handhaben zu lassen;

d) zerlegbar, um stets dasjenige Material, welches im einzelnen Falle gebraucht wird, vollständig abgesondert zu erhalten;

e) angepaßt dem Wesen der Zahl, um dieselbe als Vielheit und Einheit zugleich erscheinen zu lassen;

f) ausgiebig, um nicht nur die Zahlvorstellungen, sondern auch die Zahloperationen zu vermitteln.

Die Zahl der bis heute in den deutschen Volksschulen gebrauchten Rechenmaschinen, Rechenapparate ꝛc. ist, wie gesagt, eine sehr große: sie übersteigt das erste Hundert bereits. Und wenn auch manche dieser Anschauungsmittel wieder in Vergessenheit geraten, so wird deren Zahl doch reichlich ersetzt durch die in jedem Jahre neuhinzukommenden Maschinen und Apparate. Dieser Fülle von Anschauungsmitteln gegenüber müssen wir uns selbstverständlich auf eine Auswahl der wertvollsten oder doch am meisten benutzten beschränken. Bemerken wollen wir nur, daß Jänicke 22 körperliche und 8 graphische Anschauungsmittel beschreibt.[12] Im Magazin für Lehr- und Lernmittel findet man alle neuern Erscheinungen angezeigt, auch werden daselbst einmal 19 Anschauungsmittel im Zusammenhange besprochen.[13] Außerdem kann man in jedem methodischen Rechenwerke die Beschreibungen einzelner bemerkenswerter Anschauungsmittel finden. So bei Adam:[14] Pestalozzis Tabellen, Tillichs Rechenkasten, die Russische Rechenmaschine, den Knopfapparat oder das Löcherbrett und Weilands Rechentafel. Bei Steuer:[15] Pöhlmanns Hilfsmittel, Pestalozzis Tabellen, Tillichs „einfache Rechenmaschine", die Bornsche und Wunstorfsche Rechenmaschine, den Zarthschen Bruchrechenapparat u. s. w. Bei Meier:[16] Tillichs Rechenmaschine, die Lochtafel, Russische Rechenmaschine und Borns Apparat. Bei Leutz:[17] Pestalozzis Tabellen, Gerbachs Löchertafel (auch Berliner Knopfmaschine genannt), Tillichs Rechenkasten, die Russische Rechenmaschine,

12) Jänicke a. a. O. S. 125 ff.
13) Jahrgang 1881. S. 174 ff.
14) Adam a. a. O. I. S. 36 ff.
15) Steuer a. a. O. S. 40.
16) Meier a. a. O. S. 26.
17) Leutz a. a. O. S. 215.

Borns und Reinmuths Rechenapparat. Kehr erwähnt:[18]) Tillichs Rechenkasten, Heers Scheiben, Denzels Leiter, O. Schulzes Rechenhölzer, Berliner Knopfapparat, die Russische Rechenmaschine, die Mühlpfordtsche Rechenmaschine, Borns Schieberapparat, Willes Zahlbilder und Coßmanns Numeriermaschine. Man kann hieraus zugleich entnehmen, welche der vielen Anschauungsmittel die größte Beachtung gefunden haben. Nach der oben gegebenen Einteilung stellen wir von den künstlichen Anschauungsmitteln voran:

1. Die körperlichen Anschauungsmittel.

Sie sind den graphischen jedenfalls überlegen. Denn: „Die Vorstellung von der Zahl kann von dem Kinde nur dadurch erworben werden, daß ihm gleichartige konkrete Dinge vorgeführt werden. Mit jemehr Sinnen ein Gegenstand wahrgenommen werden kann, desto kräftiger wird sich seine Gestalt 2c. in der Vorstellung wieder erzeugen; es wird also für die Veranschaulichung der Zahl vorteilhafter sein, wirkliche Dinge statt ihrer Abbildungen zu gebrauchen. Wer auf der Unterstufe der rechnenden Thätigkeit steht, pflegt nicht nur die zu zählenden Dinge anzuschauen, sein Auge von einem zum andern gleiten zu lassen; er liebt es auch, die zu zählenden Dinge anzutasten, anzugreifen, zu begreifen. Dies muß ein Fingerzeig sein, dem ersten Unterrichte in der Zahl wirklich tastbare Gegenstände zu Grunde zu legen.

Aber auch deshalb müssen es solche sein, weil dem Kinde die Möglichkeit gegeben werden muß, selbst Dinge zusammenzulegen, vorhandene durch Hinzuthun zu vermehren, durch Abmindern zu vermindern 2c. Hiermit soll dargethan werden, daß den körperlichen Anschauungsmitteln der Vorzug vor fertigen Zeichnungen einzuräumen sei.“[19])

Die körperlichen Anschauungsmittel für den Rechenunterricht können nach den bei ihnen verwerteten besondern Anschauungs-Objekten eingeteilt werden in solche mit a) Kugeln, b) Würfeln, c) Scheiben, Knöpfen 2c., d) Stäben, Walzen 2c. Dabei können diese Objekte verbunden oder unverbunden vorkommen, es kann die Verbindung eine lose (durch Drähte 2c.) oder feste sein u. dgl. m.

Der bekannteste Kugelapparat ist die Russische Rechenmaschine. Es ist zugleich die am meisten gebrauchte Rechenmaschine. In einem viereckigen Rahmen, der aufgestellt werden kann, befinden sich in gleichen Entfernungen zehn parallele Drahtstäbe mit je 10 verschiebbaren Kugeln. Die Stäbe sind so lang, daß 20 Kugeln bequem darauf sitzen können. Seit mehr als 70 Jahren wird diese aus Rußland gekommene Maschine in den deutschen Volksschulen benutzt, und viele Rechenmethodiker sind ihres Lobes voll. So Diesterweg und Goltzsch, Palmer und

18) Kehr a. a. O. Abschnitt: Der Rechenunterricht.
19) Böhme a. a. O.

Dittes, neuerdings Rückbeil, Pfaff, Schütze u. a. In der That, sie hat auch eine Reihe schätzenswerter Eigenschaften. Die Kugeln sind genügend groß, dabei einfach und dem Kinde bekannt genug, um nicht abzulenken, überdies gleichartig und beweglich. Auch können die Kinder daran arbeiten. Fehlt ihr ein Verdeckbrett oder Vorhang nicht, hinter welchem sich die nicht gebrauchten Kugeln verbergen lassen, so wird durch sie auch der vierten unserer obigen sechs Forderungen entsprochen. Überdies ist ihre Herstellung eine leichte, ihr Preis ein geringer, wenn man an die Ausstattung nicht besondere Anforderungen stellt. Aber es trägt die russische Rechenmaschine unsern beiden letzten Forderungen nur in mangelhafter Weise Rechnung. Die Zahl erscheint an ihr nur als Vielheit, als eine Summe getrennter Einheiten, während sie im Rechnen doch auch als Einheit begriffen werden muß. Und was die Veranschaulichung der Zahloperationen betrifft, so beschränkt sich diese strenggenommen auf Addition und Subtraktion, es werden also Multiplikation und Division vernachlässigt. Ergiebt sich aber daraus, daß die Russische Recheumaschine zu den besten Anschauungsmitteln nicht gezählt werden kann, so können wir sie auch nicht gleich den obengenannten Methodikern empfehlen. Wir müssen vielmehr der Praxis des pädagogischen Universitätsseminars zu Jena (unter Stoys Leitung), dem Seminardirektor Stern in Karlsruhe, Lindner in Kuttenberg, Kehr, Adam u. a. zustimmen. Denn diese alle haben mehr oder weniger an der Russischen Rechenmaschine auszusetzen. Sollen wir aber noch kurz und bündig den Wert der Russischen Rechenmaschine bezeichnen, so sagen wir: Sie ist eine gute Zählmaschine aber keine gute Rechenmaschine.

Die Mängel der Russischen Rechenmaschine veranlaßten im Laufe der Jahre nicht wenige Rechenmethodiker, über Verbesserungen an derselben nachzudenken, beziehentlich neue Rechenmaschinen ohne ihre Mängel zu erfinden. So sind z. B. die Rösenersche Rechenmaschine, Schweglers „Neue Schulrechenmaschine" und die Wunstorfer Rechenmaschine (von der vier Ausgaben zu haben sind), bei denen die Drahtstäbe senkrecht stehen, entstanden. Auch die Rechenmaschine von Jakob von Essen, die Poppesche Rechenmaschine und das Willesche Zahlbilder-Rechengestell haben als Nachbildungen der Russischen Rechenmaschine zu gelten. Dazu noch eine nicht geringe Anzahl solcher Apparate, die in weitern Kreisen unbekannt geblieben sind. Allgemeinen Beifall hat freilich keine einzige dieser Nachbildungen gefunden.

Zur zweiten Abteilung der körperlichen Anschauungsmittel für den ersten Rechenunterricht gehören die Würfelapparate. Es giebt deren noch mehr als Kugelapparate. Der älteste von ihnen ist der „Tillichsche Rechenkasten", dessen Erfinder der in der Geschichte des Rechenunterrichts an hervorragender Stelle genannte Tillich ist. Tillich selbst beschreibt sein Anschauungsmittel wie folgt:[20] „Diese einfache Rechenmaschine besteht nämlich dem wesentlichen nach aus hundert ver-

20) Tillich a. a. O. S. 287 f.

schiedenen Stäben für alle einfachen Zahlen von eins bis zehn. Jeder einfachen Zahl gehören zehn Stäbe. Die Einer, von denen des öftern Gebrauches wegen gewöhnlich 20 bis 30 vorhanden sind, sind Würfel von der Größe eines Zolles. Alle übrigen Zahlen sind, nach dem Verhältnisse der Mehrheit, länger. Die Zwei hat also die Länge von zwei, die Drei die Länge von drei Zoll u. s. f. Die Breite und Dicke bleibt aber nur ein Zoll.

Alle diese Stäbe befinden sich in einem für sie eingerichteten Kasten, der in zehn Fächer eingeteilt ist, wovon ein jedes die zehn Stäbe enthält, welche zu einer jeden Zahl gehören. Natürlich richtet sich die Größe eines jeden Faches nach der Länge der Stäbe. Dieser Kasten ist mit einem Deckel versehen, der hinwiederum so eingerichtet ist, daß darauf die Zollstäbe aufgestellt werden können, damit sie auf verschiedene Weise zusammengesetzt und getrennt werden können,, wie es sogleich näher beschrieben werden soll.

Diese Maschine hat vor andern dasjenige voraus, daß sie alle Eigenschaften vereinigt, welche vorher von einer passenden Versinnlichung gefordert wurden.[21]) Sie ist gleichsam die äußerliche Darstellung des ganzen Systems, wo sich ein jedes Verhältnis nachweisen läßt; und es ist die Absicht, daß sich dieses auch eben so rein und fest im Innern abdrücke.

Jedoch hat die Maschine nur insofern Wert, als sie ein sehr brauchbares Mittel zu dem Zwecke ist, für welchen sie bestimmt ist. Ohne die rechte Behandlung würde sie wenig frommen, wenn auch immer noch ihren relativen Wert behaupten. Die Behandlung ist die Hauptsache; indem ich sie beschreibe, gebe ich zugleich den methodischen Gang des Elementarrechnens."

Tillichs Hoffnung, sein Anschauungsmittel „werde sich mehr verbreiten", ging indessen nicht gleich in Erfüllung. Dasselbe geriet sogar samt seines Erfinders Verdiensten um den Rechenunterricht überhaupt so sehr in Vergessenheit, daß selbst Methodiker wie Stubba es nicht für nötig hielten, sich weiter um dasselbe zu bemühen.[22]) Schließlich war es nur noch das pädagogische Universitätsseminar zu Jena, welches unter Stoys Leitung Tillichs Erfindung hochhielt. In dem Vorworte zu Göpferts mehrerwähntem Schriftchen läßt sich Stoy selbst also vernehmen: „Dem pädagogischen Seminar an der Universität Jena galt während der 25 Jahre seines Bestehens Tillichs Rechenkasten als ein wertvolles Vermächtnis aus der Blütezeit der deutschen Pädagogik. Tillich selbst stellt sich zwar in seiner psychologischen Grundansicht von den Zahl-

21) Auf S. 287 heißt es: „Ich fordere demnach von dem Versinnlichungsmittel eine möglichste Entfernung aller Qualitäten, eine Symmetrie, Beweglichkeit und Kombinationsfähigkeit. Ein solches glaube ich gefunden zu haben; und ein mehrjähriger Gebrauch hat mir die Wichtigkeit desselben so einleuchtend dargethan und mich zu der Hoffnung berechtigt, es werde sich mehr verbreiten, und eben dadurch diesem höchstwichtigen Teile des Unterrichts in jeder Hinsicht einen bedeutenden Vorschub leisten."

22) Jänicke a. a. O. S. 126.

vorstellungen in schroffen Gegensatz zu seinem großen Lehrer Pestalozzi (Lehrbuch der Arithmetik, S. 330), konstruiert auch anstatt der Pestalozzischen Einheitstabelle ein neues Versinnlichungsmittel, welches ‚veränderlich ist und die Ordnung der Zahlen selbst zu erzeugen und zu schaffen vermag‘: aber gerade darin bewährt er sich als echten Jünger des geistvollen Meisters, daß er mit den Prinzipien und in dem Geiste des Meisters eine Fortbildung des Systems unternimmt.

Das ist ihm gelungen. Tillichs Rechenbuch enthält wohl im einzelnen manches Veraltete, dasselbe ist und bleibt aber ein Muster eines mit psychologischer Gewissenhaftigkeit und Feinheit angelegten Lehrganges für den Rechenunterricht, und sein Rechenkasten mit seinen Einheitswürfeln und den die mehrmalige Wiederholung der Einheit darstellenden und so die geordnete Bildung der Zahlreihen erzeugenden Zahlstäben entwickelt in der Hand eines pünktlichen Lehrers eine solche Gewalt, daß selbst zurückgebliebene und durch die Schuld eines mangelhaften Elementarunterrichts unklar und unsicher gewordene Schülernaturen geheilt und in ein gesundes Wachstum versetzt werden können.“ [23]).

Das entschiedene Eintreten Stoys und seiner zahlreichen Schüler für Tillichs Erfindung bewirkte, daß der Rechenkasten namentlich seit den siebziger Jahren wieder mehr bekannt wurde. Gegenwärtig aber ist er bereits in mehreren thüringischen Staaten als obligatorisches Anschauungsmittel eingeführt worden, aus sehr vielen sächsischen Volksschulen hat er die russische Rechenmaschine verdrängt, in Österreich hat er durch Bräutigams Bemühungen festen Boden gewonnen u. s. w. Auch das vorliegende Handbuch hat nicht wenig dazu beigetragen, dem Tillichschen Anschauungsmittel Freunde im Süden, Westen und Norden des deutschen Vaterlandes zu gewinnen. Das alles sind Anzeichen, daß man seinen Wert mehr und mehr erkannt hat. Zwar wird Dittes absprechendes Urteil über den Rechenkasten noch immer nachgesprochen; indessen doch wohl nur von solchen, welche denselben nicht genauer kennen oder noch nicht benutzt haben. Denn wenn Dittes schreibt: „Dieser Apparat, welcher hie und da noch in Gebrauch ist, kann gewiß gute Dienste leisten, hat aber den Fehler, daß er die Zahl durch die Größe darstellt, was offenbar der reinen Zahlanschauung Eintrag thut; denn wenn auch ein Körper z. B. sechsmal so groß ist als der als Einheit angenommene Würfel, so ist dennoch jener Körper nur einer, also kein unmittelbares Bild der Sechs. Der beste oder gar ein notwendiger Apparat ist der von Tillich jedenfalls nicht“ [24]) — so ist dagegen mancherlei einzuwenden. Erstens muß das „hie und da“ heute in ein „mehr und mehr“ verwandelt werden, während das „noch“ ganz zu streichen und an Stelle des „ist“ ein „kommt“ zu setzen ist; zweitens muß bemerkt werden, daß Dittes den Zahlbegriff einseitig faßt, indem ihm die Zahl nur als Vielheit gilt, während sie doch zugleich auch als Einheit zu nehmen ist; drittens darf hinzuge-

23) A. a. O. S. III f.
24) Dittes, Schule der Pädagogik. S. 664.

fügt werden, daß Dittes' Bemerkung überhaupt gegenstandslos ist, indem ja die Prismen, welche die Zahlen 2 bis 10 veranschaulichen sollen, dadurch zu unmittelbaren Bildern dieser Zahlen werden, daß man an ihnen durch Einschnitte sämtliche zugehörige Einheitswürfel markiert.

Überdies stehen dem Urteile des Pädagogen Dittes auch Urteile zahlreicher anderer Pädagogen, welche zugleich namhafte Rechenmethodiker und Rechenpraktiker sind, gegenüber. So sagt der große Praktiker Kehr: „Der relativ vollkommenste, leider in Vergessenheit geratene Apparat ist noch immer der Tillichsche Rechenkasten; ‚es ist eine förmliche Inspiration, die ihn geschaffen hat', denn er erfüllt in seiner großen Einfachheit wie kein anderes Hilfsmittel alle die Bedingungen, welche durch psychologische Reflexionen an den Unterricht gestellt werden."[25]) Jänicke bemerkt: „Der Tillichsche Rechenapparat . . . ist in unverdiente Vergessenheit geraten."[26]) Adam schreibt: „Dieser Apparat, dessen Gebrauch leicht ersichtlich ist, empfiehlt sich insbesondere dadurch, daß hier jede veranschaulichte Zahl nicht nur als der Inbegriff von mehreren Einheiten, sondern auch — was psychologisch sehr bedeutsam ist — als ein wirklich Ganzes, nämlich als ein Ganzes für sich erscheint. Letzteres ist nicht erreichbar bei Anwendung des folgenden Apparates (der Russischen Rechenmaschine)."[27]) Bei Leutz heißt es: „Dieser Apparat ist sehr einfach, jede Zahl erscheint als ein Ganzes für sich, an dem doch die Einheiten zugleich erkennbar sind. Das ist der Vorzug vor der am häufigsten gebrauchten Russischen Rechenmaschine."[28])

Daß außer Göpfert auch Bräutigam und Schneyer ihrem Lehrgange des Rechnens den Tillichschen Rechenkasten zu Grunde legen, ist wiederholt bemerkt worden. Ebenso ist Lincke, dessen Rechenbuch aus andern Gründen oben bereits erwähnt wurde, ein entschiedener Anhänger des Tillichschen Rechenkastens.[29]) Nicht minder sind es Knabe,[30]) die Verfasser der „Schuljahre" (wenigstens für die Zahlreihe 1 bis 10), Griesmann u. v. a.

Was schließlich uns selbst betrifft, so schätzen wir seit fast drei Jahrzehnten den Tillichschen Rechenkasten als dasjenige Anschauungsmittel, welches sich mehr als alle andern geeignet erwiesen hat, selbst schwächere Schüler so weit zu fördern, daß sie am Ende des ersten Schuljahres innerhalb der Zahlreihe 1 bis 10 und am Ende des zweiten Schuljahres innerhalb der Zahlreihe 1 bis 100 mit Verständnis, Sicherheit und genügender Fertigkeit rechneten. Da wir aber während der letzten fünfzehn Jahre Gelegenheit hatten, alljährlich in 12 bis 14 Schulklassen der Unterstufe die Erfolge genauer kennen zu lernen, welche mit Hilfe des

---

25) Kehr a. a. O. S. 217.
26) A. a. O. S. 126.
27) Adam a. a. O. I. S. 38.
28) Leutz a. a. O. S. 215 f.
29) Vergl. S. 141.
30) Knabe a. a. O.

Tillichschen Rechenkastens erzielt wurden, diese Erfolge aber stets als gute, öfter sogar als sehr gute bezeichnet werden mußten, so dürften unsere bezüglichen Wahrnehmungen wohl Beachtung verdienen. Mit überraschender Leichtigkeit, „fast spielend“ könnte man sagen, haben wir namentlich im ersten Schuljahre die Kinder das Unterrichtsziel im Rechnen erreichen sehen. Das Rechnen war thatsächlich zur leichtesten Disziplin geworden. Daher können wir auch Försters Behauptungen: „Der Schritt vom Konkreten zum Abstrakten fällt aber manchen Kindern (im Rechnen) unendlich schwer. Deshalb gehört das Rechnen unstreitig zu den schwierigsten Disziplinen der Elementarklasse“ — nicht beipflichten.[31]) Geradezu unbegreiflich aber sind uns die Wahrnehmungen, welche Wiedemann in seiner Elementarklasse gemacht hat. Dieser sagt nämlich am Schlusse seiner Anweisung für den Rechenunterricht: „Nimm dich der Pappenheimer unermüdlich an, werde bei ihnen des immer und immer wieder Anschauenlassens nicht überdrüssig. Bleibt dir dann einer, oder bleiben dir gar einige ‚sitzen‘, kannst du dir zum Troste sagen, daß du deine Pflicht an ihnen gethan hast! Ich habe überhaupt die Erfahrung gemacht, daß in keiner Disziplin unter den Kleinen soviel Pappenheimer zum Vorschein kommen, als gerade im Rechnen. Oft sonst recht leidliche Köpfe bleiben zuweilen in diesem Fache, wie man sagt, auf den Hefen sitzen. Ich habe kleine Bursche gehabt, die keinen Tag Schule versäumt, also den vollständigen Rechenunterricht wie alle andern und außerdem noch Nachhilfe gehabt hatten, und die doch am Schlusse des Schuljahres noch nicht wußten, wieviel 2 und 2 ist. Manche Kinder scheinen faktisch keine Sinnbefähigung für das Rechnen zu besitzen, und es dürfte dies ganz analog der Erscheinung sein, daß manche Menschen absolut kein musikalisches Gehör haben.“ [32])

Woraus erklären sich aber die günstigen Erfolge, welche mit Tillichs Rechenkasten allerorten, wo man ihn richtig benutzte, erzielt wurden? Hören wir, was der treffliche Bartholomäi in seinen „Erinnerungen aus der Praxis des Jenaischen Seminars“ darüber schreibt: „Das beste Anschauungsmittel ist der Tillichsche Rechenkasten. Er entspricht wie kein anderer Apparat der Zahlvorstellung, und es ist eine förmliche Inspiration, die ihn geschaffen hat. Der erste Vorzug besteht in der Darstellung der Vielheiten. Keine andere Rechenmaschine ist geeigneter als der Rechenkasten, um mehrere Einheiten in eine Einheit zusammenzufassen, indem er nicht nur die Vielheit, sondern auch die materielle Zusammengehörigkeit, also die Einheit, ein wirkliches Eins darstellt. Bei Stiften, Strichen, Punkten, Kugeln, Äpfeln u. s. w., überhaupt bei benannten Zahlen hat man keine eigentliche Einheit, die Stäbchen des Rechenkastens aber sind wirkliche Einheiten, Zahlen, also kann man wohl fragen, welches Stäbchen um 4 größer ist als zwei u. s. w. Obwohl verschiedene Anschauungsmittel ihre Berechtigung haben, ja, wie

31) Förster a. a. O.
32) Wiedemann a. a. O.

sich weiter zeigen wird, notwendig sind, so sind sie doch unzulässig, wenn die Kinder erkennen sollen, in wieviele und welche Teile, die eben Einheiten sein müssen, sich die Zahlen zerlegen lassen. Fünf in zwei Mützen und drei Hüte zu zerlegen, um zu lehren, daß 5 = 2 + 3 ist, kann nicht zum Ziele führen. Die Bedeutung des Rechenkastens besteht hier darin, daß mit der Zahlvorstellung eine Vorstellung von einem Gegenstande verbunden ist, die dem Zahlbegriffe entsprechend Eins und Vieles ist und anschaulich aufzeigt.

Der zweite Vorzug des Rechenkastens besteht darin, daß er ganz von selbst die Vielheiten in eine wohlgeordnete Zahlreihe zusammenfaßt. Für die Bildung der Zahlreihe ist er unglaublich wichtig, um auf- und abzugehen, in Zwischenräumen vor- und rückwärts zu schreiten, z. B. wieviele Zweier sind in Zehn? Von besonderem Werte ist er für die Bildung der Zahlreihe 1 bis 20. Mit dem Hinsprechen der Sätzchen: ‚Auf 1 folgt 2, auf 2 folgt 3 u. s. w., vor 10 ist 9, vor 9 ist 8 2c., 2 ist zwischen 1 und 3, 3 ist zwischen 2 und 4 2c.‘ kommt freilich nichts heraus. Es muß vielmehr jedes Stäbchen nach Einheiten gezählt werden, bis es die Kinder so in sich aufgenommen haben, daß sie es mit einem anderen nicht mehr verwechseln können, dann muß es unter andern Stäbchen herausgesucht und der Satz endlich von den Kindern selbst gefunden werden. Solche Übungen sind in Masse und Mannigfaltigkeit nötig, nicht aber das gedankenlose und rein mechanische Nachreden. Die Stäbchen müssen z. B. in Unordnung gebracht und von den Kindern geordnet werden. . . .“ [33])

Es ist oben zwar mitgeteilt worden, welche Angaben Tillich selbst über seinen Rechenkasten gemacht hat; diese Angaben sind aber sehr kurz gehalten und können leicht ein falsches Bild von der Einrichtung des Kastens im Leser entstehen lassen. Thatsache ist wenigstens, daß in den letzten Jahren Apparate nach Tillich benannt worden sind, welche von dem ersten Tillichschen Rechenkasten mehr oder weniger abweichen. Und so dürften wohl einige weitere Angaben über die geeignetste Form des Apparates hier am Platze sein.

Wenn Tillich Würfel mit der Kantenlänge 1 Zoll fordert, so darf von dieser Forderung jedenfalls abgewichen werden, seitdem der Zoll aufgehört hat, ein gesetzlich vorgeschriebenes Längenmaß zu sein. Wir dürfen also die Kante der Würfel nach Centimeter bestimmen. Wie lang soll sie aber sein? Darüber schreibt A. Hartmann im Magazin für Lehr- und Lernmittel: „Als die geeignetste Länge der Würfelkante muß jedenfalls die betrachtet werden, welche folgenden Forderungen Genüge leistet: a) Der einzelne Würfel muß so groß sein, daß er auch von den Kindern der hintersten Sitzreihen einer großen Klasse deutlich aufgefaßt werden kann; b) die Kante des einzelnen Würfels sowohl, wie auch die lange Kante des Zehnerstabes muß einen bestimmten Teil unserer Maßeinheit, des Meters, darstellen; c) die Stäbchen des Rechenkastens müssen von den

33) Allg. Schulz. a. a. O. Nr. 41.

im ersten Schuljahre stehenden Kindern, um die es sich ja hauptsächlich handelt, ohne Schwierigkeit zu handhaben sein." [34]) Diesen Ausführungen kann man sich unbedenklich anschließen. Wenn man das aber thut, so beschränkt man die Länge der Würfelkante auf fünf Fälle: 1, 2, 2½, 5 und 10 cm. Da sich nun bei weiterer Überlegung bald herausstellt, daß die Fälle 1, 5 und 10 cm die weniger praktischen sind, so bleiben schließlich 2 und 2½ cm als die annehmbarsten Kantenlängen übrig. Von diesen aber verdient jedenfalls die letztgenannte, weil sie die besser wahrnehmbaren Würfel liefert, ohne daß der Kasten zu groß und schwer wird, den Vorzug. Etwas anders liegt für uns die Frage nach der Länge der Würfelkanten nur dann, wenn es sich um einen unvollständigen Rechenkasten handelt, wie er im „Lehrerhefte" für das erste Schuljahr empfohlen worden ist. Wenn nämlich das erste Schuljahr nicht über die Zahlreihe 1 bis 10 hinausgeht, so reichen für dasselbe schon aus: 10 Einer, 5 Zweier, 4 Dreier, 3 Vierer, 2 Fünfer, je 1 Sechser, Siebener, Achter, Neuner und Zehner, also eine erheblich kleinere Anzahl von Würfelsäulen, als sie der vollständige Rechenkasten enthalten soll. Entscheidet man sich für diese kleinere Anzahl, so wird die Holzmasse weder zu groß noch zu schwer, wenn die Würfelkanten 5 cm lang genommen werden.

Weiter könnte es sich um die Markierung der Einerwürfel auf den Stäben (Würfelsäulen) handeln. Darüber bemerkt A. Hartmann a. a. O.: „Was die Angabe der Einerstriche auf den Stäben betrifft, so gehen die Ansichten der Methodiker auseinander. Die einen meinen, es müßten auf allen vier Langseiten des Stabes deutlich erkennbare Querstriche gemacht werden, damit man die Anzahl der in dem Stabe enthaltenen Einsen gut erkennen könne, die andern halten die Angabe dieser Teilungsstriche auf allen vier Langseiten für unnötig, auf einer Seite dagegen für praktisch." Wir sind der Ansicht, daß beide Ansichten Beachtung verdienen. Im ersten Schuljahre mögen alle vier Seiten Striche erhalten, im zweiten Schuljahre braucht nur eine Seite damit bedacht zu werden. Man hat in neuerer Zeit die Einerwürfel auch durch verschiedene Farben unterschieden. Das ist aber eine Abweichung von Tillichs Idee, welche wir nicht billigen können. Tillich fordert mit Recht Fernhaltung aller Qualitäten. Denn sind Dinge nach ihren in die Sinne fallenden Merkmalen verschieden, so faßt die Seele erst diese Verschiedenheiten und nicht die Zahl auf.

Schließlich wäre noch der Art und Weise der Aufbewahrung der Würfel und Würfelsäulen im Kasten zu gedenken. Diese kann beim unvollständigen Rechenkasten einfach durch Aufeinanderlegen, also wie im Baukasten, erfolgen. Beim vollständigen Rechenkasten hingegen ist an der Tillichschen Aufstellung unbedingt festzuhalten. Diese besteht darin, daß in einem geeigneten Kasten in eine Reihe voran die zehn Einer, hinter diese die zehn Zweier, danach die zehn Dreier u. s. f., zuletzt (in

34) Jahrgang 1881 Nr. 15.

der zehnten Reihe) die zehn Zehner gesetzt werden. Dadurch entsteht ein treppenartiger Aufbau, welcher den Aufbau der Zahlreihe 1 bis 100 in ganz vorzüglicher Weise zur Anschauung bringt. Die Gestalt des Kastens selbst richtet sich nach der zunehmenden Höhe der Würfelsäulen. Die Seitenwände erscheinen deshalb in Form von Paralleltrapezen. Zum Verschließen des Kastens benutzte Tillich einen verschiebbaren Deckel. Uns scheint indessen ein drehbarer Deckel, an dem ein drehbarer Stab angebracht ist, der dem zurückgeschlagenen Deckel so als Stütze dient, daß derselbe ein erhöhtes horizontales Tischchen bildet, auf welches die Würfel und Würfelsäulen während des Unterrichts gestellt werden können, ein vorteilhafterer Verschluß zu sein.[35])

Das Vorstehende dürfte ausreichen, um über die Einrichtung und den Wert des Tillichschen Rechenkastens ein zutreffendes Urteil gewinnen zu lassen. Wenn wir denselben aber eingehender, als es in andern Rechenwerken geschieht, behandelt haben, so bestimmte uns dazu einerseits der hohe Wert dieses Anschauungsmittels an sich, anderseits der besondere Umstand, daß in unserm „Rechenbuche" das Rechnen auf der Unterstufe den Rechenkasten als Anschauungsmittel voraussetzt. Es lag uns daran, die Wahl dieses Anschauungsmittels ausreichend zu begründen. Sollte aber auch jetzt noch jemand darüber im Zweifel sein, daß der Tillichsche Rechenkasten wirklich mehr leistet als andere Rechenapparate, so giebt es ein ganz unfehlbares Mittel, diesen Zweifel für immer zu beseitigen: die (richtige) Benutzung des Rechenkastens!

Und noch eins. Wir haben oben die sechs wichtigsten Eigenschaften zusammengestellt, welche ein gutes Anschauungsmittel für den Rechenunterricht kennzeichnen. Der Russischen Rechenmaschine konnten wir die vier ersten dieser Eigenschaften zusprechen. Dem Tillichschen Rechenkasten aber fehlen auch die beiden letzten nicht. Da nun gerade diese beiden Eigenschaften es sind, welche die zur Gewinnung klarer und deutlicher Zahlbegriffe wertvollsten Anschauungen vermitteln, so folgt insbesondere noch, daß der Rechenkasten der Russischen Rechenmaschine entschieden überlegen ist.

Von den übrigen zahlreichen Würfelapparaten mögen hier noch folgende kurz angeführt werden: 1) Würfelapparat für das Rechnen von 1 bis 100 und für das Bruchrechnen von G. Helmcke. Unter Zuhilfenahme von Farben wird eine Vereinigung der Vorzüge der Russischen Rechenmaschine mit denjenigen der Einerwürfel versucht. Der Apparat kann beim Rechnen mit Bruchzahlen gute Dienste leisten. 2) Die Universal-Rechenmaschine von Frank. Sie hat 20 eiserne vierkantige Stäbe, auf welche die Würfel geschoben werden. Es gehören im ganzen

35) Den hier beschriebenen vollständigen Tillichschen Rechenkasten liefert ein Tischler in Annaberg aus hartem Holze für 12 M. Sollte jemand einen solchen Kasten beziehen wollen, so genügt eine Mitteilung mit genauer Angabe der Adresse an den Herausgeber des vorliegenden Handbuches, welcher die korrekte Ausführung der Bestellung gern überwacht.

400 Würfel, deren Seiten verschiedene Farben zeigen, dazu. Diese Maschine soll nicht nur in die Zahlenreihen 1—10, 1—100 und 1—1000 einführen, sondern auch so ziemlich alle in der Volksschule vorkommenden Rechnungsarten, sodann Flächenberechnungen, Ähnlichkeit der Dreiecke u. s. w. veranschaulichen, Zeichenvorlagen darbieten u. dgl. m. 3) Heyers Rechenapparat. Dieser bringt als Einer Kubikcentimeter, als Zehner Decimeterstäbe, als Hunderter Quadratdecimeter, als Tausender Kubikdecimeter. 4) Der Schulzesche Klötze-Apparat. Würfel und Prismen desselben sollen in die Zahlreihen 1 bis 10 und 1 bis 100 einführen. Man kann ihn als eine vereinfachte Verwertung des Tillichschen Apparates in Verbindung mit dem Heerschen Würfel (einem ältern Anschauungsmittel) bezeichnen. 5) Willes Zahlenbilder-Rechenkasten, bestehend aus 42 farbigen Würfeln. 6) Zürchers Rechenmaschine, gewissermassen eine Russische Rechenmaschine mit Würfeln. 7) Eine neue Rechenmaschine von Lehrer Kohlschmidt in Schwarzenberg (Sachsen), welche ebenfalls bezweckt, die wertvollen Eigenschaften des Tillichschen Rechenkastens mit denjenigen der Russischen Rechenmaschine zu vereinigen. Dieselbe verdient jedenfalls die Beachtung, welche sie seitens vieler Rechenlehrer gefunden hat.

Als dritte Gruppe der körperlichen Anschauungsmittel sind oben diejenigen genannt worden, bei denen Scheiben, Knöpfe u. dgl. m. als Anschauungsobjekte vorkommen. Erwähnt zu werden verdienen die Raumerschen Rechenmarken, so genannt, weil sie Karl von Raumer zuerst einführte. Es handelt sich bei denselben um weiße und gelbe Scheiben aus Metall oder Pappe in drei verschiedenen Größen: die Einer-, Zehner- und Hunderterscheiben in weißer, die Tausender-. Zehntausender- und Hunderttausenderscheiben in gelber Farbe. Ferner das Löcherbrett, von Joseph Gersbach in Karlsruhe erfunden, das in der „Hundertlöcherigen Tafel," auch „Berliner Knopfapparat" genannt, eine neue Auflage erlebt hat. Dieser Apparat ist sehr einfach. Eine Tafel hat 100 Bohrungen in 10 Reihen; in die Bohrungen werden gestielte Knöpfe gesteckt. Auch der Herbartianer Lindner in Kuttenberg hat einen derartigen Apparat konstruiert und namentlich zur Darstellung von Zahlbildern benutzt. Eine Russische Rechenmaschine mit Scheiben ist Diehls Rechenmaschine. Im Rechenapparat von Sielisch werden kleine runde Holzscheiben als Einer, größere als Zehner verwendet. Lehrer Haupt in Leipzig bietet „Bunte Rechenscheiben" als Hilfsmittel beim ersten Rechenunterrichte an. Dieselben erweisen sich namentlich für die Einführung der Subtraktion recht brauchbar. Auch dienen sie denen, welche Wert darauf legen, daß die Schüler selbst ein Hilfsmittel in die Hand bekommen; denn es giebt davon eine große und kleine Ausgabe. Das nämliche ist der Fall bei dem „Nürnberger Rechenbrett" des Lehrers Tröltzsch in Nürnberg, welches ebenfalls in einer großen und kleinen Ausgabe zu haben ist. Dasselbe beruht auf der Zweierteilung, bietet zwei Zehnerreihen (in Vertiefungen und Scheiben) und empfiehlt sich besonders durch seine Handlichkeit.

Die vierte Gruppe der körperlichen Anschauungsmittel hat es mit Stäben, Walzen u. dgl. zu thun. Hierher gehören als älteres Anschauungsmittel die Pöhlmannschen Stäbchen, die schon vor Pestalozzi gebraucht wurden, dann aber in Vergessenheit gerieten. In neuerer Zeit sind dieselben namentlich durch den Fröbelschen Kindergarten wieder in Aufnahme gekommen. Sie regen zur Selbstthätigkeit an, indem sie jeder Rechenschüler erhält, und können auf der Unterstufe gute Dienste leisten. Coßmanns Numeriermaschine, ein angeblich neues Anschauungsmittel, unterscheidet sich kaum von diesen Stäbchen. Der Erfinder hatte wahrscheinlich keine Kenntnis davon, daß letztere schon längst benutzt worden waren. Dreieckige farbige Stäbe werden im Zarthschen Bruchrechenapparate verwendet. Auch von Heyer in Gotha giebt es einen Bruchrechenapparat mit Stäben. Einer der bekanntesten Walzenapparate soll ebenfalls der Bruchrechnung dienen; es ist dies der Poppesche Apparat, dessen Walzen sich auf Drähten befinden. Eine Russische Rechenmaschine mit Holzwalzen kann man füglich die Mühlpfordtsche Rechenmaschine nennen.

2. Die graphischen Anschauungsmittel.

Dieselben stehen zwar, wie bereits bemerkt wurde, hinter den körperlichen Anschauungsmitteln zurück, verdienen aber deshalb Beachtung, weil sie von den Sachen und körperlichen Anschauungsmitteln aus die allmähliche Überleitung zur abstrakten Zahl in zweckmäßigster Weise fortsetzen, Muster gewisser Darstellungsformen liefern und mannigfache Anregung zur Selbstbethätigung geben. Es giebt feste und bewegliche graphische Anschauungsmittel; die Objekte beider können in Reihenform oder als Zahlbilder geordnet auftreten. Feste Reihentabellen sind z. B. Pestalozzis Tabellen, deren oben bereits gedacht worden ist.[36]) Dieselben werden jetzt freilich so gut wie nicht mehr gebraucht. Ein gleiches Schicksal war Heers beweglichen Rechenfiguren beschieden. Dagegen hat sich Heers und Sterns Quadratfeld da und dort bis heute behauptet, denn dasselbe ist erst in den siebziger Jahren wieder von Chr. Harms empfohlen worden.[37]) Eine neuere Erscheinung auf dem Gebiete der beweglichen Zahlbilderapparate ist Borns „Neuer Rechenapparat zur Veranschaulichung der Rechenoperationen an Zahlenbildern mit wechselnden Farben, mit einem Vorworte von A. Böhme.“ Gerühmt wird an demselben die Möglichkeit, Zahlbilder nicht nur schnell entstehen, sondern auch schnell abändern zu lassen. Das aber führt auf die Zahlbilder überhaupt, welche von vielen der neuern Rechenmethodiker gerühmt werden.

---

36) Vergl. S. 59.
37) Vergl. Jänicke a. a. O. S. 139.

Die Zahlbilder sollen das sofortige Auffassen einer Vielheit ermöglichen, und so einen Totaleindruck der Zahl gewähren, wie er nicht möglich ist, wenn die Sinnendinge in Reihenform auftreten. Es werden dabei Punkte zu zweien oder dreien gruppiert, etwa so, wie es auf Spielkarten, Würfeln und Dominosteinen seit langer Zeit schon geschieht. Näheres darüber findet man außer bei Jänicke[38]) bei denjenigen Rechenmethodikern, welche selbst Gebrauch von den Zahlbildern machen, wie z. B. Böhme, Hentschel, Kaselitz, Büttner, Lindner, Beetz u. a. Will man über den unterrichtlichen Wert der Zahlbilder ein klares Urteil erlangen, so genügt es freilich nicht, zu erfahren, daß sie neuerdings vielfach angewandt und empfohlen werden. Da muß man vor allem wissen: Was leisten sie, um klare Zahlvorstellungen zu gewinnen bez. zu befestigen, und welche Unterstützung gewähren sie, um in die Zahloperationen einzuführen? Gehen wir also etwas näher auf dieselben ein.

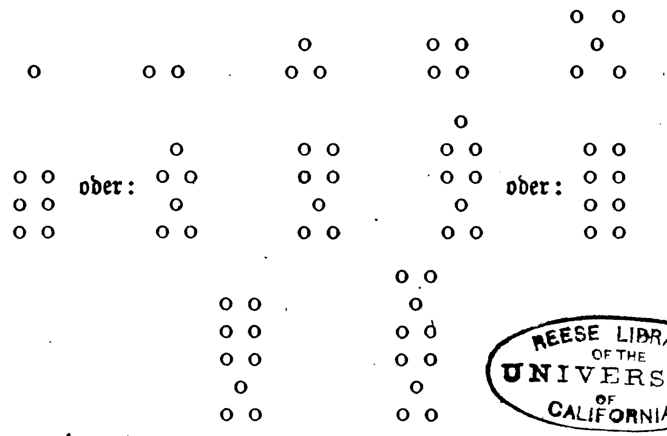
Die Zahlbilder an sich sind eine uralte Erfindung; ihre Einführung in den ersten Rechenunterricht hingegen ist jüngern Datums. Nachweislich benutzte Busse, Lehrer am Dessauer Philanthropin, 1797 Zahlbilder als Anschauungsmittel.[39]) In den vierziger Jahren machte A. Böhme auf dieselben wieder aufmerksam.

Bei Böhme stellt das Zahlbild durch starke Punkte die Einheiten symmetrisch zusammen. Aus dem Gesamtbilde treten wieder Einzelgruppen hervor, also Zerlegungen der Zahlbilder in Stücke oder Teile, die als fertige Summen, Unterschiede und Produkte aufgefaßt werden können u. dgl. m. Der Betrachtung des Zahlbildes gehen Zählübungen voraus, wie auch die Betrachtung des Zahlbildes selbst stets mit dem Zählen der Punkte beginnen soll.

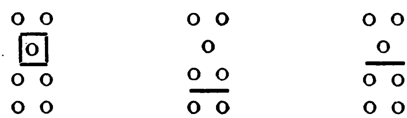
Nächst Böhme ist Hentschel als Verbreiter der Zahlbilder zu nennen.[40]) Er erklärt: „Zahlbilder sind symmetrische, charakteristische Figuren (mathematischen Grundformen entnommen), aus Punkten, Kreisen ꝛc. zusammengestellt, deren Inhalt sich mit einem Blick übersehen läßt, was bekanntlich mit einer Reihe von Strichen, Punkten ꝛc., sobald sie mehr als 5 enthält, nicht der Fall ist. Diejenigen Formen der Zahlbilder sind die brauchbarsten, welche bei ihrer Zerlegung in zwei Teile wieder zwei Zahlbilder vors Auge stellen. — Man wechsle nicht ohne Not mit der Form des Zahlbildes.“ — Hentschels normale Zahlbilder sind folgende:

---

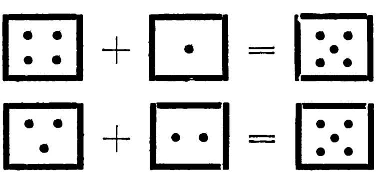
38) A. a. O. S. 141 f.
39) Vergl. S. 48.
40) Hentschel a. a. O. S. 4 f.



Eine Papptafel, auf welcher die Zahlbilder in Punkten nebeneinander stehen, über jedem die zugehörige Ziffer, wird bei Wiederholungen benutzt und dient zugleich als Vorschrift für das Zifferschreiben. Neben den normalen Zahlbildern giebt es auch noch freie. An allen aber werden Zerlegungen vorgenommen, z. B. bei Sieben:



wobei die Teile (6 u. 1, 5 u. 2, 4 u. 3) wieder normale Zahlbilder von 1, 2, 3, 4, 5 u. 6 sind. Hentschel fügt hinzu: „Diese Übung ist für das vollständige Erkennen des Inhalts der Zahlen entschieden von großer Wichtigkeit. Sie möge deshalb recht fleißig betrieben werden.“[41]) Den Zahlbildern folgen die Ziffern. Ob auch das Zifferrechnen? Das hängt davon ab, ob die Kinder mit der Ziffer (dem Zahlzeichen) die Zahlvorstellung verbinden und im Zifferschreiben hinreichend geübt sind. Wenn nicht, dann soll (bis zur 5 oder 6) mit Zahlbildern gerechnet werden. Hierbei kommen Aufgaben folgender Art vor:



u. s. w.

$4 + 1 =$ $\quad$ $3 + 2 =$
$1 + 4 =$ $\quad$ $2 + 3 =$

$5 - 1 =$ $\quad$ $5 - 2 =$
$5 - 4 =$ $\quad$ $5 - 3 =$

41) Ebenda S. 10.

Mit Strichen, Punkten ꝛc. in Reihenform aber soll man nach Hentschel nicht rechnen lassen. Also z. B. nicht so:

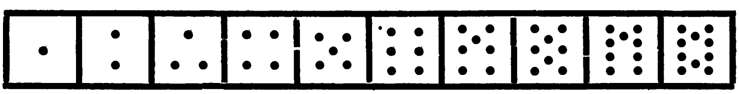
a) ||| + |||| = ||||||| c) ||| × || = ||||||
b) ||||||||| — |||||| = ||| d) || in |||||| = |||

Denn, fährt Hentschel fort: „Was das Rechnen mit Strichreihen betrifft, so ist gewiß, daß die Kinder nicht mehr als 4 Striche als ein Ganzes mit einem Blicke übersehen können. Demnach vermögen sie ihre eigenen in Strichen gemachten Aufzeichnungen überall, wo Zahlen über 4 vorkommen, nicht unmittelbar wieder zu lesen, sondern sie sind, wenn das Lesen gefordert wird, zu einem fortwährenden mühsamen und geistlähmenden Nachzählen einzelner Striche gezwungen. — Wo soll der Lehrer in einer großen Elementarklasse die Zeit hernehmen, die in Strichen ausgeführten Arbeiten einer zahlreichen Abteilung von Schülern zu prüfen? In Ziffern Geschriebenes lernt man mit einem Blicke übersehen (dasselbe gilt in gewissem Sinne auch von den Zahlbildern); bei Aufzeichnungen in Strichen ist dies unmöglich.“ —

Bemerkenswert ist jedenfalls die Stellung, welche Hentschel nach dem Gesagten den Zahlbildern anweist. Sie gelten ihm als dasjenige Darstellungsmittel der Zahlen, welches die Überleitung von dem grundlegenden (durch Striche, Punkte ꝛc.) zu dem abschließenden (durch Ziffern gegebenen) Darstellungsmittel bewirken soll. Er betrachtet sie sonach als eine Vorstufe der Ziffern und läßt sie fallen, sobald das Kind mit den Ziffern die richtigen Zahlvorstellungen verbindet. Da liegt jedenfalls die Frage nahe: Sind die Zahlbilder nicht entbehrlich, wenn es ein erstes Anschauungsmittel für den Rechenunterricht giebt, welches hinreichend klare Zahlvorstellungen vermittelt, um sofort zu den Ziffern überzugehen?

Sehr großen Wert legt Kaselitz den Zahlbildern bei. Derselbe will, daß auf der Unterstufe zuerst für Herbeischaffung von Zahlvorstellungen und Begriffen gesorgt werde. Die unterrichtliche Behandlung des zugehörigen Lehrstoffes hat es nach ihm aber zu thun: a) mit der entwickelnden Unterweisung und b) mit dem Üben. Die erstere benutzt wirkliche Dinge als Anschauungsmittel, z. B. Finger, Kugeln, Klötzchen u. dgl. Ihr Ziel ist, dem Kinde klare und bestimmte Vorstellungen und Begriffe der Einerzahlen zuzuführen. Das letztere soll zu einer sichern und schnellen Reproduktion der gewonnenen Vorstellungen und Begriffe führen. Dabei aber, meint Kaselitz, benutzt man zweckmäßig nur ein Anschauungsmittel und zwar, um keine Zeit zu versäumen, ein unbewegliches. So kommt er schließlich auf „fixierte (gedruckte) Zahlbilder von ausreichender Größe und Deutlichkeit.“ Er sagt von denselben: „Solche Zahlbilder sind um so zweckmäßiger, je leichter das Kind schon aus der Gruppierung der Punkte (also ohne sie erst zu zählen) die durch das Bild dargestellte Zahl erkennt, und je mehr der Grundsatz durchgeführt ist: jede Zahl wird nur durch ein Bild darstellt, auch wenn die Zahl als ein Teil einer größern Zahl erkannt werden soll. — Zahlbilder, welche diesen Grundsatz voll und ganz durchführten, sind mir nicht bekannt. Die von A. Böhme sind zwar an sich übersichtlich gruppiert, aber sie geben nur eine Gesamtvorstellung der einzelnen Grundzahlen und lassen durchaus in keiner Weise erkennen, aus welchen Teilen sich im gerade gegebenen Falle die betreffende Grundzahl zusammensetzt. Und das gerade ist die Hauptsache . . . Die von Fix nnd Hentschel sind so unübersichtlich gruppiert, daß es selbst für einen Erwachsenen schwer ist, sofort zu erkennen, welche Zahl verbildlicht ist. Die Hentschelschen unterscheiden zwar die Teile, aus denen im speziellen Falle die betreffende Zahl zusammengesetzt gedacht werden soll, indem der eine Teil durch schwarze, der andere durch rote Punkte dargestellt ist, aber der schroffe Farbenunterschied hemmt die Gesamtauffassung der Summe der schwarzen und roten Punkte. Überdies ist bei den meisten Bildern ohne sorgsames Zählen auch die Anzahl der schwarzen und roten Punkte kaum zu bestimmen."[42])

Aus diesen Worten ist zu entnehmen, daß Kaselitz von seiner Art und Weise, die Zahlbilder zu verwerten, ziemlich hoch denkt, daß er insbesondere meint, über Böhme und Hentschel hinausgegangen zu sein. Allerdings räumt er ein, daß unter den 140 Zahlbildern, welche seine „Hilfs- und Übungswandtafeln für den ersten Rechenunterricht", sowie sein „Hilfs- und Übungsbüchlein für den ersten Rechenunterricht" enthalten, sich 15 befinden, welche gegen den oben aufgestellten Grundsatz verstoßen, indessen gilt ihm das doch als eine so geringe Anzahl, daß es nicht weiter ins Gewicht fällt. Die feststehenden Zahlbilder für die Zahlreihe 1 bis 10 sind bei Kaselitz folgende:



Das Kind soll diese Zahlbilder zunächst lesen (aus der Gruppierung der Punkte die bildlich dargestellte Zahl erkennen) lernen. Dann soll es, ebenfalls ablesend, nach denselben eine Reihe von Übungssätzen geläufig aufsagen. Zu diesem Zwecke werden die einzelnen Punkte durch senk- und wagerechte weiße Striche, welche mitten durch sie hindurch gehen, von einander unterschieden.

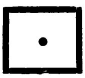
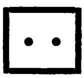
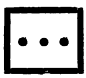
Bemerkenswert ist jedenfalls, daß Kaselitz diejenigen Zahlbilder für die zweckmäßigsten erachtet, bei denen das Kind schon aus der Gruppierung der Punkte (also ohne erst zu zählen) die dargestellte Zahl erkennt. Sie gelten ihm also (wie Hentschel) auch nur als vorläufige Vertreter der Ziffern. Wirklich rechnen sollen die Kinder auch bei ihm nicht mit den unbeweglichen Zahlbildern.

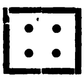
So streng aber auch der Maßstab ist, welchen Kaselitz an seine Zahlbilder legt, eins hat er doch übersehen oder nicht erreicht: Die

42) Kaselitz a. a. O. S. 9.

Unmittelbarkeit der Übergänge von jedem Zahlbilde zu dem vorhergehenden und nachfolgenden. Diese Unmittelbarkeit ist nur dann vorhanden, wenn durch Hinweg- oder Hinzunahme eines einzigen Punktes das benachbarte Zahlbild entsteht. Bei Kaselitz ist es aber z. B. nicht möglich, auf diese Weise von der Fünf zu Sechs, von der Acht zu Neun und umgekehrt zu gelangen.

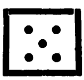
Büttner schreibt über die Zahlbilder: „Die Schüler haben mit Bewußtsein zählen gelernt und sich die Reihenfolge der Zahlwörter eingeprägt. Die Zahlbilder geben uns eine anschauliche Vorstellung der Zahlen von 4 bis 10, weil wir bei der Gruppierung der durch die einzelnen Zahlen bezeichneten Einheiten die Menge derselben mit einem Blicke übersehen, was bei einer Reihe von mehr als 4 (5) Punkten nur wenigen Menschen möglich ist. Die Zahlbilder befestigen also die schon gewonnenen Vorstellungen. Die schöne Darstellung ist eine zweckmäßige Arbeit für die stille Beschäftigung. Wir nehmen die Zahlbilder so, wie sie seit alter Zeit auf Würfeln und Dominosteinen vorkommen.

   bedürfen keiner besondern Besprechung.

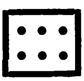


Von der 4 ab heißt es:

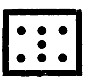
Die Vier sieht so aus: oben 2 und unten 2.



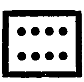
Die Fünf sieht so aus: oben 2, unten 2 und in der Mitte 1.



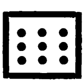
Die Sechs sieht so aus: oben 3 und unten 3.



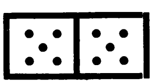
Die Sieben sieht so aus: oben 3, unten 3 und in der Mitte 1.



Die Acht sieht so aus: oben 4 und unten 4.



Die Neun sieht so aus: oben 3, unten 3 und in der Mitte 3.



Die Zehn sieht so aus: rechts 5 und links 5. — Man bildet die Zahlfiguren an der Maschine mit Kugeln vor den Augen der Kinder, und unter geringer Beihilfe finden die Kinder die eben hingestellten Sätze. Diese Sätze enthalten die Auffassung der Zahlbilder; sie werden genau und fest eingeprägt. Wird jedes Zahlbild sofort auch an die Schultafel gezeichnet und von den Kindern abgezeichnet, so ist die

Einprägung sehr bald erreicht.“ [43]) So die *Auffassung* und *Einprägung* der Zahlbilder. Ihr folgt das *Rechnen* mit Zahlbildern. Darüber bemerkt *Büttner*: „Wir zerlegen jede Zahl von 4 ab auf Grund des Zahlbildes in *zwei* Stücke, welche die Kinder auf die Frage angeben: Woraus besteht die 4? (5? 6? . .) An die Zerlegung schließen wir das Zusammenzählen der beiden Stücke und das Abziehen jedes Stückes von der ganzen Zahl an. Erst später folgt bei den Zahlen 4, 6, 8 und 10, die in 2 gleiche Teile zerlegt sind, das Malnehmen und das Teilen. . . *Das Rechnen mit den Zahlbildern wird nur mündlich geübt.* Während der drei Wochen, die es in Anspruch nimmt, üben die Schüler als stille Beschäftigung die *Ziffern* ein. — Die Bedeutung jeder einzelnen Ziffer wird dadurch vermittelt, daß man sie vor dem Schreiben neben das betreffende Zahlbild stellt. Bei jeder neuen Ziffer werden die alten, bekannten durch Leseübungen wiederholt.“

Man sieht, auch bei *Büttner* treten die Zahlbilder als Vorstufe der Ziffern auf. Das Kind soll mit „einem Blicke übersehen“, welche *Zahl* durch die einzelnen Zahlbilder dargestellt ist; dann erst soll es durch dieselben die Zerlegung und Zusammensetzung der Zahlen kennen lernen.

Am weitesten geht jedenfalls *Lindner* in der Anwendung der Zahlbilder. In seinem „Das Rechnen in Bildern, Zahlraum von 1—10.“ (Wien 1875.) befinden sich 10 Tafeln, für jede Zahl eine, welche außer Punkten noch allerlei andere Bilder vorführen, z. B. für die Zwei: zwei Hohlmaße, zwei Äpfel, zwei Geldstücke, zwei Kirschen, zwei Augen, zwei Gewichte, zwei Beine, eine römische und arabische Zwei, zwei Sonnen, dazu die Rechenoperationen mit der Zwei in Punkten, nämlich:

$$\colon = \cdot + \cdot \;\Big|\; \cdot + \cdot = \colon \;\Big|\; \colon - \cdot = \cdot \;\Big|\; 2 \times \cdot = \colon \;\Big|$$

$$\frac{\cdot\,\cdot}{2} = \cdot \;\Big|\; \frac{\cdot\,\cdot}{\cdot} = 2.$$

Eine Nachahmung des *Lindner*schen Gedankens ist „Des Kindes erstes Rechenbuch“ von *Leonhard Diefenbach* (Leipzig). In diesem zeigt die zweite Tafel folgende Bilder: Zwei Kugeln, zwei Hölzer, Gesichtsteil mit zwei Ohren, zwei Augen, Henne mit zwei Eiern, zwei Störche, zwei Knaben, zwei Hunde, eine römische und arabische Zwei u. dgl. m.

Mit Beziehung auf derartige Veranschaulichungen heißt es aber bei *Jänicke*: „Es leidet keinen Zweifel, daß die dicht zusammengedrängten Massen von Punkten und Figuren notwendig verwirren, vom straffen Anschauen und Aufmerken ablenken und Zerstreutheit und späterhin Übersättigung bei den Schülern erzeugen müssen, wenn sie überhaupt imstande sind, alle Veranschaulichungen deutlich zu erkennen. Die Methodik fordert allerdings, daß alle möglichen Anschauungsmittel zuhilfe genommen werden

43) Büttner a. a. O. S. 51.

müssen, damit der Zahlbegriff an recht vielen Gegenständen zur Erscheinung komme und desto schneller und sicherer die reine Zahl von demselben sich ablöse. Dazu bedarf es aber nicht eines so ungeheuern Bilderapparats. Es kann des Guten auch zuviel geschehen, und die so sehr betonte Anschaulichkeit ist im besten Zuge, zur Überanschaulichkeit zu werden, die das eigentliche Lernen nicht fördert, sondern hindert. Die alte Schule machte den Fehler, daß sie die Übung ohne die Anschauung trieb; die neue scheint in den entgegengesetzten zu verfallen und die Anschauung ohne die Übung zu betreiben."[44]) Wir stimmen diesen Worten bei. Ebenso decken sich folgende Äußerungen Jänickes mit unsern eigenen Ansichten: „Die Art der Veranschaulichung, wie sie jetzt wieder aufkommen will, ist von den erfahrensten Methodikern als eine psychologisch unberechtigte Neuerung, als eine arge Verkennung des Wesens der Anschauung bezeichnet und entschieden zurückgewiesen worden. Denn daß || + || = |||| ist, sieht das Kind ein; aber wie || − || = 0, ||| × || = ||||||, oder || : || = 1, |||||| : || = ||| sein soll, begreift es nicht. Die Striche, Punkte oder Bilder von Gegenständen sind hier nur eine Versinnlichung der in diesen Beispielen vorkommenden Zahlen, nicht aber eine Versinnlichung der Operationen des Abziehens, Vervielfältigens und Teilens."[45])

In den letzten beiden Bemerkungen wird den Ausartungen in der Anwendung der Zahlbilder entgegengetreten. Wie aber steht es mit der Anwendung der Zahlbilder, wie wir sie bei Böhme, Hentschel, Kaselitz und Büttner kennen gelernt haben, und wie sie uns, mit nur unwesentlichen Abänderungen, bei fast allen neuern Anhängern der Zahlbilder entgegentritt? Das führt uns noch einmal auf die oben gestellte Frage zurück: Was leisten die Zahlbilder, um klare Zahlvorstellungen zu gewinnen, beziehentlich zu befestigen, und welche Unterstützung gewähren sie, um weiterhin in die Zahloperationen einzuführen.

Wir dürfen darauf jetzt unter Bezugnahme auf das über Zahlbilder Gesagte antworten: a) Die Verwendung der Zahlbilder ist eine eng begrenzte, sie beginnt, nachdem die Zahlvorstellungen unter Benutzung wirklicher Dinge oder eines Rechenapparats gewonnen worden sind, und sie hört auf, sobald das Kind imstande ist, mit den Ziffern die richtigen Zahlvorstellungen zu verbinden. b) Da die Gewinnung der Zahlvorstellungen der (richtigen) Verwendung der Zahlbilder vorher geht, so werden letztere thatsächlich zur Gewinnung von Zahlvorstellungen nicht benutzt. Das läßt aber zugleich darauf schließen, daß sie sich hierzu weniger als andere Anschauungsmittel eignen. c) Da die Verwendung der Zahlbilder aufhört, sobald das Kind mit den Ziffern die entsprechenden Zahlvorstellungen zu verbinden vermag, so wird thatsächlich erklärt, daß die Ziffern als Zahlzeichen den Zahlbildern im engeren Sinne vor-

44) Jänicke a. a. O. S. 170.
45) A. a. O. S. 171.

zuziehen sind. d) Die eigentliche Aufgabe der Zahlbilder kann somit nur die sein, einerseits die bereits gewonnenen Zahlvorstellungen zu befestigen, anderseits den nachfolgenden Gebrauch der Ziffern vorzubereiten. Ersteres geschieht, insofern sie die Reproduktion der Zahlvorstellungen anregen, letzteres, weil sie in feststehender Gruppierung (als ein Bild, wie die Ziffer) auftreten und zugleich auch die Einheiten erkennen lassen.

Hiernach unterliegt es zwar keinem Zweifel, daß die Zahlbilder, richtig angewandt, dem Rechnen gute Dienste leisten können. Aber ist damit bereits endgiltig über ihren Wert entschieden? Ist damit etwa gar gesagt, daß sie unentbehrlich sind? Jedenfalls nicht. Denn es ist nicht ausgeschlossen, daß es neben den Zahlbildern noch andere Hilfsmittel giebt, welche nicht nur dasselbe leisten, sondern es in mancher Beziehung noch besser leisten.

In der That hält es nicht schwer, solche Hilfsmittel ausfindig zu machen, wenn man sich erinnert, daß die Hauptaufgabe der Zahlbilder als gelöst gelten darf, sobald das Kind imstande ist, die Ziffern richtig (d. h. in Verbindung mit den zugehörigen Zahlvorstellungen) zu gebrauchen. Und das führt uns noch einmal auf den Tillichschen Rechenkasten zurück. Denn, um es kurz zu sagen: Im „Rechenbuche“ haben wir keinen Gebrauch von den Punkt-Zahlbildern gemacht, weil dieselben durch Tillichs Rechenkasten nicht nur ersetzt, sondern in mancher Beziehung übertroffen werden. Folgendes sind die Gründe für diese Behauptung.

Die Zahlbilder sollen Punktfiguren sein, deren Inhalt (Anzahl der Punkte) sich mit einem Blicke übersehen läßt. (Hentschel.) Das Kind soll aus der Gruppierung der Punkte, also ohne dieselben zu zählen, die dargestellte Zahl erkennen. (Kaselitz.) Es soll die Menge der Einheiten mit einem Blicke übersehen können. (Büttner.) Was heißt das aber anders, als anleiten wollen, jede Zahl als ein Ganzes, hervorgegangen aus der Vereinigung einer bestimmten Menge von Einheiten, aufzufassen? Und ist nicht gerade dieses mit Tillichs Rechenkasten in ganz vorzüglicher Weise zu erreichen, zielt die Einrichtung desselben nicht direkt darauf ab? Ganz gewiß! Die Kinder gelangen hier bald soweit, daß sie mit einem Blicke, ohne zu zählen, übersehen, welche Zahl die einzelne Würfelsäule darstellt. Dabei werden die Zahlvorstellungen aber nicht nur immer leichter und sicherer, sondern auch in reinster Form — als Ganze, in denen die Einheiten eine Reihe bilden — reproduziert. Das ist entschieden ein Vorzug gegenüber den Zahlbildern, bei denen — der Figur zuliebe — der Fortschritt von einer Zahl zur andern oft vollständig verwischt wird,[46]) ganz abgesehen davon, daß jede der Zahlen von vier an als ein in mehrere gleiche oder ungleiche Teile zerlegtes Ganzes erscheint.[47])

46) Man vergleiche z. B. die Folgen: fünf — sechs oder acht — neun bei Hentschel, Kaselitz und Büttner.

47) So z. B. $4 = 2 + 2$; $5 = 2 + 2 + 1$; $6 = 2 + 2 + 2$ oder $3 + 3$ u. s. w.

Das meint auch *Bartholomäi*, wenn er in einer seiner schneidigen Beurteilungen unter anderm sagt: „Der Verfasser beginnt mit den sogenannten Zahlbildern, welche die psychologische Zahlvorstellung erst gänzlich verderben und später das Dezimalsystem zwingen, den Karren wieder aus dem Sumpfe herauszuziehen. Die Schädlichkeit wird auf Seite . . . geradezu handgreiflich dargestellt. Denn hier steht die Aufgabe:

• •   • •
•   •
• •   • •

Zehn weniger eins ist wieviel? — schon sprachlich nicht gut. — Wer nun in der Zahlreihe, die freilich Herr L. nicht zu kennen scheint, von 10 um 1 zurückgeht, kann doch nur die *letzte* Eins in Abzug bringen, muß also das Bild

• • • •   • • • •
•   • , aber nicht •
• • •   • • • •

erhalten. Geht man nun noch um 1 zurück, so müße aus den beiden Formen beziehungsweise

• • • •   • • • •
•   • oder •
• •   • • •

entstehen, aber die Reihe wird sogleich verdorben, und das Bild erscheint als Acht

• • • •
• • • •

Wenn man ein solches Bild entstehen läßt, so muß es rückwärts in der umgekehrten Folge wieder aufgelöst werden, und die Entstehung muß auch mindestens nach *einem* Prinzip stattfinden.“ [48])

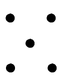
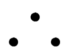
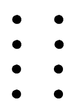
Aber die Würfel und Würfelsäulen des *Tillich*schen Rechenkastens sollen nicht nur angeschaut, sondern auch gezeichnet werden. Das geschieht auf einer Netztafel, um Sauberkeit und Regelmäßigkeit zu erzielen. Dadurch erhält man Bilder, welche zur Reproduktion der Zahlvorstellungen in noch viel höherem Maße als die Punktbilder anregen, einmal weil sie durch Selbstthätigkeit entstanden sind, dann, weil sie auf das körperliche Anschauungsmittel, also auf den Hauptvermittler der Zahlvorstellungen, direkt hinweisen. Werden diese Zeichnungen eine Zeit lang in planmäßiger Weise fortgesetzt, weiterhin aber die Ziffern daneben oder darunter geschrieben, so kann man mit Bestimmtheit darauf rechnen, daß der schließliche alleinige Gebrauch der Ziffern ein so wohl vorbereiteter ist, daß es der Heranziehung besonderer Zahlbilder nicht erst bedarf.

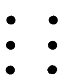
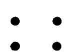
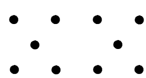
Alle Anhänger der Punktbilder betonen, daß die Zahlbilder fix und

48) Päd. Jahresbericht von 1874. S. 157.

fertig auf Wandtafeln vorhanden sein müssen, um keine Zeit beim Üben zu verlieren. Das scheint viel für sich zu haben, hindert uns aber nicht, das Bedenken auszusprechen, daß die Aufmerksamkeit der Kleinen, welche bekanntlich nicht besonders taktfest ist, durch die gleichzeitige Anwesenheit vieler Punktbilder sehr gestört werde. Will man dieses vermeiden, so kann man allerdings auch die Punktbilder isolieren; dann aber geht die Zeitersparnis wieder verloren und damit der einzige Vorzug, den sie dem Tillichschen Rechenkasten und den im Anschlusse an diesen vorgenommenen Übungen gegenüber in Anspruch nehmen konnten. Und so dürfen wir von den Punkbildern absehen, ohne daß wir auch nur eine ihrer guten Wirkungen auf das erste Rechnen preisgeben.

Wir fragten oben aber nach den Leistungen der Zahlbilder nicht allein mit Rücksicht auf die Zahlvorstellungen, sondern auch mit Beziehung auf die Zahloperationen. Hier genügen einige Bemerkungen, um ein Urteil zu gewinnen. Sind die Zahlvorstellungen wirklich klare, dann ist eigentlich jedes Anschauungsmittel überflüssig, und die Einführung der Zahloperationen wird einen befriedigenden Verlauf nehmen. Aber selbst wenn es nicht so wäre, könnte von einer wirksamen Verwendung der Zahlbilder keine Rede sein. Denn jedes Zahlbild ist ein starres Punktbild, während die Einführung in die Zahloperationen ganz entschieden bewegliche Elemente voraussetzt. Man kann die Punktbilder zwar auch nebeneinandersetzen; doch schon der einfachste Fall, wir meinen das Zuzählen, führt auf kleine Gewaltakte. Oder ist es ohne weiteres einleuchtend, wenn

 und  zu  werden, oder wenn

 und  in  übergehen sollen?

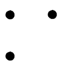
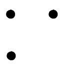
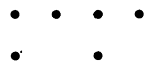
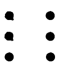
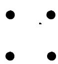
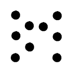
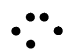
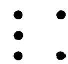
Gewiß nicht. Und noch viel mißlicher wird die Sache, wenn es an ein Abzählen, Malnehmen und Messen geht, wie oben an einigen Beispielen gezeigt worden ist.

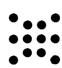
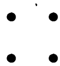
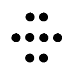
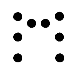
Mit diesen Bemerkungen könnten wir, wie in der ersten Auflage geschehen, den Gegenstand verlassen, wenn nicht inzwischen den „Zahlbildern" von einer Seite her eine erhöhte Bedeutung beigelegt worden wäre. Das führt uns noch einmal auf Beetz und seine „Rechentypen" für die Zahlen 1 bis 12 zurück.[49]) Diese „Rechentypen" erscheinen zwar auch nur als Punktgruppen, wie alle vorerwähnten „Zahlbilder", aber Beetz nimmt zweierlei für sie in Anspruch. Erstens behauptet er, daß jede vorhergehende Gruppe in der nächstfolgenden unverändert wiederkehre, der Typus für die 12 also alle Typen für 1 bis 12 in ursprünglicher Gestalt enthalte, und zweitens erwartet

49) Vergl. S. 113. Dort findet man auch die zugehörigen Abbildungen.

er mit Bestimmtheit, daß durch dieselben die simultane (gleichzeitige, augenblickliche) Auffassung der Einheiten jeder der Zahlen von 2 bis 12 möglich werde. Das Ausführliche enthält „das Typenrechnen", in kürzerer Form verbreiten sich auch zwei vornerwähnte Gelegenheitsschriften über den Gegenstand.[50]) Uns kommt es hier nur darauf an, zu erfahren, ob die neuen Punktbilder leisten, was ihr Erfinder ihnen zuschreibt.

Daß der Fortschritt von einem Bilde zum nächstfolgenden bei Beetz ein lückenloser ist, erkennt man sofort. Denn entfernt man den zuletzt hinzugefügten Punkt bei irgend einem Bilde wieder, so erhält man das vorhergehende Bild in unveränderter Gestalt. Das ist, wie oben gezeigt wurde, bei Büttner, Hentschel, Kaselitz u. a.[51]) nicht immer der Fall, und insofern besitzen die Bilder von Beetz allerdings einen beachtenswerten Vorzug. Auch kann man in der Zwölfergruppe jede vorhergehende Gruppe unverändert wiederfinden, was anderwärts auch nicht immer möglich ist. Das ist schließlich aber auch alles. Denn geht man einen Schritt weiter und fordert einerseits die Erhaltung der ursprünglichen Form der Punktgruppen bei beliebigen Schritten vor- oder rückwärts und anderseits die unveränderte Ergänzungsgruppe innerhalb der Zwölfergruppe, so versagen auch die Beetz-Gruppen. Zwei Beispiele mögen das veranschaulichen.

Fügt man  zu , so erhält man  und nicht ; nimmt man  von  weg, so bleibt  und nicht  übrig u. dgl. m.

In  ist wohl  unverändert enthalten, für die Ergänzungszahl bleibt aber  und nicht  übrig u. dgl. m.

Sonach ist auch die Leistungsfähigkeit der Punktgruppen von Beetz eine beschränkte, also eine von derjenigen älterer Gruppen nur dem Grade und nicht dem Wesen nach verschiedene. Und das kann schließlich auch nicht anders sein. Denn nicht Punktgruppen, sondern Punktreihen sind die vollkommensten Abbilder der Zahlen, wirkliche Urbilder oder Typen derselben. Die fortlaufende Punktreihe allein besitzt eine unbeschränkte Leistungsfähigkeit. Mag es sich bei ihr um Verschmelzungen oder Absonderungen handeln, der Typus der beteiligten Zahlen bleibt erhalten. Daß seine Typen dieses nicht leisten, hat Beetz übrigens auch wohl selbst erkannt, denn in richtiger Würdigung der Sachlage nennt er dieselben nicht Zahl-, sondern Rechentypen.

---

50) „Kritische Beiträge" 2c. und „Der vereinfachte Rechenunterricht". Vergl. S. 100.
51) Vergl. S. 336.

Weit wichtiger als die erste ist die zweite Leistung, welche Beetz für seine Punktgruppen in Anspruch nimmt: Die Vermittelung der wahren Grundlage des Rechnens, nämlich der simultanen Auffassung der Zahlen 2 bis 12. Beetz geht dabei von der Thatsache aus, daß die allgemeinen Begriffe wegen der „Enge des Bewußtseins“ (Herbart) stets in besondern Individuen gedacht werden. „Nun besteht ja aber gerade das Wesen der Zahl in der größern oder geringern Mehrzahl. Dieser logische Teil läßt sich nicht vom Ganzen, den Dingen, trennen, da er nur an und mit den Einzelheiten wahrgenommen werden kann. Soll also der Geist die Zahl klar erkennen, so muß er gleichzeitig (simultan) alle gezählten Dinge irgend eines Zahlindividuums mit im Bewußtsein haben.“ 52) Das scheint nun zwar der „Enge des Bewußtseins“ zu widersprechen; doch nur solange, als vorausgesetzt wird, der Geist vermöge gleichzeitig nur eine einzige Vorstellung zu fassen. Diese Einschränkung aber hat Herbart selbst nicht mit der Enge des Bewußtseins verbunden. „Vielmehr sind wir imstande, die Aufmerksamkeit gleichzeitig auf mehrere bestimmte Individuen zu richten, um an diesen nach obiger Weise die entsprechende Zahl wahrzunehmen. Alle Gegner, besonders die äußersten Anti-Herbartianer, erinnern wir z. B. an den Vorgang des Schlusses. Offenbar müssen hierbei die Vordersätze im Schlußsatze mitgedacht werden, d. h. dem Geiste müssen gleichzeitig wenigstens drei Vorstellungen gegenwärtig sein.“ 53) Daß aber der Geist diese Fähigkeit wirklich besitzt, läßt sich, nach Beetz, sogar durch ein Experiment beweisen. „Etliche Gegenstände, wie Stäbchen, Kugeln rc. werden in der Finsterkammer (camera obscura) nicht allein ihrer Zahl, sondern auch ihren Raumverhältnissen nach erkannt, wenn dieselbe durch einen elektrischen Funken momentan erleuchtet wird. Ja, man ist sogar fähig, mehrere überspringende elektrische Funken ihrer Zahl und ihrem Raumverhältnis nach zu erfassen. Daß bei diesen Versuchen auch nur irgend welche Zeit zum Zählen übrig bliebe, wird wohl selbst . . . nicht behaupten wollen und somit die gleichzeitige Auffassung irgend welcher Mengen zugestehen müssen.“ 54) Es ist klar: Beetz ist von der Richtigkeit seiner Beweisführung völlig überzeugt. Denn der Ausdruck „irgend welcher Mengen“ besagt soviel als „beliebiger Mengen“. Wie aber steht es um unsere Zustimmung?

Schon bei seinem Experimente verschweigt Beetz eins: die Fortdauer des Lichteindrucks auf der Netzhaut, die um so größer ist, je stärker der Lichtreiz war. Und dann fährt er zur größten Überraschung des Lesers fort: „Richtig ist dagegen, daß diese Mengen sehr beschränkt sind, und daß auch das geübteste Anschauungsvermögen nicht mehr als etwa fünf Einzeldinge ihrer Zahl nach dem Bewußtsein unmittelbar und auf einmal vermitteln kann.“ Und gleich darauf fügt er noch hinzu: „Wer nicht durch be-

---

52) Beetz, Typenrechnen. S. 24.
53) Ebenda S. 24.
54) Ebenda S. 25.

sondere Veranstaltungen die unmittelbare Zahlauffassung geübt hat, der wird selbst die Fünf erst nach Zusammensetzung ihrer Teile (3 + 2, 2 + 2 + 1, 4 + 1 ꝛc.) erkennen. Sie wird für ihn zunächst eine abgeleitete Vorstellung sein."

Das kann nicht mißverstanden werden. Beetz behauptet hier: Die simultane Auffassung erstreckt sich im günstigsten Falle auf fünf Einzeldinge, und diese höchste Leistung wird nur durch „besondere Veranstaltungen" erreicht. Ohne letztere bewendet es bei 4, 3, 2 Einzeldingen. In Summa: Nur simultanes Auffassen von 2 Einzeldingen und die Möglichkeit, durch Zusammensetzen zur simultanen Auffassung von mehr als 2 Einzeldingen zu gelangen, können vorausgesetzt werden.

So hebt denn Beetz thatsächlich wieder auf, was er vorher (scheinbar) bewiesen hatte. Und selbst dabei läßt er es nicht bewenden. Denn unmittelbar darauf fährt er fort: „Da diese Thätigkeit (das Zusammensetzen) nun offenbar schon eigentliches Rechnen ist, so darf sie bei Kindern, die dieses erst lernen sollen, nicht als vorhanden voraus gesetzt werden." Das ist nun zwar eine sehr richtige Bemerkung; hier aber will sie doch nichts anderes besagen als: Wer zur simultanen Auffassung von mehr als zwei Einzeldingen gelangen soll, der muß — rechnen können! Und so stellen sich schließlich Anfang und Ende bei Beetz so zueinander: Die Zahlvorstellungen werden durch simultane Zahlauffassungen vermittelt; zu simultanen Zahlauffassungen gelangt man durch Rechnen; folglich ist (da das Rechnen wieder Zahlvorstellungen voraussetzt) — das Rechnen die Grundlage des Rechnens.

Das dürfte genügen, um auch die zweite Leistung der Beetzschen Punktgruppen in ihrem wahren Werte erscheinen zu lassen. Denn mag Beetz sich weiterhin auch noch so geschickt in dialektischen Wendungen ergehen, mag er die Drei zu gewinnen suchen, die „gegebenenfalls ein bekanntes Maß für unbekannte Mengen abgiebt", über die von uns aufgedeckte Klippe kommt er doch nicht hinweg. Und das alles schließlich aus einem einzigen Grunde: weil er nicht zugeben will, daß die bestimmten Zahlen durch Zählen erworben werden![55] Denn setzte er im zweiten Vordersatze an Stelle des Rechnens das Zählen, so ließe sich das Ganze wohl hören. Dann käme nämlich: Die Zahlvorstellungen werden durch simultane Zahlauffassungen vermittelt; zu simultanen Zahlauffassungen gelangt man durch Zählen; folglich bildet das Zählen die Grundlage des Rechnens.

Doch wir wollen nichts übersehen, und deshalb noch dieses. Nicht die simultane Zahlauffassung überhaupt, sondern die ursprüngliche simultane Zahlauffassung ist es, worauf Beetz sein „Typenrechnen" gründet. Wir aber haben hier lediglich die durch Zählen erworbene (also nicht ursprüngliche) simultane Zahlauffassung im Sinne gehabt. Könnte es da nicht scheinen, als ob wir den Kernpunkt des Beetzschen Typen-

---

55) Vergl. S. 114. 243 f.

rechnens absichtlich umgangen oder übersehen hätten? Allerdings, aber doch nur so lange, als man annähme, wir seien von dem Dasein ursprünglicher simultaner Zahlauffassungen überzeugt. Das aber sind wir nicht. Denn: „Selbst nicht den einfachsten Fall, die ursprüngliche simultane Auffassung von zwei Punkten, lassen wir gelten. Denn die Einsicht: Das sind zwei Punkte! setzt erstmalig die Auffassung jedes der beiden Punkte als eines Dinges für sich (Einzeldinges), die Erinnerung an den ersten Punkt nach dem Übergange zum zweiten und die Zusammenfassung beider Punkte zu einem Ganzen, also das Zählen voraus. Nun kann zwar durch öftere Wiederholung, also durch Übung, dieser Vorgang nach und nach so abgekürzt werden, daß zuletzt eine Art simultaner Auffassung (erworbener simultaner Auffassung!) eintritt; aber das geschieht doch nur dadurch, daß sich die Form der Punktgruppe dem Gedächtnisse einprägt. Also ursprüngliche simultane Auffassung ist das nicht. Und wie bei zwei Punkten, so ist es bei 3, 4 . . . Punkten erst recht der Fall. Durch Zählen (in unserm Sinne) wird die Punktzahl zuerst erfaßt, durch öftere Wiederholung die Form der Punktgruppe eingeprägt und durch die Form die zugehörige Zahl ins Bewußtsein gerufen. Die Punktgruppen sind also Zahlzeichen, welche das Nachzählen jederzeit ermöglichen, ein Mittelding zwischen der Darstellung der Zahlen an der Rechenmaschine und durch Ziffern.“ 56)

Derselben Ansicht ist auch Räther. „Wie der Erwachsene nicht ohne weiteres, nicht das erste Mal, das Zahlbild größerer Mengen (5 und mehr) erkennen kann, so kann das Kind auch nicht ursprünglich eine Reihe von 2, 3, 4 Punkten oder andern Gegenständen erfassen. Wir haben gezeigt, daß es drei Thätigkeiten zu vollziehen hat: 1) es muß die Dinge einzeln bemerken, 2) es muß sie vergleichen und (wenigstens in gewisser Hinsicht) als gleich finden, 3) es muß sie zusammenfassen. Das kann nur successive, nach einander, geschehen. Erst durch vielfach wiederholte Wahrnehmung prägt sich die Form der Gruppe dem Gedächtnisse ein, und die Form ruft dann augenblicklich die entsprechende Zahlvorstellung ins Bewußtsein. Immer also muß ursprünglich dem Urteile: Das sind zwei Dinge! die Wahrnehmung vorangehen: Das ist ein Ding und noch einmal dasselbe Ding. Die Dinge müssen in Einern zusammengezählt werden. Nur bei Personen, die Zahlvorstellungen schon haben, nicht aber bei denen, wo sie erst im Werden sind, kann man von einer augenblicklichen Auffassung bestimmter Vielheiten sprechen. Keine Zahl wird ursprünglich durch simultane Auffassung erzeugt (die Eins nicht als eigentliche Zahl betrachtet); sie entstehen alle ursprünglich durch Zusammenzählen.“ 57)

---

56) Vergl. Hartmann, Zur Diskussion über den elementaren Rechenunterricht a. a. O. S. 140.

57) Räther a. a. O. S. 23.

3. Anschauungsmittel für Sachgebiete.

Der Rechenunterricht hat eine Reihe von Sachgebieten von seinem Standpunkte aus zu bearbeiten. Um dieses mit Erfolg zu können, bedarf es gewisser grundlegender Anschauungen, welche die bisher besprochenen Anschauungs- und Lehrmittel nicht zu geben vermögen. Die in Betracht kommenden Sachgebiete aber sind: a) Das Geld. b) Die Längen-, Flächen- und Körpermaße. c) Die Gewichte. d) Die Zeit.

Was das Geld betrifft, so dienen selbstverständlich die einzelnen Geldstücke (Münzen) als Anschauungsmittel. Nicht unzweckmäßig dürfte es sein, auch einige der gangbarsten ausländischen Münzen als Anschauungsmittel zu besitzen. So z. B. in sächsischen und bayrischen Schulen österreichische Münzen 2c. Sollen die Münzen vorgezeigt werden, so steckt man sie in die Spalte einer Holzleiste. Auch das Papiergeld, sowie die Postwertzeichen und Stempelmarken sind zu den hierher gehörigen Anschauungsmitteln zu zählen.

Von den Längenmaßen muß ein in Centimeter geteilter Meterstab vorhanden sein. Es empfiehlt sich aber, die Länge des Meters auch an der Wandtafel bezeichnen zu lassen und zwar einmal in der Richtung von links nach rechts und einmal in der Richtung von oben nach unten. Außerdem ist es praktisch, an der Wand — im Klassenzimmer oder auf dem Korridore — zwei Meterlängen von unten nach oben mittels schwarzer Ölfarbe anzeichnen zu lassen. Dabei wird das untere Meter zweckmäßig in 10 cm-Strecken zerlegt, das obere in 1 cm-Strecken. Man benutzt dieses Maß zugleich, um die Kinder von Zeit zu Zeit zu messen, damit ihnen ihrer Größe entsprechende Sitzplätze angewiesen werden können. Die Millimeterteilung haben die Kinder selbst auf kleinen Linealen. Um größere Längenmaße zur Anschauung zu bringen, steckt man dieselben im Freien ab. Die Kilometersteine der Poststraßen bieten sich als willkommene Begrenzung des Kilometers an.

Von den Flächenmaßen gehört das Quadratmeter in jedes Schulzimmer. Dasselbe ist entweder gleich an die Wand zu zeichnen, oder noch besser durch eine besondere Wandtafel, die 1 m lang und 1 m breit ist, zu veranschaulichen. Die Einteilung des Quadratmeters in Quadratdezimeter ist zwar nicht unbedingt nötig, da wir nach Quadratdezimeter nicht rechnen, indessen leistet sie doch gute Dienste, wenn die Berechnung einer Fläche veranschaulicht werden soll. Auf dem Spielplatze ist das Ar, also ein Quadrat mit der Seite 10 m, abzumessen und zu markieren, auf einem nahen Felde oder dem städtischen Marktplatze kann ein Hektar abgesteckt werden. Vielleicht sind auch für das Quadratkilometer in der Umgebung des Schulortes passende Punkte zu gewinnen.

Von den Körpermaßen sollten insbesondere die Hohlmaße, nämlich das Hektoliter mit den gebräuchlichen Teilgrößen, ein Kubikdezimeter (in Würfelform) und das Liter (in Walzenform) vorhanden sein. Auch eine Vorrichtung (Gestell) zur Veranschaulichuug des **Kubikmeters** muß als recht wünschenswert bezeichnet werden.

Von den **Gewichten** sind als Anschauungsstücke mindestens nötig: 1 g, 100 g, 250 g, $\frac{1}{2}$ kg, 1 kg und 5 kg. Dazu eine zweiarmige (gleicharmige) Wage. Ein sehr beachtenswertes Hilfsmittel, Gewichte zu veranschaulichen, bieten übrigens unsere Münzen. Es wiegen genau: 1 Einpfenniger 2 g, 3 Zweipfenniger 10 g, 2 Fünfpfenniger 5 g, 1 Zehnpfenniger 4 g, 9 Zwanzigpfenniger (Silber) 10 g, 9 Fünfzigpfenniger 25 g, 9 Markstücke 50 g, 9 Zweimarkstücke 100 g, 9 Fünfmarkstücke (Silber) 250 g, 1 Fünfmarkstück (Gold) 2 g, 1 Zehnmarkstück 4 g, 1 Zwanzigmarkstück 8 g.

Zur Veranschaulichung der **Zeitgrößen** dient ein großes Zifferblatt, das man sich leicht selbst herstellen kann. Die Zeiger desselben müssen aber beweglich sein.

Für die bei den übrigen, hier nicht besonders erwähnten Sachgebieten erforderlichen Anschauungen hat der zugehörige Sachunterricht zu sorgen. Wer sich mit Abbildungen der vorgenannten Anschauungsmittel begnügen will, dem empfehlen wir **Bopps** Wandtafeln und **Henzes** Münztafeln. Wer aber alles in natura wünscht, wende sich an eine größere Lehrmittelhandlung, z. B. das **Fröbelhaus** (A. **Müller**) in Dresden, **Oskar Schneider** in Leipzig u. a. m.

Überblicken wir jetzt noch einmal das ganze Gebiet der Veranschaulichungsmittel, so drängt sich **eine** Wahrnehmung vor allen andern auf: die große Anzahl und Mannigfaltigkeit derselben. Und jedes Jahr bringt noch neuen Zuwachs! Soll man sich dessen freuen? Ja und nein! Ja, denn man ersieht daraus, daß lebhaftes Interesse nicht allein für unsern Gegenstand, sondern auch für die lernende Kinderwelt reichlich vorhanden ist. Nein, denn es liegt die Gefahr vor, zu schädlichen Versuchen zu verleiten und das Mittel zum Zwecke zu machen. Darunter leidet aber nicht allein der Rechenunterricht, sondern es leiden darunter auch die Kinder und der Lehrer. Darum: Nicht zuviel des Guten! Die wirklich wertvollen Veranschaulichungsmittel haben wir oben kennen gelernt. Jedes derselben hat seine besondern Vorzüge. Ein Veranschaulichungsmittel aber, das man seit Jahren mit nachweisbarem Erfolge benutzte und in dessen Handhabung man größere Fertigkeit erlangte, das sollte man niemals ohne Not aufgeben! Und niemand sollte außerdem vergessen, daß auch das beste Veranschaulichungsmittel kein „Nürnberger Trichter" ist, sondern nur ein Hilfsmittel, dem der Lehrer erst den Geist einhauchen muß, wenn es auf den Geist der Kinder Einfluß erlangen soll.

Das ist schließlich auch der Standpunkt des Herausgebers des „**Lehrplans für die einfachen Volksschulen des Königreichs Sachsen**", wenn er in einer seiner Erläuterungen bemerkt: „Obgleich kein Mangel an Veranschaulichungsmitteln besteht, liefert doch jedes Jahr eine Anzahl neuer, und es gewinnt hiernach den Anschein, als werde die Bedeutung derselben für den Rechenunterricht denn doch einigermaßen überschätzt. Gewiß bedarf man ihrer, aber die Schüler müssen von frühe auf gewöhnt werden, auch ohne sie auszukommen. — ‚Die Unsicherheit im Rechnen erklärt sich zum Teil daraus, daß beim Unterrichte veranschaulichende Hilfsmittel mehr als durchaus nötig benutzt werden.‘ —“ [58])

§. 23.

Die Übungsmittel.

Litteratur. Allgemeine Bestimmungen des Königlich Preußischen Ministers rc. vom 15. Oktober 1872. Braune, A. Der Rechenunterricht in der Volksschule. Bussmann, Anleitung. Büttner, A. Anleitung. Jänicke, E. Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts. Kockel, F. W. Lehrplan. Meier, E. Lehrplan für den Unterricht im Rechnen. Frankenberg i. S. 1886. Pädagogische Warte. Wochenschrift. 1. Jahrg. Leipzig 1892. Räther, H. Theorie und Praxis. Rein rc. Die Schuljahre. Splittegarb, E. Eine Kritik der Übungsbücher rc. Sterner, M. Programm zu dem Rechenbuche für Landschulen. München 1892. Steuer, W. Methodik des Rechenunterrichts. Tschirch, P. Der Rechenunterricht in der Volksschule. — Die fehlenden Angaben siehe oben § 16. — Hierüber: Die in § 16 aufgeführte Rechenlitteratur, insbesondere die Aufgabensammlungen.

Eine besondere Abteilung der Lehrmittel für den Volksschul-Rechenunterricht bilden die Übungsmittel. Ihr Zweck ist nicht, Zahlvorstellungen zu vermitteln oder Rechenoperationen zum Verständnisse zu bringen, sondern bereits Erworbenes durch Übung zu befestigen und geläufig zu machen. Für den Lehrer bedeuten dieselben zugleich eine beachtenswerte Erleichterung: sie helfen ihm Worte und Zeit sparen und die Klasse zusammenhalten.

Auch unter den Übungsmitteln herrscht eine große Mannigfaltigkeit, und jedes Jahr vermehrt dieselbe noch. Doch lassen sie sich in folgenden vier Gruppen unterbringen: a) Wandrechentafeln (auch Wandfibeln genannt); b) Zifferstäbe; c) Ziffertafeln; d) Aufgabenhefte. Die wichtigste Gruppe ist die an letzter Stelle aufgeführte. Es wird sich deshalb hier auch hauptsächlich um diese handeln.

Wandrechentafeln giebt es in großer Zahl, ältere und neuere. Dieselben führen Aufgabenreihen vor, ausgeführte oder nur angedeutete, die von allen Kindern der Klasse gleichzeitig gesehen, gemeinsam aufgefaßt und mündlich oder schriftlich gelöst werden sollen. Die meisten derselben halten sich innerhalb der Reihe 1 bis 100. Herausgeber solcher Tafeln sind z. B. Böhme, Büttner, Fix, Kaselitz, Löser, Magnus, Menzel-Steinert, Scherer u. a.

Die Einführung der Zifferstäbe rührt nachweislich von Goltzsch her.[1]) Es sind damit schmale Holzleisten gemeint, welche in bunter Mischung untereinandergedruckte, genügendgroße Ziffern aufweisen. In-

58) Kockel a. a. O. S. 72.

1) Goltzsch, Zifferstäbe und Ziffertafeln zu Rechenübungen in den Elementarschulen. 3. Aufl. Berlin 1859.

dem die Stäbe auf verschiedene Weise nebeneinander gehalten oder gehängt werden, erhält man durch die immer neue Gruppen bildenden Ziffern ein reiches Übungsmaterial. Ähnlich ist es bei der Ziffertafel, welche als ein System untereinander festverbundener Zifferstäbe gelten kann. Wir haben im „Rechenbuche“ mehrere solcher Ziffertafeln, dort Rechentafeln genannt, eingeschaltet und die Übungen bezeichnet, welche im Anschlusse daran vorzunehmen sind.[2]) Es sind das zumeist Tafeln für besondere Fälle. Vollständige Ziffertafeln werden gewöhnlich in hundert Quadrate, je zehn in einer Reihe, eingeteilt. In den Quadraten stehen die Zahlen von 1 bis 100 in bunter Mischung. Eine solche Tafel enthält z. B. Heft 1, Stufe 2 unseres Rechenbuches in der elften Einheit (Zahlreihe 1 bis 100). Wir lassen dieselbe hier mit einigen Angaben über ihre Verwendung als Beispiel folgen.

9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
20	18	16	14	12	19	17	15	13	11
27	25	23	21	30	28	26	24	22	29
38	36	34	32	39	37	35	33	31	40
45	43	41	50	48	46	44	42	49	47
56	54	52	59	57	55	53	51	60	58
63	61	70	68	66	64	62	69	67	65
74	72	79	77	75	73	71	80	78	76
81	90	88	86	84	82	89	87	85	83
92	99	97	95	93	91	100	98	96	94

Anwendungen: A. Zuzählen. a) Zu jeder ersten Reihenzahl einer wagrechten Reihe jede folgende (je 9 Aufgaben in einer wagrechten

2) Vergl. Rechenbuch, 1. bis 5. Heft (Ausg. A).

Reihe). Beispiele: 9 + 7, 9 + 5 . . .; 20 + 18, 20 + 16 . . . . b) Zu jeder zweiten Reihenzahl einer wagrechten Reihe jede folgende (je 8 Aufgaben in einer wagrechten Reihe). Beispiele: 7 + 5, 7 + 3, 7 + 1 . . . ., 18 + 16, 18 + 14, 18 + 12 . . . . u. dgl. m. c) Drei aufeinander folgende Zahlen einer wagrechten Reihe (je 8 Aufgaben in jeder Reihe). Beispiele: 9 + 7 + 5, 7 + 5 + 3, 5 + 3 + 1 . . . u. dgl. m. B. Abzählen. a) Jede Zahl der ersten wagrechten Reihe von jeder der nachfolgenden Zahlen einer senkrechten Reihe (je 9 Aufgaben). Beispiele: 20 — 9, 38 — 9 . . .; 18 — 7, 25 — 7, 36 — 7 . . .; 16 — 5, 23 — 5, 34 — 5 . . . b) Jede Zahl der zweiten wagrechten Reihe von jeder der nachfolgenden Zahlen einer senkrechten Reihe (je 8 Aufgaben). Beispiele: 27 — 20, 38 — 20, 45 — 20 . . .; 25 — 18, 36 — 18, 43 — 18 . . .; 23 — 16, 34 — 16, 41 — 16 . . . . c) Dasselbe mit jeder Zahl der dritten, vierten 2c. wagrechten Reihe u. dgl. m. C. Zu- und Abzählen. a) Zu einer Zahl der dritten wagrechten Reihe wird die entsprechende Zahl der zweiten gezählt und die der ersten abgezählt. Beispiele: 27 + 20 — 9, 25 + 18 — 7, 23 + 16 — 5 . . . b) Dasselbe mit der vierten, dritten und zweiten Reihe. Beispiele: 38 + 27 — 20, 36 + 25 — 18, 34 + 23 — 16 . . . c) Dasselbe mit je drei andern Reihen u. dgl. m.

Auf der dritten Stufe, Heft 2 des Rechenbuches, lassen sich Teile dieser Rechentafel zu zahlreichen Multiplikations- und Divisionsaufgaben verwenden. Bei der Zweierreihe z. B. 2 . 9, 2 . 3, 2 . 5 2c. 2 . 20, 2 . 18, 2 . 16 2c. 2c. bis höchstens 2 . 50; sodann unter Auswahl der geraden Zahlen: 10 = 2 . 5, 8 = 2 . 4 2c. 20 = 2 . 10, 18 = 2 . 9 2c. 2c. 10 : 2 = 5, 8 : 2 = 4 2c. 20 : 2 = 10, 18 : 2 = 9 2c. 2c. auch 10 = 5 . 2, 8 = 4 . 2 2c. 20 = 10 . 2, 18 = 9 . 2 2c. 2c. Dazu jenachdem auch zusammengesetzte Aufgaben, wie z. B. 2 . 9 + 7, 2 . 7 + 5 2c. 2 . 20 — 18, 2 . 18 — 16 2c. auch 2 . 9 + 2 . 7, 2 . 7 + 2 . 5 2c. 2 . 20 — 2 . 9, 2 . 18 — 2 . 7 2c. 2c.

Man sieht, daß eine solche Ziffertafel zu einer unerschöpflichen Fundgrube wird, sobald man dieselbe nach Maßgabe der vier Grundrechnungsarten und unter Anwendung einfacher Kombinationen durcharbeitet. Doch empfiehlt es sich, solche Ziffertafeln selbst zu entwerfen, um den Bedürfnissen einer Rechenklasse, die nicht immer dieselben sind, möglichst vollkommen zu entsprechen.

Ziffertafeln der ebenerwähnten Art kann man als feste bezeichnen im Gegensatze zu den schiebbaren, deren bekannteste von Dürre herrührt.[3]) Dieselbe zeigt folgende Zusammensetzung:

---

3) Dürre, Die schiebbare Ziffertafel, ein bewährtes Lehrmittel beim Unterrichte im Rechnen für jeden Lehrgang und jede Schülerzahl. Darmstadt 1863.

2	4	6	8	3	5	7	9
3	5	7	9	2	4	6	8
4	6	8	2	5	7	9	3
5	7	9	3	4	6	8	2
6	8	2	4	7	9	3	5
7	9	3	5	6	8	2	4
8	2	4	6	9	3	5	7
9	3	5	7	8	2	4	6
1	1	1	1	0	0	0	0

Das darauf eingehaltene Verteilungsprinzip tritt klar hervor. Indem nun die wagerechten Zifferreihen auf schmale Leisten, die in Falzen laufen, übertragen werden, lassen sich dieselben nach rechts und links verschieben. Dadurch wird die Zahl der Kombinationen eine außerordentlich große. In seiner Anleitung zum Gebrauche der Tafel sagt der Erfinder: „Der Gebrauch der Tafel soll 1) zeitraubende Kreideschmiererei an der oft durch Glanzlicht blendenden, bei einiger Feuchtigkeit den Kreidestrich unbestimmt wiedergebenden Wandtafel möglichst vermindern; 2) durch leichtes Verschieben die Reihen der Aufgaben schleunigst verändern; 3) dem Lehrer einen großen Teil seines jetzt geistlähmenden und lungenerregenden Abfragens ersparen; 4) die Gewöhnung der Kinder an stille Geistesthätigkeit ohne Schreiben fördern; 5) durch die gewonnene Energie Zeit gewinnen und damit sehr bewußte, die Schüler und Lehrer erfreuende Erfolge erzielen helfen. Nebenher mögen die gedruckten Ziffern als Musterbilder und Vorlagen beim Schreiben dienen." Eine veränderliche Ziffertafel ist auch Eigemanns „Rechenuhr". Praktische Schulmänner spenden ihr das Lob einer Lungenschonerin des Lehrers, einer Zwangsjacke zur Aufmerksamkeit des Schülers und eines ständigen Wiederholungsmittels für alle Rechenstufen. Sie besteht aus einem Zifferblatte mit genügend großen Ziffern, um von der ganzen Klasse gesehen zu werden, und zwei Zeigern. Durch einfaches Fortrücken der Zeiger werden zahllose Aufgaben gebildet.

Für den Schul- und Hausgebrauch berechnet ist das „Zahlenspiel für Kinder vom fünften bis neunten Lebensjahre", herausgegeben von Otto Kölbel, Lehrer in Zschopau (Sachsen). Dieses recht geschmackvoll ausgestattete Hilfsmittel besteht aus einer zusammenlegbaren Papptafel mit Futteral. Auf der linken Innenseite der Papptafel befinden sich in 100 Quadraten mit Druckziffern die Zahlen bis 100 in natürlicher Folge, auf der rechten Innenseite in ebenfalls 100 Quadraten mit Schreibziffern die Vielfachen der 1, 2, 3 . . . 10 bis zum je 10fachen. Dazu gehören 100 quadratische Pappscheibchen (Plättchen), welche auf der einen Seite mit Druckziffern, auf der andern mit Schreibziffern versehen sind. Der Herausgeber will, daß sein Lehrmittel die Erlernung des Zählens und Rechnens in der Zahlreihe 1 bis 100 fördere und giebt dazu folgende Anweisung: „Zuerst erlernen die Kinder durch Auflegen (oder Wegnehmen) der Plättchen mit den gedruckten Nummern auf die Platte (linke Innenseite) mit den gedruckten Nummern das Zählen (Zahlenlesen von 1 bis 100), Zuzählen und Abzählen; dann erlernen sie durch Umdrehen und Umlegen der Plättchen auf die andere Platte (rechte Innenseite) das kleine Einmaleins. Zum Zwecke des Schreibens desselben ist dieses mit geschriebenen Ziffern gegeben.“ Dieses Hilfsmittel darf nicht mit den Kinderbüchern verwechselt werden, welche durch allerlei buntes Beiwerk das erste Rechnen erleichtern wollen, in Wahrheit aber wenig oder keinen pädagogischen Wert besitzen.

Weit wichtiger als die Zifferstäbe und Ziffertafeln sind für die Erfolge unseres Schulrechnens, wie bereits bemerkt, die Aufgabenhefte in der Hand der Schüler. Das wird auch allgemein anerkannt, und ihr Auftreten in so großer Zahl, welche sich von Jahr zu Jahr noch steigert, ist jedenfalls ein deutlicher Beweis dafür. Allerdings stimmen die Anforderungen, welche von verschiedenen Seiten früher bereits und neuerdings wieder an die Aufgabenhefte gestellt worden sind, nicht immer überein. Noch größer aber sind die Abweichungen, welche die Aufgabenhefte selbst zeigen.

Hören wir zunächst die Aussprüche der beiden vorzüglichen Rechenmethodiker Diesterweg und Bartholomäi. In seinem „Wegweiser“ schreibt Diesterweg: „Bücher, welche eine sachliche Auseinandersetzung der Zahlenlehre enthalten, gehören nicht in die Hand des Elementarschülers; er würde sie, wären sie auch noch so faßlich geschrieben, nicht verstehen, sich nicht aus ihnen belehren können. Der lebendige Mund des Lehrers muß ihm die Einsicht bringen, oder vielmehr zur Entwickelung und Ergreifung der Wahrheit in der Zahl veranlassen. Aber der Stoff der Übungen, d. h. Aufgaben mancherlei Art, in guter Anordnung, gehören in ein für den Schüler bestimmtes Rechenbuch. Allerdings wird der gewandte Lehrer gleich zu jeder Lehre die nötigen Aufgaben zu erfinden imstande sein; aber der Schüler soll auch still für sich, in der Schule und zu Hause, Aufgaben verschiedener Art auflösen, um durch viele Übungen eine genügende Fertigkeit im Rechnen sich anzueignen. Dieses gilt vorzüglich von dem schriftlichen Rechnen. Die Rechenstunden liefern ihm die Einsicht in die Sache, die Anwendung derselben, mündlich und schriftlich; die ausgedehntere Fertigkeit aber erlangt er durch anhaltenden Privatfleiß. Die Zeit ist zu kostbar, um die Aufgaben zu diktieren. Darum bringt es dem Rechnen einen ungemeinen Vorteil, wenn man ein passendes Aufgabenbuch einführt. Dasselbe soll aber nichts enthalten als eine reine, reiche Sammlung zweckmäßiger Aufgaben, deren Resultate sich nur in der Hand des Lehrers befinden.“ 4) Und ebendaselbst heißt es mit

4) Diesterweg a. a. O. S. 172.

Beziehung auf gute Aufgabenhefte: „Der eigentliche Wert eines solchen Übungsbuches ist demselben ebensowenig äußerlich anzusehen, als die Mühe, die es seinem Verfasser gemacht hat. Nur der Gebrauch desselben führt zur Überzeugung seines Wertes, seiner ermunternden Reichhaltigkeit und Mannigfaltigkeit, oder seiner ermüdenden Einförmigkeit und abstumpfenden Kraft. Denn darin besteht bei der Ausführung eines solchen Buches die Kunst, die Aufgaben so auszuwählen, daß sie den Geist des Schülers stets in Anspruch nehmen und ihn in der mannigfachsten Art wecken und beleben. Nur die Bücher, die solches vermögen, werden von geistig geweckten Schülern geliebt. Wie die Aufgaben verfaßt, ausgewählt und geordnet werden, ist daher mit nichten gleichgiltig. Denn es kommt nicht darauf an, daß die Schüler arbeiten, sondern darauf, daß es auf eine zweckmäßige, belebende, die Selbständigkeit weckende und stärkende Art geschehe. Ein diesen Anforderungen entsprechendes Aufgabenbuch zum Rechnen ist daher mit nichten eine leichte Sache." [5]) In der vierten Auflage des „Wegweisers" werden in einer Hinsicht noch bestimmtere Forderungen gestellt. Danach sollen die Aufgabenhefte für Schüler weiter nichts als eine „wohlgeordnete Sammlung von Aufgaben enthalten, ohne alles Regelwerk, ohne Vorschriften zur Auflösung und ohne Ausrechnung von Musterbeispielen. Wollte man auch weitläufige Entwickelungen geben, der Schüler würde sie nicht verstehen; und was zur Bearbeitung des Übungsbuches vonnöten ist, hat der Lehrer ihm in den Lehrstunden anzueignen." [6]) Bartholomäi schließt sich diesen Forderungen an, äußert sich nur noch viel entschiedener als Diesterweg, z. B. in Kehrs „Pädagogischen Blättern", dahin: „Alles rein Arithmetische, die Form der Berechnung mit eingeschlossen, ist vom Übel, weil es dem Lehrer Fesseln anlegt, und der methodische Kram in einem für Kinder bestimmten Buche geradezu demoralisierend wirkt." [7])

Die Forderungen Diesterwegs und Bartholomäis sind von vielen nachgesprochen und anerkannt worden. So hoch wir aber auch die beiden Rechenmethodiker schätzen, und so richtig ihre eben angeführten Forderungen an sich sein mögen, wir können ihnen doch nicht ohne weiteres zustimmen. Denn jede Sache hat zwei Seiten: in der Schule insbesondere eine theoretische und praktische. Die praktische Seite aber spricht im vorliegenden Falle gegen die beiden Methodiker. Aus folgenden Gründen.

Erstens steht fest, daß im Rechenunterrichte überhaupt die Form eine große Rolle spielt. In der Volksschule aber ist die Form deshalb noch von ganz besonderer Wichtigkeit, weil sich der Volksschüler viel weniger als der Schüler höherer Schulen von derselben loszumachen imstande ist. Nun giebt es für ein und denselben Rechenfall wohl mehrere gute Formen, gewöhnlich ist es aber doch so, daß eine derselben als die beste und daher als Normalform zu gelten hat. Wird dieselbe

5) Ebenda S. 174.
6) Diesterweg a. a. O. Bd. II. S. 357.
7) Bartholomäi a. a. O. Bd. III. S. 127.

aber als Muster im Aufgabenhefte gegeben, so ist nicht recht einzusehen, wie dadurch dem Lehrer Fesseln angelegt werden, oder warum das auf die Kinder demoralisierend wirken soll. Eher das Gegenteil dürfte der Fall sein: Der Lehrer hat nicht nötig, die Normalform wiederholt an der Wandtafel darzustellen und gewinnt daher Zeit; die Schüler aber können das im einzelnen Falle vollkommenste Muster wiederholt anschauen und in den eigenen Darstellungen demselben nachstreben. Selbstverständlich ist die Zahl der Musterbeispiele auf ein Minimum zu beschränken.

Zweitens ist es eine bekannte Thatsache, daß vor allen andern Schulbüchern die Rechenbücher diejenigen sind, welche zu irrtümlichen Auffassungen bei Schülern und Lehrern nicht selten Veranlassung geben. Da werden Aufgaben in einer Weise gedeutet, an die vorher niemand gedacht hat, Schwierigkeiten werden hineingelegt, die nicht vorhanden sind u. dgl. m. Und ist nicht auch der Fall denkbar, daß ein Verfasser Aufgaben gestellt hat, bei denen gewisse Formen der Auflösung einen besondern Bildungswert besitzen? Ja, kann nicht da und dort selbst der Fortschritt in den einzelnen Rechenfällen durch diese oder jene Form bedingt sein? Ganz gewiß! Um daher nicht mißverstanden zu werden, muß dem Verfasser von Aufgabenheften in seinem und der Leser Interesse gestattet sein, einzelne Darstellungsformen und Erklärungen zu geben.

Drittens, und das ist der Hauptgrund, giebt es Schulverhältnisse, welche ohne Andeutungen und Musterbeispiele in den Aufgabenheften Leitern, Lehrern und Schülern die Arbeit erheblich erschweren können. Wir denken da besonders an die größern Volksschulen, welche nach dem Vier- bis Acht-Klassensysteme organisiert sind, in denen oft nicht nur Knaben und Mädchen getrennt unterrichtet werden, sondern die auch noch Parallelen zu den einzelnen Knaben- und Mädchenklassen haben. Da gilt es, Einheit in der Vielheit herbeizuführen, nicht nur, um die Leitung solcher Schulorganismen möglich zu machen, sondern auch um Lehrern und Schülern eine nicht unwesentliche Hilfe zu bieten. Denn wenn ein Kind mit jedem neuen Schuljahre womöglich in eine neue Klasse versetzt und von andern Lehrern unterrichtet wird, welche andere Ausdrücke und Darstellungsformen von ihm fordern, so geht mindestens viel kostbare Zeit verloren, die besser hätte verwendet werden können. Die wünschenswerte Einheit kann zwar auch durch besondere Bestimmungen herbeigeführt werden; wer aber in einem großen Organismus steht, der weiß, wie gut es ist, wenn an das, was alle in gleicher Weise ausführen sollen, öfter erinnert wird. Und eben deshalb wird die Einheit des Rechenunterrichts durch einige Andeutungen und Ausführungen in den Aufgabenheften wesentlich gefördert.

So befinden sich denn auch in unserm „Rechenbuche“ Erläuterungen, Andeutungen und Musterbeispiele neben manchen Aufgaben, von denen wir die eben erwähnte Wirkung erhoffen.

In der ersten Auflage desselben war ihre Anzahl allerdings eine bei weitem größere, als sie es jetzt ist. Das hing mit der von den damals vorhandenen Rechenbüchern stark abweichenden Art und Weise der Behandlung unseres Gegenstandes zusammen. Um nicht falsch verstanden zu werden, mußten wir da und dort Anmerkungen geben, deren Rechenhefte, die sich in den alten Gleisen bewegten, nicht bedurften. Von der dritten Auflage ab sind diese Anmerkungen aber aus unsern Rechenbüchern vollständig verschwunden. Denn inzwischen war die erste Auflage des vorliegenden Handbuches erschienen, und später kamen noch die Lehrerhefte hinzu, welche besonders dazu bestimmt sind, zu einzelnen methodischen Einheiten und Aufgaben alle wünschenswerten Andeutungen und Zusätze zu geben. Immerhin enthalten unsere Rechenbücher auch heute noch vereinzelte sachliche und methodische Bemerkungen, sowie eine Anzahl von Darstellungsformen, welche als Muster gelten sollen. Es ist dieses eben das „Minimum", von dem vorhin die Rede war, und welches wir in keinem Falle missen möchten.[8]) Und darauf will auch der Name „Rechenbuch", den wir unserm Rechenwerke gaben, hindeuten. Andernfalls würden wir „Rechenaufgaben" gesetzt haben.

Die gegenwärtig verbreitetsten Aufgabensammlungen sind oben in alphabetischer Ordnung aufgeführt worden.[9]) Über die Stellung der neuern Schulgesetzgebung und der Rechenmethodiker zu denselben dürften aber noch folgende Angaben willkommen sein.

In den „Allgemeinen Bestimmungen" heißt es ausdrücklich: „Dem Unterrichte sind in allen Schulen Aufgaben- (Schüler-)Hefte, zu denen der Lehrer das Facitbüchlein in Händen hat, zu Grunde zu legen."[10]) Der „Lehrplan für die einfachen Volksschulen des Königreichs Sachsen" schreibt vor: „Als Lehrmittel sind außer der Rechenmaschine Aufgabenhefte für die Hand der Schüler erforderlich."[11]) Dazu bemerkt der Herausgeber noch, daß sich gegen die Benutzung von Aufgabenheften seitens der Schüler von den 28 Bezirksschulinspektoren des Landes nur einer aussprach: „Rechenhefte sind möglichst zu vermeiden, die Kinder aber anzuhalten, selbst Exempel zu bilden."[12]) In den übrigen deutschen Staaten sind auf dem Verordnungswege ähnliche Bestimmungen wie in Preußen und Sachsen gegeben worden. Die neuere deutsche Schulgesetzgebung zählt also Aufgabenhefte für die Hand der Schüler zu den notwendigen Lehrmitteln der Volksschule.

Von den neuern Rechenmethodikern haben zwar nicht alle zu der Frage der Schüler-Aufgabenhefte Stellung genommen, doch darf

8) Was schon andern Autoren begegnete, das sollte auch uns nicht erspart bleiben. Es gab Kritiker, welche sich ebensowenig um die neuen Auflagen unseres Rechenbuchs bekümmerten, als sie die Eigenart der ersten Auflage desselben beachteten. Diese Kritiker glaubten uns noch über das Ungehörige der zahlreichen Anmerkungen ꝛc. der ersten Auflage belehren zu sollen, als bereits die — abgeänderte achte Auflage vorlag. (Vergleiche insbesondere Bärs Auslassungen in der Päd. Warte a. a. O. Nr. 51.)

9) Vergl. § 16, S. 229.

10) A. a. O. § 28. S. 18.

11) Kockel a. a. O. § 4. Abs. 8. S. 66.

12) Kockel a. a. O. S. 72.

aus dem Zusammenhange gefolgert werden, daß fast alle solche Hefte als ein notwendiges Lehrmittel betrachten.

Einer der wenigen Gegner der Aufgabenhefte ist z. B. Tschirch. Er beantwortet die Doppelfrage: „Ist der Gebrauch sogenannter Schülerrechenhefte unbedingt notwendig? oder: Haben Schüler-Rechenhefte in der gegenwärtig meist gebräuchlichen Form wirklich einen so großen Nutzen, als man wegen ihrer überaus weiten Verbreitung anzunehmen berechtigt ist?“ wie folgt: „1. Der Gebrauch von sogenannten Schülerrechenheften in der Volksschule hat einen mehr scheinbaren als wirklichen Nutzen. 2. Dergleichen Unterrichtsmittel sind nicht unbedingt notwendig. 3. Dieselben tragen in ihrer gegenwärtig gebräuchlichen (mangelhaften) Form zum großen Teil mit dazu bei, daß die Leistungen vieler Schüler im Rechnen bei ihrem Austritte aus der Volksschule den berechtigten Forderungen nicht entsprechen“.[13]) Wenn aber schon die Doppelfrage die Annahme gestattet, daß es Tschirch jedenfalls nicht darum zu thun ist, die Rechenhefte ohne Ausnahme als vollständig nutzlos und darum als überflüssig hinzustellen, sondern nur die schlechten, so zeigen seine weitern Ausführungen, daß diese Annahme in der That eine zutreffende ist. Denn zuletzt heißt es bei ihm: „Verfasser hat hauptsächlich nur darthun wollen, daß die gegenwärtig (1881) meist beliebte Form solcher Rechen-Unterrichtsmittel zum großen Teile eine verfehlte sei. Eine wesentliche Verbesserung derselben würde nach seiner Meinung erzielt werden, wenn solche nach folgenden Grundsätzen bearbeitet würden:

1. Die Hilfsmittel beim Rechenunterrichte in der Volksschule für die Hand der Schüler müssen so billig sein, daß selbst armen, unbemittelten Eltern ihre Anschaffung nicht schwer fällt. 2. Um dergleichen Hilfsmittel für einen möglichst billigen Preis herstellen zu können, ist darauf zu achten, daß von denselben alles Überflüssige ferngehalten werde und nur das unbedingt Notwendige Berücksichtigung finde. 3. Dieselben müssen in strenger Sonderung zwei Hauptarten von Aufgaben enthalten: a) Übungs-Aufgaben, b) Prüfungs-Aufgaben. 4. Die Übungsaufgaben müssen die große Mehrzahl bilden, kurz gefaßt und leicht verständlich sein . . . 5. Die Prüfungsaufgaben müssen dem Lebenskreise der Schüler und ihrer nächsten Angehörigen entnommen sein und sich sachgemäß an eine Anzahl vorausgegangener Übungsaufgaben anschließen.“[14])

Meier will zwar Aufgabenhefte zulassen, bestimmt aber: „Sie sind nicht zu benutzen beim unmittelbaren Unterricht, sondern dienen nur zur stillen Beschäftigung im Hause. . . . Sie sind nicht zu benutzen vor dem 3. Schuljahre. . . . Sie sollen in Anwendung kommen, wenn ein Lehrabschnitt durch den Unterricht zum klaren Verständnis gebracht worden ist; dann erst gilt es, durch vielfache schriftliche Übungen auch ausreichende Fertigkeit zu erzielen, wozu die Aufgaben des Rechenheftes

13) Tschirch a. a. O. S. 28 f.
14) Ebenda S. 35.

helfen sollen; neben solchen müssen zahlreiche andere darin sein, die der Wiederholung dienen".[15])

Auch Steuer ist der Ansicht, „daß den Inhalt der Schülerrechenhefte ausschließlich Aufgaben für stille Beschäftigung bilden müssen, also a) Aufgaben für das eigentliche schriftliche Rechnen, b) Aufgaben zur Unterstützung des Kopfrechnens durch Verbindung des Kopf- und schriftlichen Rechnens . . . Von allem andern gehören allenfalls noch die Verhältniszahlen von Münzen, Maßen, Gewichten und Zeitabschnitten hinein, die von den Kindern nachgesehen werden mögen, wenn sie von ihnen vergessen worden sind. Gleichwohl finden wir in Schülerheften außerdem allerlei Erklärungen, Regeln, ausgerechnete Beispiele, Belehrungen und methodische Auseinandersetzungen. Das Kind zu belehren . . . ist des Lehrers Sache."[16]) Indessen — der Praktiker Steuer fügt hinzu: „Wenn in dem von mir bearbeiteten ‚Rechenbuch' hier und da eine Zeile Ausrechnung aufgenommen worden ist, so geschah dies in der Absicht, den Lehrer auf das Wesen der nun folgenden Aufgaben aufmerksam zu machen."[17])

Räther bemerkt: „Ein Schülerheft ist für das Rechnen in der Zahlreihe 1 bis 100 noch nicht unbedingt notwendig, wohl aber wünschenswert, da es doch schon einige Dienste zu leisten vermag. Man verwendet es: a) zum sogenannten schriftlichen Rechnen in der Rechenstunde; b) zu häuslichen Aufgaben; c) zu mündlichen Übungen . . . Wo ein Rechenheft eingeführt ist, da darf es nur als wirkliches Übungsheft verwendet werden, d. h. immer muß das Verständnis der Rechenoperationen schon erzielt sein, bevor das Schülerheft benutzt wird."[18]) Später aber heißt es bei ihm: „War in der Zahlreihe bis 100 ein Schülerheft nur wünschenswert, so wird sein Gebrauch von jetzt an zur Notwendigkeit, denn jetzt läßt sich ohne Schülerheft der Übungsstoff nicht mehr so leicht und so rasch beschaffen, wie bisher . . . Was das Schülerheft im einzelnen enthalten soll, darüber sind die Meinungen geteilt. Einige verlangen nur Aufgaben für das schriftliche, andere solche für das mündliche und schriftliche Rechnen. Wir geben in unserem Übungshefte beide Arten . . . Soll das Schülerheft auch berechnete Beispiele, Regeln und Erklärungen enthalten? Einige Rechenbücher haben dergleichen Zuthaten. Wir halten sie für überflüssig. . . Nur in einem Falle sind Beispiele nötig, nämlich da, wo unter mehreren möglichen Berechnungsweisen eine ganz bestimmte geübt werden soll . . ."[19])

Büttner fordert: „Jedes Kind, das lesen kann, muß ein Rechenheft in Händen haben. Dasselbe enthält Aufgaben für Tafelrechnen und für die schriftliche Beschäftigung. . . Der Lehrer muß das Schülerheft genau kennen und sich im großen und ganzen dem Gange desselben an-

15) Meier a. a. O. S. 33.
16) Steuer a. a. O. S. 144.
17) Ebenda S. 144.
18) Räther a. a. O. S. 75.
19) Ebenda S. 129.

schließen. Aber es ist falsch, wenn man meint, die Aufgabensammlung sei die Hauptsache im Rechenunterrichte, und es käme nur darauf an, alle Aufgaben von der ersten bis zur letzten durchzurechnen. Der Lehrer muß über dem Hefte stehen; er macht das Fortschreiten im Rechnen nicht vom Rechenhefte abhängig, sondern von den Leistungen der Schüler; er schiebt deswegen, wenn er es für notwendig hält, Aufgaben ein, oder läßt Aufgaben aus, oder bringt sie in andere Reihenfolge." [20])

Was Jänicke von den Aufgabensammlungen für das Volksschulrechnen hält, geht aus folgenden Worten desselben hervor: „Eine derartige Sammlung soll auch in der Zahl der Aufgaben weniger erschöpfend, aber in der Form anregend und durchweg mustergiltig und praktisch sein. Wünschenswert ist, daß sie zum Teil zum mündlichen Rechnen benutzt werden kann. Der Lehrer ist zeitweise des Aufgabenstellens überhoben, das ist Zeit- und Kraftersparnis; die Schüler sind der drückenden Last des Aufgabenmerkens los und können sich beim Aufsuchen der Lösung freier bewegen; das ist ein intellektueller Gewinn. Für die einklassige Volksschule, in der mindestens vier Abteilungen gleichzeitig zu beschäftigen sind, ist diese Einrichtung des Handrechenbuches der Kinder von besonderer Bedeutung. Während zwei Abteilungen das Erlernte schriftlich üben, rechnen die übrigen Abteilungen mündlich, entweder unter Leitung des Lehrers, oder eines Helfers, oder still für sich und notieren nur die Resultate." [21])

Für die einklassige Volksschule hat neuerdings Bussmann ein Aufgabenheft herausgegeben, welches den weitgehendsten Einfluß auf den Rechenunterricht ausüben soll. Denn er sagt unter anderm: „Hier (in der einklassigen Schule) ist das Lehrbuch, das Aufgabenheft, von der größten Bedeutung, denn es schreibt einmal dem Lehrer den Gang vor, den er einzuhalten hat, und es giebt die Methode an, der er in den Hauptstücken folgen muß. Mag er auch viel übergehen oder manches anders gestalten, im ganzen ist er doch an das Buch gebunden." [22]) Das ist jedenfalls viel!

Auch Braune erwartet ziemlich viel von den Aufgabenheften, wenn er schreibt: „Die Rechenhefte müssen eine dreifache Aufgabe erfüllen, sie müssen einmal den Gang des Unterrichts bestimmen, zum andern den Stoff für die stille Beschäftigung darbieten und drittens, wenn anders die Verhältnisse es gestatten, daß der Lehrer Aufgaben für den häuslichen Fleiß stellen darf, auch für diesen die nötigen Aufgaben enthalten. Die Rechenhefte sind nach einem methodisch durchgedachten Plane gearbeitet, sie führen Schritt für Schritt sicher zum Ziele. Den dort vorgezeichneten Weg muß der Lehrer gehen, indem er das Heft in fortlaufender Reihenfolge durcharbeitet". [23])

20) Büttner a. a. O. S. 30.
21) Jänicke a. a. O. S. 147.
22) Bussmann a. a. O. S. 8.
23) Braune a. a. O. S. 22.

In einer besondern Schrift hat Splittegarb die „Übungsbücher des grundlegenden Rechenunterrichts" einer Kritik unterzogen. Er hält im allgemeinen dafür, daß dieselben den Lehrgang bestimmen, daß sie für die Rechenstunde ein fast unentbehrliches Hilfsmittel sind, daß der Lehrer durch sie bequem häusliche Aufgaben stellen kann, und daß sie in hohem Maße die Verbindung zwischen Schule und Haus pflegen. Entgegen Meier, Räther u. a. legt er großes Gewicht auf das Übungsbuch der Unterstufe. „Wir fordern, daß das Übungsbuch sogar für die ersten Schulwochen entsprechenden Stoff enthalten müsse, da in dieser Zeit vielseitige Abwechslung gerade sehr not thut." 24) Die sämtlichen derzeitigen Aufgabenhefte sondert Splittegarb nach den in ihnen anzutreffenden drei „Methoden" in Hefte, welche a) die gruppierende, b) die trennende und c) die vermittelnde Methode befolgen. Die „gruppierende Methode" führt er auf A. W. Grube zurück; unter „trennender Methode" versteht er die Aufstellung der „Zahlenkreise oder Zahlenräume" 1 bis 10, 1 bis 20 und 1 bis 100, innerhalb welcher zunächst die Zahlvorstellungen gebildet und danach die vier Grundoperationen in ihrer natürlichen Folge nach einander behandelt werden; als „vermittelnde Methode" gilt ihm „eine geschickte Kombination der beiden andern Methoden". Für die besten Rechenbücher erachtet er diejenigen nach der „trennenden Methode", obenan die seinigen; die „gruppierende Methode" erscheint ihm als „Ungetüm"; die „vermittelnde Methode" umschließt alle „Metamorphosen des Grubeschen Ungetüms". Dazu möchten wir denn doch bemerken: Das ist zwar ein summarisches Verfahren, dessen Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig läßt; allein es leidet an zwei Grundübeln: an starken Übertreibungen und naiven Ansichten.

Bemerkenswert ist jedenfalls, was Sterner in seinem „Programm" über die Abfassung seines „Rechenbuches für Landschulen" mitteilt: „Als vor Jahren der Entwurf der Rechenbücher in Angriff genommen wurde, zeigte sich alsbald, daß unter der ungeheuern Zahl der vorhandenen Übungsbücher nur sehr wenige Originalarbeiten sich befanden. Weitaus die meisten Aufgabensammlungen stellten sich in der That als solche (d. h. als Sammlungen!) dar, nur daß man zu dem nächstliegenden griff, ohne die Litteratur zu bereichern. Es erübrigte daher nur, neue Quellen aufzusuchen. Diese boten sich im Verkehre mit der Ackerbau und Viehzucht treibenden Bevölkerung und in der landwirtschaftlichen Statistik. Der Sachkundige kann leicht jeder Aufgabe ihren Ursprung aus einer dieser Quellen nachweisen, und er wird sich überzeugt halten, daß es dem Schultechniker unmöglich ist, am Studiertische derlei Aufgaben auszusinnen, wenn er nicht die Erfahrungen des Landwirtes zurate zieht." 25)

Sterner berührt damit einen äußerst wichtigen Punkt. Er fordert, daß die Aufgabenhefte dem praktischen Leben in Wahrheit, nicht nur zum

24) Splittegarb a. a. O. S. 3.
25) Sterner a. a. O. S. 28.

Scheine, dienen. Er sagt auch, auf welche Weise man zu solchen Heften gelangt. Daraus aber ergiebt sich, daß nicht in den nackten Zifferbeispielen, wie z. B. bei Splittegarb, sondern in den angewandten Aufgaben der Wert und die Unentbehrlichkeit der Schülerhefte beruhen. Gute angewandte Aufgaben kann man nicht jederzeit „aus dem Ärmel schütteln“. Passende Zifferbeispiele nur wird der deutsche Volksschullehrer stets selbst je nach Bedarf zu bilden wissen.

Aber noch ein Punkt fällt hier schwer ins Gewicht: die Durchführung des Konzentrationsgedankens nach den von uns oben gegebenen Gesichtspunkten.[26]) Wir stimmen den Verfassern der „Schuljahre“ durchaus bei, wenn sie die Ansicht aussprechen: „Für viel nötiger erachten wir die Beschaffung einer guten Aufgabensammlung, die dem Konzentrationsgedanken und dem praktischen Leben gerecht wird, und in welcher innerhalb der einzelnen Gruppen die Aufgaben methodisch geordnet sind“.[27]) Wir meinen aber auch, daß in unsern Rechenbüchern eine solche Aufgabensammlung, soweit es heute überhaupt möglich ist, dargeboten wird. Wir sagen ausdrücklich: Soweit es heute überhaupt möglich ist! Denn dem Konzentrationsgedanken völlig gerecht werden, setzt ein allgemein anerkanntes Lehrplansystem für die Volksschule voraus. Soweit sind wir aber bislang noch nicht. Und so dürfen wir wohl auch mit Recht erwarten, daß diesen Umstand alle diejenigen berücksichtigen, welche unsere Arbeit auf die Durchführung des Konzentrationsgedankens einer eingehenden Prüfung unterwerfen.

26) Vergl. S. 173 ff.
27) Rein 2c. a. a. O. Das achte Schuljahr. S. 161.

Besonderer Teil.

Fünfter Abschnitt.

Die Darstellungsformen im Rechnen.

§ 24.

Mündliches und schriftliches Rechnen.

Litteratur. Allgemeine Bestimmungen des Kgl. Preuß. Ministers &c. Brandenburger Schulblatt Jahrg. 1836. Büttner, A. Anleitung &c. Diesterweg F. A. W. Wegweiser für deutsche Lehrer. Neue Aufl. in 2 Bänden. Zweiter Band. Essen 1838. Hartmann-Ruhsam, Lehrerhefte zum Rechenbuche für deutsche Stadt- und Landschulen. Frankfurt a. M. und Leipzig 1892. Hentschel-Költzsch, Lehrbuch des Rechenunterrichts. 14. Aufl. Leipzig 1891. Jänicke, E. Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts. 2. Aufl. Kockel, F. W. Lehrplan &c. Lincke, R. Rechenbuch für Volksschulen. 2. Aufl. Jena 1884. Schellen, H. Methodisch geordnete Materialien für den Unterricht im theoretischen und praktischen Rechnen. 7. Aufl. Münster 1875. Schneyer, F. Der erste Rechenunterricht. Schütze, E. Th. Praktische Anweisung zur Behandlung der Buchrechnung &c. Leipzig 1877. Steuer, W. Methodik des Rechenunterrichts. 1. Aufl. Strehlen (Schlesien) 1883. Stoy, K. V. Encyklopädie, Methodologie und Litteratur der Pädagogik. 2. Aufl. Leipzig 1878. Unger-Krusche, Leitfaden für den Unterricht im Kopfrechnen. 3. Aufl. Leipzig 1881.

Der „Besondere Teil“ unseres Handbuches, welcher mit diesem Paragraphen beginnt, hat vorwiegend die Aufgabe, in die Unterrichts-technik, wie sich Stoy ausdrückt, einzuführen.[1]) Er thut dieses in engem Anschlusse an die im „Allgemeinen Teile“ gegebene Stoffverteilung und das Lehrverfahren.[2]) Da nun diese Stoffverteilung die Grundlage unseres „Rechenbuches“ bildet, so folgt, daß ein enger Zusammenhang zwischen dem „Rechenbuche“ und den Ausführungen

1) Stoy, Encyklopädie. 2. Aufl. S. 71.
2) Vergl. S. 258 und 298.

des „Besondern Teiles“ des Handbuches bestehen muß. Insofern hat also auch der Titelzusatz: „Anleitung zum Gebrauche des Hartmann-Ruhsamschen Rechenbuches“ seine Berechtigung. Wollte man aber daraus schließen, daß er lediglich unseres Rechenbuchs wegen aufgenommen worden sei, so wäre das ein Irrtum. Denn er verliert sich nicht in Einzelheiten desselben, sondern stellt überall die leitenden Gesichtspunkte auf, welche in stand setzen, den Rechenstoff des Aufgabenheftes, gleichviel, ob dieses unserm Rechenbuche angehört oder nicht, zu beherrschen und mit Erfolg zu verarbeiten. Daß die Beispiele unserm Rechenbuche entlehnt sind, thut dem natürlich auch keinen Eintrag.[3])

Soll das Volksschulrechnen allen berechtigten Forderungen entsprechen, so muß das erste Geschäft des Rechenunterrichts die klare und saubere Auffassung der Zahlen an sich und innerhalb der Zahlreihe sein. Dann erst darf das eigentliche Rechnen, d. h. die gesetzmäßige Verknüpfung der Zahlen, folgen. Die Zahlauffassung vollzieht sich zweckmäßig in Reihen-Abschnitten, und das nachfolgende Rechnen bindet sich an dieselben, indem es sein Zahlmaterial daraus entlehnt. So erhält man die einzelnen, mit den Schuljahren aufsteigenden Rechenstufen. Auf jeder Rechenstufe wird der Stoff in eine Anzahl kleinerer Stoffganzen, methodische Einheiten genannt, zerlegt, und diese werden nach Maßgabe der formalen Unterrichtsstufen durchgearbeitet. Diese Durcharbeitung vollzieht sich im steten Wechselverkehre zwischen Lehrer und Schülern auf mündlichem und schriftlichem Wege. Wenn aber der Verkehr zwischen Lehrer und Schülern in jedem Unterrichtsfache gewisse Formen zu berücksichtigen hat, so doch ganz besonders im Rechnen, weil dieses zu den formunterrichtlichen Fächern gehört.[4]) Und im Rechenunterrichte sind die Darstellungsformen nicht allein deshalb von größter Wichtigkeit, weil sie den Verkehr zwischen Lehrer und Schülern vermitteln, sondern auch deshalb, weil sich die von dem Zöglinge geforderte besondere geistige Thätigkeit nur mit ihrer Hilfe zu vollziehen vermag. Gewisse Formen liegen dem mündlichen und schriftlichen Verkehre gleicherweise zu Grunde; andere gehören dem einen oder andern ausschließlich an. Im Nachstehenden soll zunächst auseinander gesetzt werden, was man unter mündlichem und schriftlichem Rechnen zu verstehen hat, alsdann soll der Darstellungsformen überhaupt und der mündlichen und schriftlichen Formen besonders gedacht werden.

---

3) In der ersten Auflage erstreckte sich der Zusammenhang des „Besondern Teiles“ mit unserm „Rechenbuche“ allerdings auch auf viele Einzelheiten. Doch sind dieselben inzwischen in die „Lehrerhefte“ der einzelnen Rechenbuch-Ausgaben verwiesen worden. So kommt es auch, daß der „Besondere Teil“ in der zweiten Auflage wesentlich kürzer als in der ersten gefaßt worden ist. Was also im „Handbuche“ etwa vermißt werden sollte, das findet man sicher in einem der „Lehrerhefte“.

4) Vergl. S. 208 f.

a) Mündliches und schriftliches Rechnen.

Das mündliche Rechnen wird auch Kopfrechnen, das schriftliche Rechnen Tafelrechnen genannt. Andere Bezeichnungen sind Denk- und Regelrechnen, Zahl- und Zifferrechnen u. dgl. m. Alle diese Namen sind zwar nicht falsch; indessen bezeichnen sie die Sache auch nicht vollständig. Das geht schon aus folgenden sechs Regeln hervor, welche das Schulblatt für die Provinz Brandenburg im Jahre 1836 unter der Überschrift: „Wie man im Rechnen schlecht unterrichten kann“ aufstellte. Dieselben lauten:

„1. Wenn für das Rechnen wöchentlich vier Stunden bestimmt sind, so nimmt man die eine für die Theorie, für das Kopfrechnen die zweite, für das Tafelrechnen die beiden noch übrigen Stunden. Jede der drei Lektionen nimmt ihren besondern Gang: das Kopfrechnen hat nichts gemein mit dem Tafelrechnen, und die Theorie achtet weder auf das eine noch auf das andere.

2. Bei der Theorie geht man nicht von der Anschauung aus, sondern von abstrakten Begriffen; man bedient sich auch nicht der allgemein verständlichen Ausdrücke, sondern der fremden, die so einen vornehmen Klang haben, als da sind: Dekadik, Exponent und Potenzen, homologe oder korrespondierende Glieder. Die meiste Zeit aber wendet man auf das an, was ohne praktischen Nutzen ist. Für einen Unterricht, bei dem die Kinder nichts lernen sollen, ist eine ausführliche Theorie der Proportionen besonders zu empfehlen.

3. Beim Kopfrechnen sucht der Lehrer zu verhüten, daß die Kinder nicht etwa die Aufgabe durch Schlüsse und ein selbsterfundenes Verfahren herausbringen; man richtet das Kopfrechnen so ein, daß es im Grunde doch nur ein Rechnen mit Ziffern ist. Soll der Schüler eine Aufgabe im Kopfe dividieren, so gewöhnen wir ihn, sich den Dividendus und den Divisor gleichsam in die Luft zu schreiben u. s. w.

4. Damit es aber doch den Schein habe, als ob der Unterricht im Kopfrechnen von ungemeinem Erfolge sei, übt man gewisse Kunststücke ein, deren Anwendung den Unkundigen leicht täuschen kann.

5. Beim Tafelrechnen giebt man jedem Kinde ein Rechenbuch in die Hände und läßt nach dem Verfahren, das wir nicht erklärt, sondern vorgemacht haben, jedes Kind rechnen, soweit es eben gekommen ist. Das Buch, welches die Auflösungen enthält, bleibt in unsern Händen, und wenn die Schüler eine halbe Stunde gerechnet haben, so vergleichen wir das Fazit der Schüler mit dem, welches in unserm Buche steht. Mit einem: Richtig! oder mit einem Falsch! wird jeder leicht abgethan, und wem wir: Falsch! zurufen, der muß sehen, wie er mit dem Exempel fertig wird. Das nennen wir die Kinder zur Selbstthätigkeit anleiten; sie mögen suchen, so werden sie finden.

6. Ein besonders wirksames Mittel, alle Fortschritte im Rechnen zu hindern, liegt in der Wahl der Beispiele, die man den Schülern aufgiebt.

Vor allen Dingen wähle man recht große Zahlen, von denen die Kinder sich keine Vorstellung machen können, Benennungen, welche dem Schüler ganz fremd sind, und Sachverhältnisse, welche die Kinder nicht verstehen. Durch diese Mittel wird man den Zweck, erfolglos zu unterrichten, in wenigen Fällen verfehlen."

Sehr klar spricht sich Diesterweg in seinem „Wegweiser" über unsern Gegenstand aus. Er sagt:[5]) „Das Rechnen geschieht im Geiste. Man hat es mit den Vorstellungen von der Menge gleichartiger Dinge zu thun, also überall mit Vorstellungen. Das Rechnen ist daher ein geistiger Akt, und zwar eine Erzeugung neuer Zahlvorstellungen aus gegebenen. Es geschieht nicht durch Einfälle, sondern durch gewolltes, absichtliches Denken. Dieses Rechnen in der bloßen Vorstellung, ohne den Gebrauch äußerer Mittel oder Zeichen, heißt das Kopfrechnen. Gebraucht man aber zugleich diese, namentlich Ziffern, so nennt man das Rechnen Zifferrechnen oder Tafelrechnen. Beides soll Denkrechnen sein. Es giebt also dem Wesen nach nur eine Art des Rechnens. . . . Ein reines Ziffer- oder Zahlzeichenrechnen giebt es nicht. Überall hat man es mit Zahlvorstellungen zu thun. Das Zifferrechnen geschieht um der bequemen schriftlichen Darstellung willen und um dem Gedächtnisse zu Hilfe zu kommen. Wie sich das Wort zum Gedanken und der Buchstabe zum Worte verhält, so verhält sich das Zahlwort zur Zahlvorstellung und die Ziffer zum Zahlworte. Gedanke, Wort, Buchstabe und Zahlvorstellung, Zahlwort und Ziffer bilden also zwei Parallelismen. Wie der Buchstabe nichts ist ohne das Wort, das Wort ohne den Begriff, so ist die Ziffer nichts ohne das Zahlwort und die Zahlvorstellung. Alle Aufgaben werden durch Denken, nicht durch Zeichen gelöst. Der Möglichkeit und dem innern Denkprozeß nach können alle ohne Zeichen gelöst werden. Ein materieller Unterschied, sodaß eine gewisse Art von Aufgaben im Kopfe, eine andere Art schriftlich gelöst würde, findet nicht statt. In vielen Fällen ist es aber ein formeller, d. h. im Kopfe, ohne Zeichen, finden Auflösungsweisen statt, die beim Gebrauche der Ziffern nicht vorkommen. Überhaupt ist der ganze Unterschied im allgemeinen ein subjektiver, wie Krancke schon gezeigt hat. Was der eine noch im Kopfe vermag, dazu bedarf der andere schon der Zeichen. Je geübter die Kraft, desto mehr kann man der Mittelchen entbehren. Damit wird der Gebrauch der Ziffern nicht verworfen; aber sie werden in ihrem Wesen erkannt, und daß sie keine besondere Art des Rechnens begründen. Das Zifferrechnen geht mehr nach bestimmten, herkömmlich festgesetzten Regeln (wie alles, was schriftlich gemacht wird, also eigentlich für die Mitteilung berechnet ist), als das Kopfrechnen. Bei letzterem hat der einzelne einen Spielraum freier Thätigkeit. Darum gefällt es allen geistig geweckten Lehrern wie Kindern. Lahme und Krüppel, körperliche und geistige, bedienen sich überall der Krücken. Der freie Mensch verläßt gern die

5) Diesterweg a. a. O. S. 149 f.

breite Heerstraße, schlägt Fußwege ein und bahnt sich selbst durch das Dickicht gerade Wege zum Ziele. — Also noch einmal, es giebt nur ein Rechnen. Selbst weiland Adam Ries rechnete zum Teil ohne Zeichen. Aber die nachfolgenden Jahrhunderte setzten das Kopf- und Zifferrechnen wie zwei im Wesen verschiedene Dinge einander entgegen und erfanden den Schlendrianismus und den Mechanismus zum Unheil für die Geistesbildung und die Entwickelung der Denkkraft und Lebensfrische. Noch sind diese Unholde nicht totgeschlagen, wie sie es verdienen. Der Schlendrianismus ist das geistlose, gedankenlose Fortwandern auf geebneten Pfaden, dumm und stumm. Der Mechanismus ist das System der Bewegung, dessen Kraft außerhalb der Bewegung selbst liegt. Mechanisches Rechnen ist also dies, wenn man ohne Einsicht und Bewußtsein nach unverstandenen vorgeschriebenen Regeln verfährt. Jeder, der dies treibt, ist darum eine Maschine, wie eine Uhr, eine Dampfmaschine und andere Maschinen. Der Mensch soll aber keine Maschine sein; denn er gehört zu den organischen Geschöpfen. Ein Kind zum bewußtlosen Rechnen, zum Spiel mit toten Ziffern abrichten, heißt es entmenschlichen, seinen Geist fesseln oder töten. Es ist ein intellektueller Totschlag. — Wir unterscheiden also nach dieser Auseinandersetzung, festhaltend die aufgestellten Begriffe: Kopfrechnen, Zifferrechnen. Jenes geschieht ohne, dieses mit Zeichen, beides denkend. Der Kopfrechner denkt an gar kein Zeichen, sondern an Zahlen; der Zifferrechner denkt auch an die Zahlen, die er mit Zeichen darstellt. Es ist gleichviel, ob man diese hinschreibt oder nicht hinschreibt, aber sich vorstellt. Letzteres ist kein Kopfrechnen, sondern ein After-Kopfrechnen, eine Verzerrung, ein Mißbrauch, eine Selbstfesselung. Menschen, die zuerst oder ausschließlich nur mit Ziffern rechnen lernten, bewegen sich in diesen Fesseln. Wenn daher der wahre Kopfrechner sechshundertzweiundvierzig mit acht multipliziert, so denkt er weder an die Ziffern, mit welchen diese Zahlen geschrieben werden, noch an ihren Stellenwert. Nur der falschunterrichtete Schüler denkt bei Roms Erbauung an die Ziffern 7, 5, 4, bei Alexander an 3, 3, 3, bei Karl des Großen Tod an 8, 1, 4. Doch ist auch dieses wahr, daß mit den Zahlen, die man sich durch Ziffern vorgestellt denkt, ein rationelles Rechnen möglich ist. Soll z. B. die Zahl dreihundertdreiunddreißig viermal genommen werden, und der Rechner denkt bei jener an 333, bei dieser an 4, so verfährt er mechanisch geistlos, wenn er die 4 in Gedanken unter die 333 setzt und operiert: 4 mal 3 ist 12 (2, 1 im Sinn), 4 mal 3 ist 12 und 1 ist 13 (3, 1 im Sinn) u. s. w. Er kann aber auch denkend verfahren: 4 mal 300 = 1200; 4 mal 30 = 120; 1200 und 100 = 1300 u. s. w. Also die Vorstellung einer Zahl durch Ziffern führt nicht notwendig zum Mechanismus. Strenge ist zwar gut; nicht aber die Pedanterie. Überall Freiheit geistiger Bewegung — freilich innerhalb bestimmter Grenzen."

Einer der tüchtigsten deutschen Rechenmethodiker ist unbestritten E. S. Unger. Dieser hat sich ganz besondere Verdienste um die theoretische und praktische Fortentwickelung des Kopfrechnens erworben.

Sein „Leitfaden für den Unterricht im Kopfrechnen,“ [6]) der noch heute jedem Rechenlehrer zum Studium angelegentlich zu empfehlen ist, nimmt in der Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts einen ehrenvollen Platz ein. In der Einleitung zu demselben heißt es nun unter anderm: [7]) „Man unterscheidet gewöhnlich das Kopfrechnen von dem Tafelrechnen. Bei dem letztern bedient man sich der geschriebenen Zahlen (Ziffern); und soweit die Rechnung mit diesen wirklich ausgeführt wird, ist es immer ein Rechnen nach bestimmten Regeln, die von unserm Zahlsysteme und der Art und Weise, wie wir Zahlen schreiben, abhängen. Das Kopfrechnen setzt keine geschriebenen Zahlen voraus, macht also auch von jenen Regeln keinen Gebrauch. Man darf aus diesem Grunde auch unter Kopfrechnen kein bloßes Rechnen aus dem Kopfe verstehen, bei welchem man nur das Aufschreiben der Zahlen vermeidet, sich aber die Zahlen geschrieben vorstellt und mit diesen in derselben Weise, wie bei dem Tafelrechnen, die Rechnung ausführt; sondern es ist ein Rechnen mit dem Kopfe, oder wie man es mit Recht nennt, ein Denkrechnen, bei welchem die Rechnung nicht nach bestimmten festen Regeln ausgeführt und so das Resultat gefunden wird: sondern bei dem man durch ein unmittelbares Vergleichen der gegebenen Bedingungen mit den Eigenschaften der Zahlen folgert, welchen Wert das gesuchte Resultat haben muß. Die geschriebenen Zahlen werden bei dem Rechnen in einer zwiefachen Weise benutzt: entweder um durch sie dem Gedächtnisse zu Hilfe zu kommen (es werden also teils bloß die gegebenen Zahlen, teils die aus denselben nach und nach ermittelten, welche, um zu weitern Folgerungen gelangen zu können, gebraucht werden, niedergeschrieben, um sie vor Augen zu behalten, und so den eigentlichen Bedingungen der Aufgabe eine ungeteilte Aufmerksamkeit schenken zu können), und dieser Gebrauch der geschriebenen Zahlen ist auch beim Kopfrechnen nicht zu vermeiden, er ist bei schwierigern Aufgaben sogar zu empfehlen; [8]) oder man benutzt die geschriebenen Zahlen, um mit denselben die einzelnen Rechnungen wirklich auszuführen, also mit denselben z. B. wirklich zu multiplizieren oder zu dividieren u. s. w.; und dieses, da es ein Rechnen nach gegebenen Regeln ist, sollte man nur alsdann sich erlauben, wenn die Zahlen so groß sind, daß man bei einem ängstlichen Vermeiden alles Tafelrechnens nur mit der größten Anstrengung das Resultat zu finden hoffen darf. Man unterscheidet gewöhnlich das Tafelrechnen von dem Kopf-

6) Derselbe wurde in dankenswerter Weise von Krusche den gegenwärtigen Verhältnissen angemessen umgearbeitet.

7) A. a. O. S. 4 f.

8) Anm. d. H.: „Man beachte diese Worte eines Rechenmeisters, der seinen Schülern gewiß nicht zu wenig zumutet!“ — fügte der nun auch heimgegangene Rechenmeister E. Hentschel obigen von ihm in sein Lehrbuch des Rechenunterrichts (4. Aufl.) aufgenommenen Worten Ungers bei. Auch in der 12. Aufl. 1882 (I. Teil, S. 57) ist dieser Rat beibehalten, ein Beweis, daß er noch nicht überflüssig ist. (Ebenso in der 14. Aufl. 1891. Teil I. S. 53.)

rechnen; wesentlich ist es, wenn man statt dessen unterscheidet das Regelrechnen von dem Denkrechnen; das erstere sollte nur insoweit gelehrt werden, daß der Schüler Gelegenheit erhält, eine hinlängliche Übung in der Ausführung der verschiedenen Rechnungsarten mit größern Zahlen sich zu verschaffen; und es würde hierbei selbst schon ein Mißgriff sein, wenn man diese Übung auf so große Zahlen ausdehnen wollte, wie sie bei dem praktischen Rechnen gar nicht vorkommen. Sind die Rechnungsarten eingeübt, so darf bei dem Unterrichte von gegebenen Regeln, die eingeübt werden sollen, nicht weiter die Rede sein, alle fernere Beschäftigung der Schüler muß in einem Denkrechnen bestehen; es muß also eine Beschäftigung sein, bei der ihre Denkkraft fortwährend in Anspruch genommen wird. Wie weit hierbei Zahlen geschrieben werden oder nicht, ist nur von einer untergeordneten Bedeutung; die Hauptsache ist, daß das gesuchte Resultat durch ein ununterbrochen fortgesetztes Folgern ermittelt wird." An einer andern Stelle aber wird als oberster Grundsatz alles praktischen Rechnens genannt: „Man rechne stets mit den kleinsten oder bequemsten Zahlen!"

Mit Diesterweg und Unger stimmt auch Schellen überein, der in seinem trefflichen Rechenwerke sagt: „Jedes eigentliche Rechnen geschieht durch Denken, insofern man es nämlich stets mit den Zahlen, als Vorstellungen von der Menge gleichartiger Dinge, zu thun hat. Gebraucht man insbesondere zur Unterstützung des Gedächtnisses und zur bequemern und schnellern Darstellung äußerliche Mittel, die Ziffern, so entsteht das Denk-Zifferrechnen, welches sich von dem Kopfrechnen nur durch den Gebrauch der Ziffern unterscheidet; das Zifferrechnen ist daher die Fixierung des Kopfrechnens. Dadurch ist nicht ausgeschlossen, daß der Prozeß dieser zwei Rechenformen, des Kopf- und Zifferrechnens, welche beide in dem Oberbegriffe des Denkrechnens zusammenlaufen, nicht ein verschiedener sein werde. Der Kopfrechner gebraucht in der Vorstellung gar keine Zeichen oder Bilder, er denkt nur an die Zahl; der Zifferrechner denkt ebenfalls an die Zahl, fixiert jedoch dieselbe durch die Ziffer und operiert mit dieser nach bestimmten Zahlgesetzen. Verfährt der letztere dabei bewußtlos, ohne sich von den Gründen seiner Schritte Rechenschaft geben zu können, oder nach einem angelernten Regelwerke, so ist das Rechnen ein mechanisches oder ein Regelrechnen. Ursprünglich giebt es also nur ein Rechnen, das Denkrechnen, unter den zwei Formen des Kopfrechnens und des Zifferrechnens; eine Ausgeburt des letztern ist das mechanische, durch die Maschinerie eines eingeübten Regelwerkes hervorgehende Regelrechnen. Während sich das letztere in bestimmten Formen, nach fertigen Schematen und ausgeschnittenen Schablonen in der Zwangsjacke eines steifen Regelwerkes ohne Bewußtsein bewegt, ist der Denkrechner, insbesondere aber der Kopfrechner, freithätig, und an der Hand der in ihm liegenden Denkgesetze bahnt er sich nach eigener Wahl den geraden, wenn auch manchmal steilen Weg zum Ziele. Das soll aber nicht so verstanden sein, daß für das schriftliche, für das Zifferrechnen gar keine feste Form bestehen dürfe; im Gegenteil muß, wenn anders im

Rechnen Fertigkeit in Verbindung mit Sicherheit erzielt werden soll, alles schriftliche Rechnen nach festen Formen geschehen, jedoch so, daß sich der Rechner in ihnen mit Bewußtsein und Überzeugung bewegen kann." [9])

Was diese drei hervorragenden Rechenmethodiker über mündliches und schriftliches Rechnen und das Verhältnis beider zueinander hier sagen, das findet man in allen neuern Rechenwerken, sofern dieselben den Gegenstand überhaupt berühren, wieder. Höchstens einige unwesentliche Zusätze und Abänderungen kommen da und dort noch vor. Und so ist es auch nicht nötig, den obigen Anführungen noch andere hinzuzufügen. Daß die neuere Volksschulgesetzgebung aber dem Gegenstande ebenfalls große Aufmerksamkeit widmet, ergiebt sich aus den im zweiten Abschnitte mitgeteilten Auszügen.[10]) Insbesondere wird da der enge Zusammenhang zwischen beiden Formen des Rechnens betont und gefordert, daß das mündliche stets dem schriftlichen Rechnen vorausgehe. So heißt es z. B. in den preußischen Bestimmungen: „Auf der Unterstufe wird in der Schule mit einem oder zwei Lehrern, soweit es sein kann, in der mehrklassigen Schule regelmäßig nur im Kopfe gerechnet. Bei Einführung einer neuen Rechnungsart geht auf allen Stufen das Kopfrechnen dem Tafelrechnen voran." [11]) Für die Volksschulen des Königreichs Sachsen aber lautet die entsprechende Bestimmung: „Mündliches und schriftliches Rechnen sind in Verbindung zu betreiben. Bei schriftlichen Berechnungen ist auf Sorgfalt der Ausführung streng zu halten." [12]) Ähnliches besagen die Bestimmungen für die Volksschulen der übrigen deutschen Staaten.

Aus alledem geht nun jedenfalls deutlich hervor: Die wertvollere Form des Volksschulrechnens ist das mündliche Rechnen. Aber das kann schließlich auch nicht überraschen. Denn wenn alles Rechnen Denkrechnen sein soll, so erscheint das mündliche Rechnen als die naturgemäßeste Form desselben, weil es sich des nächstliegenden Darstellungsmittels, der Sprache, bedient, um die Denkergebnisse zum Ausdrucke zu bringen. Dazu kommt noch dieses. Was vom Schüler nicht in Worte gefaßt werden kann, das hat in demselben auch noch nicht denjenigen Klarheitsgrad erreicht, welcher der schriftlichen Darstellung vorausgehen muß. Deshalb liegt es auch sehr nahe, das mündliche Rechnen als Vorstufe des schriftlichen zu betrachten.

In doppeltem Sinne geschieht dieses bekanntlich: einmal auf der Unterstufe, wo alles Rechnen mündliches oder Kopfrechnen ist, wo auch jede schriftliche Darstellung nach Inhalt und Form nur eine getreue Wiedergabe dessen, was sich unmittelbar vorher in den Gedanken des Kindes vollzog, sein soll; sodann auf der Mittel- und Oberstufe, sobald eine neue Einheit beginnt, gleichviel ob dieselbe dem Gebiete des theore-

9) Schellen a. a. O. Vorwort zur ersten Auflage, Punkt 7.
10) Vergl. S. 210 f.
11) Allgem. Best. a. a. O. S. 17.
12) Kockel a. a. O. S. 66.

tischen oder praktischen Rechnens angehört. Da soll das mündliche Rechnen insbesondere unter Annahme kleinerer oder bequemerer Zahlen das Verständnis des Neuen vorbereiten helfen. Es hat mithin die erste Formalstufe vor allen andern als Kopfrechenstufe zu gelten.

Doch auch um seiner selbst willen ist das Kopfrechnen höher als das Tafelrechnen zu stellen. Denn: „Das Kopfrechnen wird ohne Buch (Schülerheft), ohne Benutzung von Schreibmaterialien geübt. Der Lehrer stellt die Aufgabe, alle Schüler hängen mit ihren Augen an seinen Lippen, um die Aufgaben richtig zu erfassen und sofort in die Arbeit zu treten. Das Kopfrechnen stärkt die Zahlkraft, das Gedächtnis; es spornt und strengt die Geistesthätigkeit so an, daß Zerstreutheit, Schlaffheit und Trägheit fern gehalten werden. So hat das Kopfrechnen einen großen Einfluß auf die geistige Entwickelung der Schüler. Auch im praktischen Leben hat es eine große Bedeutung, weil es hier meist darauf ankommt, Berechnungen des geschäftlichen Tages- und Marktverkehrs ohne schriftliche Aufzeichnung oder nach Art der schriftlichen Beschäftigung zu vollziehen.“ [13]) Und bei Steuer heißt es: „Das freie, lebendige Wort des Lehrers, das augenblickliche Erfassen der Aufgabe, deren Verständnis durch den Ton, den der Lehrer hineinlegt, erleichtert wird, das sofortige Eintreten in die Arbeit, zu dem der Schüler genötigt ist, das schnelle Abwägen der Vorteile, die Kräftigung des Zahlengedächtnisses durch das Behalten der Aufgabe und der Zahlen der Rechnung, das sind ausschließlich Vorzüge des Kopfrechenunterrichts.“ [14])

Wenn nun aber auch dem mündlichen Rechnen der Vorrang vor dem schriftlichen in doppelter Beziehung gebührt, so fehlen dem schriftlichen Rechnen doch auch seine eigentümlichen Vorzüge nicht. Dasselbe läßt sich auf Zahlen jeder Art, große und kleine, bequeme und unbequeme, anwenden, und es ist auch gleichgiltig, ob dieselben in einfachen oder zusammengesetzten Aufgaben vorkommen. Dadurch, daß das Auge mitrechnet, entsteht eine im ganzen größere Sicherheit als beim mündlichen Rechnen. Auch ist die Kontrolle wesentlich durch die auf unserm Zahlsysteme oder andern festen Bestimmungen beruhende Schreibung erleichtert. Und nicht nur der Rechner selbst, sondern jeder andere vermag diese Kontrolle sofort oder später auszuführen.

Von besonderm Werte ist jedenfalls diejenige Verschmelzung des mündlichen und schriftlichen Rechnens, nach welcher bei ein und derselben Aufgabe jedes Verfahren stets da einsetzt, wo es die größern Vorteile zu bieten vermag. Selbstverständlich gehören zur vollen Ausbeutung solcher Verwendungen geübtere Rechner. Aber auch schon von vornherein kann viel in dieser Richtung geschehen, wenn man als Regel festhält: Alles, was im Kopfe gerechnet werden kann, darf nicht schriftlich ausgeführt werden! —

13) Büttner a. a. O. S. 25.
14) Steuer a. a. O. S. 76.

Wir schließen damit unsere allgemeinen Darlegungen über die beiden Hauptformen des Volksschulrechnens und fassen die bemerkenswertesten Ergebnisse derselben in folgende acht Sätze kurz zusammen:

1) Es giebt nur eine Art des Rechnens, nämlich das Denkrechnen; mündliches und schriftliches Rechnen sind die beiden Formen desselben.

2) Das mündliche Rechnen vollzieht sich in der Regel ohne Beihilfe von Zahlzeichen (Ziffern 2c.); das schriftliche Rechnen hingegen fordert dieselben stets.

3) Das mündliche Rechnen kommt vorzugsweise bei kleinen oder bequemen, das schriftliche Rechnen bei großen und unbequemen Zahlen zur Anwendung.

4) Doch nicht durch die Zahlen an sich, sondern durch die Art und Weise, wie man mit ihnen operiert, unterscheidet sich das mündliche von dem schriftlichen Rechnen: beim mündlichen Rechnen wird stets mit dem vollen Werte der Zahlen operiert, beim schriftlichen Rechnen aber mit dem Stellenwerte derselben.[15])

5) Beim mündlichen Rechnen hängt der Gang der Ausrechnung von dem Belieben und der Befähigung des Rechners ab, beim schriftlichen Rechnen müssen bestimmte Folgen und Formen von allen Rechnern eingehalten werden.

6) Der höhere Bildungswert ist auf Seiten des mündlichen Rechnens; größere Sicherheit hingegen kommt dem schriftlichen Rechnen zu.

7) Auf der Unterstufe der Volksschule ist nur das mündliche Rechnen zulässig, und die schriftlichen Darstellungen dürfen hier nichts anderes als eine Wiedergabe desselben sein; auf der Mittelstufe erfolgt die Einführung des schriftlichen Rechnens, doch geht hier (wie auch auf der Oberstufe) das mündliche Rechnen dem schriftlichen stets voraus, wenn neue Rechenfälle behandelt werden.

8) Oberster Grundsatz muß sein: Was durch mündliches Rechnen gelöst werden kann, das darf nicht schriftlich behandelt werden!

Die Beachtung des letzten Grundsatzes führt auf eine Verschmelzung, beziehentlich Abwechslung des mündlichen mit dem schriftlichen Rechnen, welche insbesondere für das praktische Rechnen auf der Oberstufe von großer Bedeutung ist.

b) Drei unerläßliche Forderungen.

Von allen Darstellungsformen ist zu fordern, daß sie

a) mathematisch und sprachlich richtig,

---

15) d. h. die Ziffern der verschiedenen Stellen werden während des Rechnens wie Einer behandelt, und ihr voller Wert ergiebt sich aus ihrer richtigen gegenseitigen Stellung. Vergl. S. 10 ff.

b) kurz und bestimmt,

c) der kindlichen Fassungskraft angemessen

sind. Was das heißt, soll an einigen Beispielen erläutert werden.

Wenn Schneyer in seinen (übrigens trefflichen) Rechenheften unter anderm setzt:[16])

$$9 + 4 = 9 + 1 = 10 + 3 = 13$$

und

$$92 - 28 = 92 - 20 = 72 - 2 = 70 - 6 = 64,$$

so ist das eine Darstellungsform, welcher die mathematische Richtigkeit abgeht, gleichviel, ob sie als mündliche oder schriftliche Darstellungsform betrachtet wird. Denn auch beim mündlichen Vorrechnen kann durch gewisse Pausen und Betonungen nur scheinbar etwas geändert werden. Es hätte hier gesetzt werden müssen:

$$9 + 4 = 9 + 1 + 3 = 10 + 3 = 13$$

und

$$92 - 28 = 92 - 20 - 8 = 72 - 2 - 6 = 70 - 6 = 64.$$

Wenn man in vielen Rechenwerken noch jetzt die Ausdrücke findet: „fünfmal größer oder kleiner" (auch: „fünfmal mehr oder weniger") anstatt: „fünfmal so groß oder so klein" (oder: „fünfmal so viel oder so wenig"), so ist das nicht nur mathematisch, sondern auch sprachlich unrichtig.

Wenn Schützes Schüler „merken" soll:[17]) „Ist einer der beiden Divisionsteile ein Dezimalbruch, so machen wir ihn durch Weglassung des Komma zu einer ganzen Zahl, hängen dafür dem andern Divisionsteile soviele Nullen an, als der Dezimalbruch Stellen gehabt hatte, und nehmen hierauf die Division vor" — und wenn danach zu rechnen ist:

$$0{,}42 : 312 = 42 : 31200;$$

so kann man das weder kurz noch bestimmt nennen.

Und wenn Lincke z. B. fragt:[18]) „Wieviel ist: a. (8 . 12) : 4? — Wieviel ist aber 8 . (12 : 4)? Und wieviel ist (8 : 4) . 12? b. (16 . 24) : 8? — Wieviel ist aber 16 . (24 : 8)? Und wieviel ist (16 : 8) . 24? — Welche Regel folgt hieraus?" — der Schüler einer Mittelklasse der Volksschule aber daraus die Regel ableiten soll: „Ein Produkt aus zwei (oder mehreren) Faktoren kann durch eine ganze Zahl dividiert werden, indem man bloß einen Faktor durch die ganze Zahl dividiert und diesen Quotienten mit dem (oder den) andern Faktor (Faktoren) multipliziert," — so muß das, abgesehen von manchem andern, als ein grober Verstoß gegen die dritte der obigen Forderungen bezeichnet werden, denn dergleichen übersteigt die Fassungskraft jedes normal befähigten 9- bis 10jährigen Kindes.

---

16) Schneyer a. a. O. Heft II. Übung 29 und 57.
17) Schütze a. a. O. S. 152.
18) Lincke a. a. O. 2. Teil. S. 86.

§ 25.

Die mündlichen Darstellungsformen.

Litteratur. Allgemeine Bestimmungen ꝛc. Büttner, E. Anleitung. Griesmann, J. A. Der Rechenunterricht in der Volksschule. Hartmann-Ruhsam, Rechenbuch (Schüler- und Lehrerhefte). Hartmann, Edm. Anleitung zur Behandlung des elementaren Rechenunterrichts mit reinen Zahlen. Gießen 1891. Kallius, A. Die vier Spezies in ganzen Zahlen. Oldenburg 1889. Kehr, K. Praxis der Volksschule. 7. Aufl. Gotha 1875. Mittenzwey, L. Die Darstellungsformen im Rechnen. Sanders, D. Wörterbuch der Hauptschwierigkeiten in der deutschen Sprache. Berlin 1887. Schröter, R. Aufgaben zum Kopfrechnen. 2 Teile. Wittenberg 1889. Schurig, K. Hilfsbuch beim Zifferrechnen. Leipzig 1890. Wedemann, W. Theoretisch-praktische Rechnen-Schule. 3 Teile. Erfurt 1844. Unger-Krusche, Leitfaden. Hierüber: Rechenhefte von Backhaus, Gasser, Heuer-Magnus, Kaselitz, Kentenich, Schröter, Steuer u. a. Außerdem die methodischen Schriften der Genannten u. a. Vergl. Litteraturübersicht § 16.

Hier mögen zunächst einige Bemerkungen über solche Ausdrücke einen Platz finden, welche in unserm „Rechenbuche" (abweichend von andern Rechenwerken) gebracht werden. Schon der Name „Rechenbuch" will beachtet sein. Denn derselbe besagt jedenfalls mehr als „Rechenheft", „Aufgabenheft", „Rechenübungen" u. dgl. m. Indem es von vorn herein in unserer Absicht lag, neben den eigentlichen Aufgaben auch diejenigen Übungen, die das Normalverfahren zur Auflösung einer Gruppe von Aufgaben vorbereiten, notwendige Erklärungen, Lösungen von Musteraufgaben, fortlaufende Übungen u. a. zu bieten, durften wir diesen Namen wohl wählen.

Bei den ersten Rechenstufen hieß es in der ersten Auflage des „Rechenbuches" nicht Zahlenraum, sondern Zahlraum, da letzteres sprachlich richtiger ist. Von der zweiten Auflage ab haben wir aber auch diesen Ausdruck fallen lassen, da er sachlich ungenau ist. Wohl hat es einen Sinn in der höhern Mathematik, welche neben den ganzen, dezimalen und gebrochenen noch positive und negative, rationale und irrationale, reelle und imaginäre, einfache und komplexe Zahlen unterscheidet, von einem Zahlraume zu reden, da diese Zahlen thatsächlich des Raumes bedürfen, um untergebracht zu werden; für das Volksschulrechnen aber liegt ein solches Bedürfnis nicht vor, dessen Zahlen bringt man alle auf einer Linie unter. Spricht man doch auch nicht von einem „natürlichen Zahlraume", sondern von einer „natürlichen Zahlreihe". Und so erscheint die Bezeichnung Zahlreihe (nicht Zahlenreihe), welche wir neuerdings ausnahmslos gebrauchen, als die entsprechendste. In manchen Rechenwerken begegnen wir auch der Bezeichnung „Zahlenkreis".[1] Daß dieselbe sachlich falsch ist, folgt einfach aus der Natur des Kreises. Der Kreis ist eine geschlossene krumme Linie, deren sämtliche

1) So z. B. bei Backhaus, Heuer-Magnus, Steuer, Kaselitz, Kentenich, Schröter, Gasser u. a.

Punkte gleichweit von einem innern Punkte entfernt sind, während die Zahlen 1 bis 10, 1 bis 100 2c. doch nur als Anfänge einer Reihe, also in einer geraden Linie, und ohne einen solchen Beziehungspunkt auftreten. Besser ist der Name „Zahlengebiet“ (richtiger Zahlgebiet), welcher auch mehrfach gebraucht wird. Doch leidet derselbe an einer Unbestimmtheit, als daß man ihn empfehlen könnte.

Wir teilen die Zahlen in ganze, dezimale und gebrochene ein; die beiden letzten Arten aber nennt das Rechenbuch Dezimalzahlen, also nicht Dezimalbrüche, und Bruchzahlen, also nicht Brüche. Der Name Dezimalzahl geht aus unserer Auffassung, die oben eingehend dargelegt wurde,[2]) hervor; der Name Bruchzahl will ausdrücklich daran erinnern, daß wir es auch hier nur mit einer besondern Art von Zahlen zu thun haben, nämlich mit Zahlen, deren Einheiten aliquote Teile der Einheit der ganzen Zahlen sind.

Ferner ziehen wir den Namen Zehner dem Namen Zig vor, einmal, um nicht nötig zu haben, früher oder später den letztern wieder aufgeben zu müssen, dann weil der Name „Zehner“ auch an sich der bessere ist. Er giebt dem Kinde den Inhalt der Zahl an, während der Name „Zig“ eigentlich nur durch seinen Klang einige Hilfe leistet.[3])

Auch ist zu bemerken, daß es nach den Bestimmungen der neuern Rechtschreibung nicht Hundertel, Tausendtel 2c. heißen darf, sondern Hundertstel, Tausendstel 2c.

Auf nicht wenige sprachliche Unrichtigkeiten trifft man besonders dann, wenn der Plural von Maßnamen gebraucht wird. In solchen Fällen sollte man nicht versäumen, bei einer anerkannten Autorität auf sprachlichem Gebiete sich Rats zu erholen. Als eine solche darf jedenfalls Sanders angesprochen werden. Dieser aber bemerkt folgendes über den Plural bei Maßen: „Maßbestimmende Hauptwörter stehen als solche im allgemeinen nach Hauptzahlen im zusammenfassenden Sinne flexionslos in der Form der Einzahl, vergl.: Stelle 2 Flaschen und 6 Gläser auf den Tisch; doch als Maß: Die Flasche hält 6 Glas Wein, d. h. den sechsfachen Inhalt eines Glases 2c.“ Deshalb muß es auch heißen: 4 Blatt Papier, 2 Grad kälter, 7 Mandel Käse, 8 Mann Soldaten, 12 Stück Äpfel u. s. w. Dagegen haben flektiert aufzutreten: a) die maßbestimmenden Hauptwörter weiblichen Geschlechts, welche auf ein tonloses e ausgehen, z. B. Meile, Elle, Linie, Woche, Stunde, Minute, Sekunde u. s. w. Dazu Million, Billion, Milliarde u. a.; b) Fremdwörter, deren Mehrzahl nach den Gesetzen der fremden Sprache gebildet wird, z. B. 8 francs, 10 centimes 2c. Aber: auch 3 Lire, 5 Soldi, 10000 Talente, 2 Legionen 2c. Hierüber: c) Die Ausdrücke des Zeitmaßes, auch wenn es keine weiblichen Hauptwörter sind, die auf e auslauten; dieselben werden überwiegend flektiert, namentlich im Dativ nach Präpositionen, wenn es auch nicht gerade falsch ist, sie nicht zu flektieren.[4])

---

2) Vergl. S. 131 ff.
3) Vergl. S. 265.
4) Sander a. a. O. S. 228 f.

Hiernach hat sich die Pluralbildung derjenigen Hauptwörter, welche in unserm dezimalen Münz-, Maß- und Gewichtssysteme Verwendung gefunden haben, mit einer einzigen Ausnahme (Tonne) nach der Hauptregel zu richten, d. h. es ist die Form der Einzahl beizubehalten: 25 Pfennig, 15 Gramm, 8 Hektar u. s. w. Ein gleiches gilt für Ries und Bogen, Gros, Dutzend, Schock, Mandel, Stück, Grad u. s. w. Dagegen haben außer Tonne noch flektiert aufzutreten: Woche, Stunde, Minute, Sekunde, während Jahr, Monat und Tag flektiert und unflektiert vorkommen dürfen.

Wir wissen recht wohl, daß davon Sicherheit und Fertigkeit im Rechnen nicht abhängen. Aber wenn z. B. die Preußischen „Allgemeinen Bestimmungen" ausdrücklich fordern: „Das Rechnen ist auf allen Stufen als eine Übung im klaren Denken und richtigen Sprechen zu betreiben" —[5]) so dürfen auch die ebenerwähnten Sprachformen nicht übersehen werden.

Das ist auch Kentenichs und Frohns Meinung, wenn sie in ihrem Handbuche fordern: „Im Rechenunterrichte ist auf vollständig genauen und bestimmten Ausdruck ein entschiedener Wert zu legen." Denn: „a) Wie aller Unterricht Sprechunterricht ist, so auch der Rechenunterricht. b) Der Erfolg des Unterrichts ist durch das Sprechen bedingt. c) Die feststehenden und oft wiederkehrenden Formen machen die Rücksicht auf den Ausdruck besonders notwendig. d) Die Forderung, auf ein richtiges Sprechen der Schüler zu achten, ist begründet in der Natur des Gegenstandes." Und deshalb: „Man achte also stets auf lautreines und richtiges Sprechen. Bei den Entwickelungen lasse man die Schüler auf allen Stufen in vollständigen Sätzen sprechen. Nur wo es sich um Erzielung der Rechenfertigkeit handelt, also beim Schnellrechnen, darf von den Antworten in vollständigen Sätzen abgesehen werden. Auf der Mittel- und besonders auf der Oberstufe sind die zusammenhängenden Lösungen angewandter Aufgaben ein vorzügliches Mittel, die Sprachfertigkeit der Schüler zu fördern. Sind die angewandten Aufgaben richtig behandelt worden, so müssen sich die zusammenhängenden Lösungen darstellen wie kleine Aufsätze mit deutlich erkennbarer Gedankenordnung."[6])

Die Zahl der Verstöße gegen das richtige Sprechen, sowie der Fälle, in denen Schwankungen vorkommen, ist aber keine kleine, und nicht immer findet man darüber Belehrung, wo man sie glaubt finden zu müssen, nämlich bei den Grammatikern. Das liegt zum Teile mit daran, daß die Mathematik mit manchen Wörtern nicht denselben oder doch nicht den vollen Begriff verbindet, der sonst mit ihnen verbunden wird. Um so mehr scheint es daher geboten, hier noch eine Zusammenstellung der häufigsten Verstöße und Schwankungen folgen zu lassen.[7])

---

5) Allg. Best. a. a. O. S. 17.
6) Kentenich-Frohn a. a. O. S. 35 f.
7) Vergl. hierüber: Kentenich-Frohn, Mittenzwey, Büttner, Schröter, Lang rc. a. a. O.

Abkürzungen im Ausdrucke sind nur statthaft, wenn sprachliche und mathematische Richtigkeit gewahrt bleiben. Benennungen z. B. dürfen nicht beliebig weggelassen werden.

abschlägig und **abschläglich** bedeuten dasselbe. Beispiel: Eine Geldsumme abschlägig oder abschläglich zahlen.

Benennungen müssen stets in der vorgeschriebenen Form gebraucht werden. Besonders die Pluralbildung ist zu beachten. Vergl. oben S. 373.

bezahlt und gezahlt ist zweierlei. Eine Ware wird bezahlt (von bezahlen), das Geld wird gezahlt (von zahlen).

borgen, welchen Ausdruck man gewöhnlich noch in der Subtraktion gebraucht, ersetzt man besser durch verwandeln. Beispiel: 3 weniger 8 geht nicht; wir verwandeln einen Zehner in Einer 2c.

Bruch, Bruchzahl und **gebrochene Zahl** bedeuten zwar dasselbe, der Name Bruchzahl verdient aber den Vorzug. Vergl. S. 248.

Bruchansatz ist bestimmter als Bruchsatz.

Bruchdivisionen, in denen der Divisor eine Bruchzahl ist, werden am zweckmäßigsten als Messungen aufgefaßt.

Casus s. **Kasus**.

Comparative s. **Komparative**.

Dativ (der) ist stets mit „gleich" zu verbinden, dagegen nicht mit „und", „weniger" und „mal", welche einen Kasus überhaupt nicht regieren. Nur wenn ein den Dativ regierendes Wort hinzutritt, ist das scheinbar nicht so. Beispiel: Welche Zahl erhält man aus dem Fünffachen weniger dem Zweifachen von 9?

Dezimalzahl und **Dezimalbruch** bedeuten nach unserer Auffassung nicht dasselbe. Vergl. S. 248.

durch kann nicht durch **mit** in der Division ersetzt werden. Es muß heißen: „dividiert durch" und nicht „dividiert mit". Vgl. Operationswörter.

Einzahl und **Mehrzahl** müssen genau unterschieden werden; insbesondere hat sich das Prädikat stets nach dem Subjekte zu richten. Beispiele: 1 kg kostet; 3 kg kosten; 2 cbm Wasser wiegen mehr als 2 cbm Eis 2c. Ausnahmen kommen beim Zeitworte „sein" vor.

Enthaltensein ist ein weniger guter Ausdruck als messen, da er sich sprachlich nicht so wie dieser an Dividieren anschließt.

Faktorenvertauschung ist nicht ohne weiteres zu gestatten. Es darf z. B. nicht heißen: „Wenn ein 1 kg 28 ₰ kosten, so kosten 50 kg 50 ₰ mal 28." Will man um des Rechenvorteils willen nicht auf die Vertauschung verzichten, so sage man: „Wenn 1 kg 28 ₰ kostet, so kosten 50 kg 28 ₰ mal 50 oder, was dasselbe giebt, 50 ₰ mal 28".

Flickwörter, welche die Schüler beim Vorrechnen gern einschieben, dulde man nicht. Besonders diejenigen, welche sich um das eigene „Ich" gruppieren und die „und" merze man aus.

Gemischt tritt als Gegensatz zu „rein" z. B. in den Verbindungen gemischte Zahl ($4\frac{3}{4}$) und gemischte Periode (3,5766 . . .) auf.

Genitiv (der) ist bei Hauptwörtern anzuwenden, die keine Maßnamen sind, sobald eine Bruchzahl vorkommt. Beispiel: Drei Viertel des Feldes wurde mit Roggen bestellt.

gezahlt und bezahlt s. o.

gleich regiert den Dativ. Dasselbe darf nicht mit einem Zeitworte verbunden werden, z. B. nicht mit „kosten". Beispiel: 6 kg kosten gleich 1,25 ℳ mal 6. Nur die Verbindung mit „sein" ist zuläßig.

Gleichheitszeichen (=) werden kurz „ist" oder „sind" gelesen. Vollständig würde es „ist gleich" oder „sind gleich" heißen. Bei unbenannten Zahlen gebraucht man „ist", bei benannten „sind". Beispiele: $3 + 4 = 7$ (ist 7); $3 \text{ m} + 4 \text{ m} = 7 \text{ m}$ (sind 7 m).

größer und **kleiner**, so **groß** und so **klein** s. u. **Komparative**.

Härten (sprachliche) sind zu vermeiden. Eine solche Härte liegt z. B. vor, wenn man sagt: „Der $\frac{3}{4}$te Teil", „der $3\frac{1}{5}$ Teil" 2c. Hier empfiehlt es sich, zu nehmen: „durch $\frac{4}{3}$", „durch $3\frac{1}{5}$" 2c.

heben und **aufheben** bezeichnen die betreffende Operation bei Bruchzahlen weniger gut als kürzen.

hineindividieren oder **hineinteilen** sind falsche Ausdrücke; gemeint ist messen (enthalten sein).

In oder **durch** kommen bei der Division vor, um aber den Divisior nicht vor den Dividenden setzen zu müssen, sagt man anstatt „in“ besser „gemessen durch“. Vergl. Operationswörter.

ist und **sind** werden häufig verwechselt, so z. B. beim Gleichheitszeichen (s. d.). Herrscht der Zahlbegriff vor, dann setzt man stets „ist“. Beispiele: 3 Mandel ist mehr als 2 Mandel; 6 ℳ ist mehr als 4 ℳ rc. 3 Mandel ist ebensoviel wie 45 Stück rc. Dagegen sagt man auch richtig: 3 Mandel sind 45 Stück; 1 Dutzend sind 12 Stück; 12 Stück sind 1 Dutzend rc.

jährig und **jährlich** besagt nicht dasselbe. Ersteres drückt eine Dauer, letzteres eine Wiederholung aus. Es giebt also „jährliche“, aber keine „jährigen“ Zinsen.

Kasusfehler werden häufig gemacht. Zu merken ist: Nach „ist“ und „sind“ steht der Nominativ, die Wörter „und“, „weniger“ und „mal“ regieren keinen Kasus. Nach „betragen“ und „kosten“ steht der Akkusativ (und nicht der Nominativ).

Komparative werden bei Multiplikationen und Divisionen in folgenden Ausdrücken vielfach falsch angewendet: größer und kleiner, länger und breiter, mehr und weniger rc. Beispiele: a) Falsch: Wenn 1 m 5 ℳ kostet, so kosten 4 m 4 mal mehr. Wenn 4 m 20 ℳ kosten, so kostet 1 m 4 mal weniger. b) Richtig: Wenn 1 m 5 ℳ kostet, so kosten 4 m 4 mal so viel. Wenn 4 m 20 ℳ kosten, so kostet 1 m 4 mal so wenig (oder besser: den 4. Teil). Es darf in allen diesen Fällen aber auch nicht „als“ anstatt „so“ gesetzt werden.

Kürze im Ausdrucke ist überall angebracht, nur da nicht, wo die Bestimmtheit darunter leidet.

kürzen ist den Ausdrücken heben und aufheben vorzuziehen.

Mal, das Operationswort der Multiplikation, wird im gewöhnlichen Sprachgebrauche zwar stets vor den Multiplikanden gesetzt, doch ist es mathematisch richtig, dasselbe nachzusetzen.

mehr und **weniger** s. u. Komparative.

Mehrzahl s. u. Einzahl.

mit darf nicht in der Division angewandt werden. Vergl. „durch“.

messen ist dem Ausdrucke „enthaltensein“ vorzuziehen.

Operationswörter der Grundrechnungsarten sind: und (+), weniger (—), mal (.) und durch (:). Das „und“ hat das „mehr (plus)“, welches bestimmter ist, verdrängt; „durch“ ist doppeldeutig und lautet bestimmter „geteilt durch“ oder „gemessen durch“. Man multipliziert „mit“ einer Zahl, aber man dividiert nicht „mit“, sondern „durch“ eine Zahl. Vergl. die einzelnen Operationswörter.

Prozent hat für gewöhnlich die Bedeutung „vom Hundert“, muß also in der Einzahl gebraucht werden. Also: Wieviel Prozent ist gewonnen worden? Wieviel Prozent Rabatt wird gewährt? rc. Falsch ist es auch, wenn man sagt: 100 ℳ bringen 4 Prozent. Es muß heißen: 100 ℳ bringen 4 ℳ.

Rein kommt als Gegensatz zu gemischt vor. Doch bedeutet „reine Zahl“ auch soviel wie „unbenannte Zahl“.

Relativsätze werden oft falsch mit „welches“ eingeleitet. Beispiel: 6 m, welches 6 mal 1 m ist. Hier muß es heißen: 6 m, welche 6 mal 1 m sind. Besser aber ist es, man vermeidet den Relativsatz ganz und setzt: 6 m oder 1 m mal 6.

Sein, das Hilfszeitwort, kommt in den beiden Formen „ist“ und „sind“ außerordentlich häufig vor, am häufigsten als Ausdruck für das Gleichheitszeichen (=). Vergl. Gleichheitszeichen, gleich, Ein- und Mehrzahl, ist und sind, Kasusfehler.

Teilen und **messen** sind die beiden Operationswörter, durch welche „dividieren“ wiedergegeben wird. Dieselben dürfen bei Aufgaben mit „benannten“ Zahlen nicht verwechselt werden. Man darf also z. B. nicht schließen: Wenn 1 l 10 ₰ kostet, so erhält man für 50 ₰ den 10. Teil von 50 ₰ = 5 l.

Übereinstimmung von Kasus und Numerus ist im allgemeinen festzuhalten. Vergl. Einzahl und Mehrzahl. Ausnahmen kommen aber vor bei „sein“ (s. o. „ist“ und „sind“) und wenn Subjekt und Prädikat Hauptwörter sind, z. B. 1 Mandel sind 15 Stück. (Doch ist auch richtig: 1 Mandel ist 15 Stück.)

und ist in Zahlwörtern nur zwischen Zehnern und Einern bei 21 bis 99 zu gebrauchen, bei gemischten Zahlen und Dezimalzahlen dient es zur bessern Unterscheidung der Bruchzahl und der

Dezimalstellen von dem Ganzen, bei mehrsortigen Zahlen ist es überflüssig.

Vertauschen und **verwechseln** besagen nicht dasselbe. Man darf Faktoren „vertauschen", aber nicht „verwechseln", denn letzteres bedeutete einen Irrtum.

vervielfachen und **vervielfältigen** bedeuten nicht dasselbe. Was „vervielfältigt" wird, erscheint in mehreren Stücken, was „vervielfacht" wird, als ein größeres Ganzes.

verwandeln s. u. **borgen.** Richtig gebraucht wird der Ausdruck auch bei Sortenverwandlungen.

Verwechslungen, welche oft vorkommen, sind folgende: Ein- und Mehrzahl (kosten, geben, betragen, sein), teilen und messen, kürzen und verkleinern, erweitern und vergrößern 2c.

viel ist bei Kollektivbegriffen, **viele** bei Gattungsbegriffen zu gebrauchen. Können Einzeldinge unterschieden werden, so setzt man „viele", ist dieses nicht der Fall, bilden sie ein Ganzes (eine Masse, feste Summe), so setzt man „viel". Beispiele: Viele Leute, Pferde, Häuser; viel Wald, Getreide, Geld.

Was wird als Fragwort oft mit wieviel verwechselt. Es darf nicht heißen: „Wenn 1 kg 75 ₰ kostet, was kosten dann 8 kg?" sondern wieviel kosten dann 8 kg?

Wechsel im Ausdrucke ist auch bei den Grundrechnungsarten gestattet. Das Nähere findet man beim dritten Schuljahre.

Weitschweifigkeiten s. u. **„Flickwörter".** Doch auch ohne letztere kann man weitschweifig werden, besonders bei Ausrechnungen. Ein Vorzug ist das in keinem Falle.

weniger wird oft falsch gebraucht; s. u. Dativ, Kasus, Komparative.

wieviel und **wieviele** sind in demselben Sinne wie „viel" und „viele" anzuwenden. Also: Wieviele Arbeiter, Bäume, Stück (Einzeldinge, welche unterscheidbar sind)? Wieviel Kilometer (Strecke), Kilogramm (Masse), Mark (Summe)?

Zahl und **Ziffer** werden oft verwechselt.

Zahllesen hat oft Sprachfehler und Verstümmelungen im Gefolge. S. u. „und" und „Zahlwörter".

Zahlordnungen bildet man auf „er", z. B. Zehner, Hunderter, Tausender. Da das aber etwas hart klingt, so darf man auch Hundert, Tausend 2c. (Mehrzahl: Hunderte, Tausende 2c.) gebrauchen.

Zahlwörter, welche oft falsch gebildet werden, sind: sechzehn, siebzehn, sechzig. Es darf also nicht gesetzt werden: sechszehn, siebenzehn, sechszig. Dagegen sind siebzig und siebenzig zulässig.

Zehner und **Zig** bedeuten dasselbe, doch verdient Zehner den Vorzug. Vergl. S. 265.

Auf einige der vorstehenden Punkte wird aus besondern Gründen weiter unten noch einmal zurückzukommen sein. Daß die sprachlich bez. mathematisch richtigen Formen sicheres Eigentum der Schüler werden müssen, ist selbstverständlich. Man erreicht dieses aber auch wie in andern ähnlichen Fällen sicher durch strenge Selbstbefolgung derselben und durch konsequente Gewöhnung der Kinder an dieselben von unten auf. Der Einwand, daß manche Formen für die Kinder zu schwer seien, ist hinfällig. Dasselbe wäre dann mit noch viel größerer Berechtigung von den Formen des Hochdeutschen überhaupt zu sagen, insofern da die Mundart eine Gegenwirkung ausübt, welche durch das Haus immer wieder gestärkt wird. Die Formen des Rechnens haben dergleichen nicht zu befürchten. Daß aber die Kinder, welche mit dem Rechnen beim Eintritte in die Schule erst beginnen, mit den unrichtigen Formen besser als mit den richtigen rechnen lernten, sollte von Pädagogen doch lieber nicht gesagt werden. Denn dann fragt man billig: Wozu die Schule?

Anschließend erwähnen wollen wir hier noch, daß wir die Bezeichnungen Resolution und Reduktion wegen der entgegengesetzten Bedeutung, die man ihnen in Nord- und Süddeutschland beilegt, durch die deutschen Ausdrücke Erweitern und Einrichten, beziehentlich Kürzen ersetzt haben. Die mancherlei Namen, mit welchen gewisse besondere Fälle der Schluß- und Prozentrechnung gewöhnlich belegt werden, haben wir ganz fallen lassen, da sie ein durchaus unnötiger Ballast sind. Auch sonst waren wir sparsam in der Verwendung von Kunstausdrücken. Indessen geht unsere Meinung doch nicht dahin, daß alle bislang im Rechenunterrichte gebrauchten Fremdwörter notwendig durch deutsche Wörter ersetzt werden müßten. Das mag dann geschehen, wenn letztere den Begriff der Fremdwörter vollständig und in knapper Form wiedergeben; andernfalls darf das Fremdwort auch in der Volksschule beibehalten werden, wenn nur die Sache, die es bezeichnet, dem Kinde recht klar geworden ist. Es mögen also immerhin die vier Grundrechnungsarten ihre lateinischen Namen behalten, auch mag es bei Prozent, Kapital, Dezimalstellen u. s. w. verbleiben. Das macht die Sache nicht schwieriger, als sie ist. Hat sich doch, als man versuchte, die fremden Namen Meter durch Stab, Centimeter durch Neuzoll, Millimeter durch Strich u. s. w. zu verdeutschen, das Merkwürdige ereignet, daß das Volk diese Verdeutschung ablehnte. Dagegen sind wir durchaus dafür, daß in der deutschen Volksschule an Stelle von addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren die deutschen Zeitwörter, zuzählen, abzählen, malnehmen und teilen beziehentlich messen treten, daß man nicht Differenz, sondern Unterschied bez. Rest sagt, daß es nicht Fazit, sondern Ergebnis, nicht Regeldetri, sondern Schlußrechnung u. dgl. m. heißt. Die mancherlei kaufmännischen Ausdrücke freilich, die lassen sich nicht umgehen, es sei denn, daß man auf die Anfänge des kaufmännischen Rechnens überhaupt verzichten wollte. Auch in der Raumrechnung begegnen wir einer Anzahl nicht zu beseitigender Fremdwörter.

Doch es ist heutzutage üblich, jedes entbehrliche Fremdwort zu beseitigen, und so geben auch wir noch eine Übersicht, welche in stand setzt, für den eigenen Gebrauch eine zweckmäßige Wahl zu treffen. Wir thun dieses in der Reihenfolge der Grundrechnungsarten (I. II. III. IV.) und geben unter a) die eingebürgerten, unter b) die durch ein empfehlenswertes deutsches (oder eingebürgertes) Wort wiederzugebenden und unter c) die weniger gut zu verdeutschenden Fremdwörter.

I. a) Posten, Summe; b) addieren = zuzählen (zusammenzählen), Summanden = Posten, Addenden = Posten; c) Addition = das Zuzählen (Zusammenzählen).

II. a) Rest; b) subtrahieren = abzählen (abziehen), Differenz = Unterschied; c) Subtraktion = das Abzählen (Abziehen), Subtrahend = Abzugszahl, Minuend = Vollzahl.

III. a) —; b) multiplizieren = malnehmen (vervielfachen); c) Multiplikation = das Malnehmen (Vervielfachen); Multiplikand = Vervielfachungszahl, Multiplikator = Vervielfacher, Produkt = das Vielfache, Faktoren = Vervielfachungszahlen.

IV. a) —; b) dividieren = teilen und messen; c) Dividend = das Ganze, Divisor = Teiler und Maß, Quotient = Teil und Maßzahl.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehen wir zu denjenigen mündlichen Darstellungsformen über, welche im Verkehre des Lehrers mit den Schülern während der Rechenstunden einzuhalten sind, sofern der Rechenunterricht seinen vollen Bildungswert als Formenunterricht entfalten soll.

a) Erstes Schuljahr.

Gleich von vorn herein ist streng auf deutliche und reine Aussprache der Zahlwörter und der die Operationen begleitenden Wörter zu halten. Insbesondere wollen beachtet sein: vier, fünf, sieben, neun, und, ist, sind. Versäumt man hier etwas, so wird die schlechte Aussprache als Erbteil mit in die folgende Klasse genommen, und schließlich ist sie so sehr zur Gewohnheit geworden, daß sich Ohr und Mund gleichgiltig dagegen verhalten. — Ein anderes wichtiges Erfordernis ist, daß die Kinder in vollständigen und richtigen Sätzen antworten. Mag das anfangs auch den Unterricht aufhalten, der Gewinn zeigt sich schon mit der Zeit in der Förderung, welche die Denk- und Sprechthätigkeit der Kleinen überhaupt erfährt. Wohl ist es richtig, daß im Rechenunterrichte auf kurze und bestimmte Darstellungsformen zu halten ist; damit sind indessen keine unvollständigen Sätze gemeint. Mit Abkürzungen soll man überhaupt stets nur schließen, niemals beginnen, denn jede Abkürzung gehört in das Gebiet des Verbalismus, wenn sie nicht vom Kinde selbstthätig aus dem zugehörigen vollständigen Gedanken abgeleitet worden ist. Überhaupt aber gilt, wie für den gesamten Rechenunterricht, so doch ganz besonders für das grundlegende erste Schuljahr Kehrs Forderung: „Jede Rechenstunde soll eine Sprechstunde sein!“ Denn: „Ob der Lehrer im Unterrichte weiter schreiten, oder ob er bei dem behandelten Stoffe länger verweilen muß, hängt von dem erlangten Verständnisse der Schüler und der erworbenen Sicherheit und Fertigkeit ab. Das Verständnis giebt sich aber in erster Linie durch die Sprache kund. Aus der Sprechweise, aus der Art der mündlichen Darstellung kann der Lehrer einen Schluß auf den Grad ihres Verständnisses machen. Ist diese unklar und unbestimmt, unbeholfen und stockend, breit und weitschweifig, ‚ohne Farbe und Accent‘, so ist das ein sicheres Kennzeichen, daß Einsicht und Verständnis fehlen. Das Wort giebt dem Gedanken die Form und macht ihn objektiv. Ist also der Gedanke klar, so wird ihn auch das Kind in klaren, bestimmten Worten aussprechen können, und umgekehrt. Absurd ist die Entschuldigung, etwas deutlich verstanden zu haben, ohne es aussprechen zu können; denn wortarm ist unsere Sprache nicht, sie hat Worte für jeden Gedanken, für jede Vorstellung.“ [8])

Was insbesondere die Lösung der Aufgaben betrifft, so giebt es jetzt und später stets zwei Formen derselben: a) mit und b) ohne Wieder-

8) Kehr a. a. O. S. 241.

holung der Aufgabe. Die erste Form ist selbstverständlich die wichtigere; sie kann als die Normalform des ersten Schuljahres bezeichnet werden: Sie ist daher auch immer zunächst und am häufigsten zu verwenden. Die zweite Form darf nur bei solchen Stoffen, welche den Kindern in der ersten Form bereits geläufig sind, zur Anwendung kommen, insbesondere dann, wenn das Rechnen als Schnellrechnen auftritt.

Ob die Kinder eine Aufgabe ihrer Form nach richtig aufgefaßt haben, das erkennt man namentlich auch daran, daß sie imstande sind, selbst ähnliche Aufgaben zu bilden. Daher ist diese Übung auf der fünften Formalstufe niemals zu versäumen.[4]) Es geschieht diese Aufgabenbildung zweckmäßig in der Weise, daß abwechselnd je ein Kind die Aufgabe stellt und das folgende dieselbe löst.

Als eine Form der mündlichen Darstellung darf auch das Chorrechnen gelten. Chorsprechen ist jetzt wohl in allen Schulen zu finden, vielleicht auch Chorzählen. Dagegen wird man Chorrechnen seltener antreffen. Vielleicht vermeidet man es da und dort absichtlich, weil man meint, es sei ein schädlicher Mechanismus. Die Gefahr, daß es zu einem solchen werde, ist allerdings vorhanden; doch kann sie gewiß dadurch vermieden werden, daß man das Chorrechnen nur bei solchen Stoffen einsetzen läßt, welche von den Kindern beherrscht werden. Als ganz besonders geeignet dürfen alle Reihenaufgaben gelten, wie z. B. $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$ 2c., da bei diesen das Chorsprechen taktmäßig verlaufen kann.

Mit dem Chorrechnen nicht zu verwechseln ist das Taktrechnen. Dasselbe ist zweifellos eine besonders wichtige Form des mündlichen Rechnens. Bei demselben sagt der Lehrer alle Zahlen der Aufgabe unter Voranstellung der Operation innerhalb gleicher Zeitabschnitte (taktmäßig) einzeln vor. Die Kinder rechnen stillschweigend im Kopfe nach. Dabei wird entweder nach jeder Zahl auf ein bestimmtes Zeichen hin das fortschreitende Ergebnis von einem oder allen Kindern (im Chore) gesagt, oder es wird ohne Unterbrechung bis zu Ende gerechnet und nur das Gesamtergebnis ausgesprochen, beziehentlich aufgeschrieben. Diese letzterwähnte Form des Taktrechnens namentlich bietet ein einfaches Mittel, die Schüler einer ganzen Klasse in möglichst kurzer Zeit auf ihre Rechenfertigkeit zu prüfen. Daß jedes Taktrechnen die kleinen Rechner in eine scharfe geistige Zucht nimmt, liegt nahe. Auch leuchtet sofort ein, daß die Anforderungen, welche es an den Schüler stellt, in mehr als einer Hinsicht einer Steigerung fähig sind. So kann das Taktrechnen in immer kürzern Zwischenzeiten fortschreiten, die Reihe der Glieder kann eine größere werden, die Abwechslung in den Operationen eine reichere u. dgl. m. Um in jedem Falle ein sauberes, aufmerksames Nachrechnen bei den Schülern zu erreichen, muß es sich der Lehrer vor allem zur Regel machen, jede Zahl und jede Operation nur

9) Vergl. S. 310.

einmal anzugeben. Dazu nur noch eine Bemerkung über die Taktrechenaufgaben in den Schülerheften, deren Form von der der übrigen Aufgaben abweicht. Weil die Ausrechnung stets um eine Zahl fortschreitet, so bezieht sich das voranstehende Operationszeichen auch nur auf diese eine Zahl. Die Aufgabe 8 — 3 . 2 ist also so aufzufassen: 8 — 3 = 5, 5 . 2 = 10; und nicht so: 8 — 6 = 2 rc. Der Einwand, daß dadurch dem Schüler zweierlei Auffassungen zugemutet werden, deren eine die andere aufhebt, erledigt sich sehr einfach dadurch, daß die Taktrechenaufgaben nur für das Kopfrechnen bestimmt sind und ausschließlich vom Lehrer gelesen werden sollen. So nimmt z. B. die Lösung der Taktrechenaufgabe 8 — 6 . 3 — 5 + 3 . 2 — 7 . 5 + 2 = ? folgenden Verlauf:

Lehrer spricht: „8 weniger 6“ — Schüler rechnet (im Kopfe): 2 —; Lehrer fährt fort: „mal 3“ — Schüler rechnet: 6 —; Lehrer fährt fort: „weniger 5“ — Schüler rechnet: 1 —; Lehrer fährt fort: „und 3“ — Schüler rechnet: 4 u. s. f. Ganz zuletzt fügt der Lehrer fragend hinzu: „Ist?“ — Nun heben die Schüler die Hände, und einer wird aufgefordert, die Auflösung anzugeben. Es können aber auch mehrere Taktrechenaufgaben zu einem „Proberechnen“ verbunden werden. Dann läßt man auf das Kommando: „Schreibt!“ das Ergebnis anmerken, geht zur folgenden Aufgabe über und fragt erst nach Erledigung aller Aufgaben nach sämtlichen Ergebnissen.

Schließlich sind, da im ersten Schuljahre schon alle vier Grundrechnungsarten auftreten, noch für die mit denselben in Verbindung stehenden Formen die passendsten Ausdrücke festzustellen. Wir entscheiden uns in der Addition für „und“, in der Subtraktion für „weniger“, in der Multiplikation für „mal“ und in der Division, die wir hier nur als Messung auffassen,[10]) für „gemessen durch.“ Damit hängt zusammen, daß in der Subtraktion der Minuend, in der Division der Dividend zuerst genannt wird. Aber auch in der Multiplikation halten wir fest daran, daß stets der Multiplikand voraus zu gehen hat, daß also 2 mal 5 aus 2 + 2 + 2 + 2 + 2 und nicht aus 5 + 5 hervorgegangen ist.

b) Das zweite Schuljahr.

Ebenso wie im ersten, hängen auch im zweiten Schuljahre die mündlichen und schriftlichen Darstellungsformen eng zusammen. Was schriftlich dargestellt wird, ist vorher in derselben Form mündlich dargestellt worden, oder hätte doch, wenn beides geschehen sollte, in derselben Form dargestellt werden müssen. So lassen sich die beiden Darstellungsformen jetzt überhaupt nicht streng auseinanderhalten. Dies die eine Vorbemerkung. Die andere ist die, daß alles, was betreffs der mündlichen Darstellungs-

---

10) Vergl. S. 260.

formen für das erste Schuljahr gefordert wurde, auch für das zweite und alle nachfolgenden Schuljahre Geltung behält, falls es nicht ausdrücklich aufgehoben oder weiter entwickelt wird. Ebenso behält das, was nachstehend für das zweite Schuljahr aufgestellt wird, in demselben Sinne für alle folgenden Schuljahre Geltung u. s. f.

Im zweiten Schuljahre wird mit der Zehnerreihe begonnen. Es ist aber nicht zu sprechen: 1 Zig, 2 Zig, 3 Zig u. s. w., wie einige Rechenmethodiker wollen, sondern 1 Zehner, 2 Zehner, 3 Zehner u. s. w.[11]) Ferner: Die Maßnamen Mark und Pfennig sind flexionslos, es heißt also z. B. 50 Pfennig und nicht 50 Pfennige. Die Ausdrücke Zehnpfennigstück, Fünfpfennigstück ꝛc. sind besser durch die kürzern Zehnpfenniger, Fünfpfenniger ꝛc. zu ersetzen (falls man nicht vorzieht noch kürzer Zehner, Fünfer u. s. w. zu sagen, wie früher Sechser, Dreier u. s. w.). Alle Antworten haben in vollständigen Sätzen zu erfolgen, insbesondere auch die Auflösungen der jetzt schon zahlreicher auftretenden eingekleideten Aufgaben. Die Regel ist, beim Ansagen der Lösung einer Aufgabe die letztere selbst mit zu wiederholen; die Weglassung der Aufgabe führt zum Schnellrechnen, welches aber, wie im ersten Schuljahre, Klarheit und einen gewissen Grad von Geläufigkeit in der verwendeten Aufgabenklasse voraussetzt.

Es kommen jetzt neben den einfachen auch zahlreiche zusammengesetzte Aufgaben vor. Bei der Ausrechnung dieser ist namentlich die mathematische Richtigkeit nicht außer acht zu lassen. Lautet die Aufgabe z. B.

$$40 + 60 - 50,$$

dann ist so vorzurechnen:

40 und 60 ist 100; 100 weniger 50 ist 50,

aber nicht so:

40 und 60 ist 100 weniger 50 ist 50.

Es handelt sich bei diesen und ähnlichen Aufgaben eben um zwei oder mehrere Gleichungen, und diese dürfen in keinem Falle — auch nicht auf der Unterstufe der Volksschule — übersehen werden.

Kommen in zusammengesetzten Aufgaben Multiplikationen und Divisionen vor, dann ist nicht nur der Anfang der Ausrechnung nicht gleichgiltig, sondern es steht auch die Auffassung solcher Aufgaben nicht im Belieben des Rechners. Es giebt hier ein einfaches Merkzeichen, durch welches das Kind instand gesetzt wird, stets das Richtige zu treffen. Es ist dieses: Alles, was durch „mal“ oder „durch“ verbunden ist, gehört vor allem andern zusammen und muß (in zusammengesetzten Aufgaben) stets zuerst ausgerechnet werden! Hiernach können Aufgaben wie $36 + 5 \cdot 7$; $90 - 6 \cdot 9$; $81 + 40 : 5$; $81 - 40 : 5$; $45 : 5 + 4 \cdot 6$ u. s. w. nicht mißverstanden werden. Es ergiebt sich nämlich:

$$36 + 5 \cdot 7 = 36 + 35 = 71;$$
$$90 - 6 \cdot 9 = 90 - 54 = 36;$$

11) Vergl. S. 265. 377.

$81 + 40 : 5 = 81 + 8 = 89;$
$81 - 40 : 5 = 81 - 8 = 73;$
$45 : 5 + 4 . 6 = 9 + 24 = 33;$ aber nicht:
$(36 + 5) . 7 = 41 . 7 = 287;$
$(90 - 6) . 9 = 84 . 9 = 756$ u. s. w.

Hält man an diesem Merkzeichen von vorn herein fest, dann sind in der Volksschule nahezu alle Klammern überflüssig, ein Vorteil, der nicht gering anzuschlagen ist. Wir haben im ersten Begleitworte zu unserm Rechenbuche übrigens schon darauf hingewiesen. Dort heißt es: „In zusammengesetzten Aufgaben gelten, um die Klammern möglichst zu vermeiden, Additions- und Subtraktionszeichen stets als trennende, Multiplikations- und Divisionszeichen als verbindende Zeichen. Hiernach ist also zu rechnen $2 . 18 + 29 = 36 + 29 = 65$ und nicht $2 . (18 + 29) = 2 . 47 = 94$."

Die Zahlreihe 1 bis 100 bringt namentlich für Addition und Subtraktion eine Reihe wichtiger, weil grundlegender Rechenfälle. Dieselben schreiten zwar vom Leichten zum Schweren fort, es erfordert aber doch jeder derselben eine bestimmte Form der Lösung. Letztere wird gefunden, wenn man festhält, daß jede Aufgabe mit ihrer Auflösung eine Gleichung bilden muß. Es können dabei im allgemeinen zwei Fälle eintreten: entweder die Lösung erfolgt ohne Zwischenrechnung, oder sie erfolgt mit Zwischenrechnung. Hiernach erhält man:[12])

a) $10 + 6 = 16$; $6 + 10 = 16$; $16 - 6 = 10$;

b) $16 + 10 = 26$; $10 + 16 = 26$; $26 - 10 = 16$; $26 - 16 = 26 - 10 - 6 = 16 - 6 = 20$;

c) $32 + 4 = 36$; $22 + 14 = 22 + 10 + 4 = 32 + 4 = 36$; $36 - 4 = 32$; $36 - 14 = 36 - 10 - 4 = 26 - 4 = 22$;

d) $46 + 4 = 50$; $26 + 24 = 26 + 20 + 4 = 46 + 4 = 50$; $50 - 4 = 46$; $50 - 24 = 50 - 20 - 4 = 30 - 4 = 26$;

e) $45 + 7 = 45 + 5 + 2 = 50 + 2 = 52$; $25 + 27 = 25 + 20 + 7 = 45 + 7 = 45 + 5 + 2 = 50 + 2 = 52$; $52 - 7 = 52 - 2 - 5 = 50 - 5 = 45$; $52 - 27 = 52 - 20 - 7 = 32 - 7 = 32 - 2 - 5 = 30 - 5 = 25$.

Bei diesen Formen darf man aber nicht stehen bleiben, sondern man muß, sobald sie mit Sicherheit und angemessener Geläufigkeit gebraucht werden, auf Verkürzungen Bedacht nehmen. Dafür giebt es wieder zwei Stufen. Für die vorigen Aufgaben sind es zunächst folgende:

a) $10 + 6 = 16$; $6 + 10 = 16$; $16 - 6 = 10$;

b) $16 + 10 = 26$; $10 + 16 = 26$; $26 - 10 = 16$; $26 - 16 = 16 - 6 = 10$;

c) $32 + 4 = 36$; $22 + 14 = 32 + 4 = 36$; $36 - 4 = 32$; $36 - 14 = 26 - 4 = 22$;

12) Vergl. S. 264 f.

d) 46 + 4 = 50; 26 + 24 = 46 + 4 = 50; 50 — 4 = 46; 50 — 24 = 30 — 4 = 26;

e) 45 + 7 = 50 + 2 = 52; 25 + 27 = 45 + 7 = 50 + 2 = 52; 52 — 7 = 50 — 5 = 45; 52 — 27 = 32 — 7 = 30 — 5 = 25.

Diese Verkürzungen bestehen, wie man sieht, darin, daß eine oder mehrere Zwischenformen in Wegfall kommen. Läßt man alle Zwischenformen fallen, dann erhält man die zweite (höchste) Verkürzungsform, das Ziel, welches in jedem einzelnen Falle zu erreichen ist. Soll freilich der Schüler zeigen, daß er mit Verständnis rechnet, dann ist immer wieder auf die erste, ausführliche Form, das Normalverfahren im vorliegenden Falle, zurückzugreifen. Zusammengesetzte Aufgaben aber sind erst dann am Platze, wenn die Schüler die einfachen Aufgaben ohne Angabe der Zwischenstufen sicher und genügend schnell lösen können.

Zu denjenigen Übungen, welche im zweiten Schuljahre immer und immer wiederkehren müssen, damit Geläufigkeit erzielt werde, gehören die Reihen, welche durch Zu- und Abzählen der Einerzahlen entstehen. Also z. B.

1, 3, 5, 7, 9, 11 2c. 2, 4, 6, 8, 10, 12 2c. 1, 4, 7, 10, 13 2c. 2, 5, 8, 11, 14 2c. 1, 5, 9, 13, 17 2c. 2c. Dann: 100, 98, 96 2c. 99, 97, 95 2c. 100, 97, 94 2c. 2c. Ferner: 7 + 4, 17 + 4, 27 + 4 2c. 8 + 5, 18 + 5, 28 + 5 2c. 2c. 12 — 3, 22 — 3, 32 — 3 2c. 13 — 8, 23 — 8, 33 — 8 2c. 2c. Auch in den nachfolgenden Schuljahren müssen solche Reihen eine stehende Übung bilden, wenn Rechenfertigkeit erzielt werden soll. Dabei überall Einzel- und Chorsprechen. Auch das letztere ist jedenfalls zu empfehlen.

Die Auflösungen der eingekleideten Aufgaben müssen in vollständigen Sätzen gegeben werden. Beispiel: Ein Hering kostet 9 Pfennig, wieviel kostet ein halbes Dutzend? Auflösung: Zu einem halben Dutzend gehören 6 Stück. Wenn 1 Hering 9 Pfennig kostet, so kosten 6 Heringe 9 Pfennig mal 6 gleich 54 Pfennig. Also: Wenn ein Hering 9 Pfennig kostet, so kostet ein halbes Dutzend 54 Pfennig.

Bekanntlich läßt sich ein und dieselbe Aufgabe mündlich auf sehr verschiedene Weise ausdrücken.

So z. B. die Aufgabe 25 + 9 wie folgt: Wieviel ist 25 und 9? — Vermehre 25 um 9! — Welches ist die Summe von 25 und 9! Zähle 25 und 9 zusammen! 2c.

Indessen meinen wir, es müsse mit derartigen wechselnden Einkleidungen noch ein oder zwei Jahre gewartet werden, solange nämlich, bis die Kinder innerhalb der Zahlreihe 1 bis 100 die Grundrechnungsarten nach Aufgaben in einerlei Form völlig beherrschen.

c) Das dritte Schuljahr.

Dem dritten Schuljahre haben wir die Reihen von 2 bis 9 innerhalb der Zahlreihe 1 bis 100 zugewiesen. Daher decken sich auch für dieses Schuljahr die Formen des mündlichen und schriftlichen Rechnens noch vollständig.

Bei den Multiplikationsreihen ist streng daran festzuhalten, daß die Reihenzahl Multiplikand sein muß und daß der Multiplikand voranzugehen hat. Denn es leuchtet ein, daß die Multiplikation nur eine verkürzte Addition ist. Aus $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ entsteht 2 mal $4 = 8$, d. h. der Summand 2 ist 4 mal zu setzen, aber die 4 nicht 2 mal. Alle Multiplikationsreihen müssen unbedingt sicher, fließend und schnell vom Schüler aufgesagt werden. Aber nach jedem einzelnen Satze sinkt die Stimme wie bei einem Punkte; denn auch hier darf nicht „geleiert" werden. Einzel- und Chorsprechen wechseln zweckmäßig ab. Die Multiplikatoren steigen zunächst in natürlicher Folge auf und ab, weiterhin aber bewegen sie sich sprungweise. So durchläuft man z. B. die geraden, dann die ungeraden Zahlen als Multiplikatorenreihe auf- und abwärts, bis zuletzt auch diese Regelmäßigkeit in Wegfall kommt. Entweder werden dabei Rechentafeln benutzt, oder man schreibt die Multiplikatoren an die Wandtafel. Steht dann z. B. die Reihe angeschrieben:

4, 9, 3, 8, 5, 2, 7, 1, 10, 6,

so haben die Schüler bei der Zweierreihe vorzurechnen: $2 \,.\, 4 = 8$; $2 \,.\, 9 = 18$; $2 \,.\, 3 = 6$ 2c. Ähnlich bei den übrigen Reihen. Zuletzt stellen die Schüler selbst abwechselnd einander Aufgaben. An die erste Form der Multiplikation schließt sich eine zweite, eine Umkehrungsform der ersten, an. Es wird nämlich das Produkt zuerst angegeben, dann folgen Multiplikand und Multiplikator.[13]) Selbstverständlich kann auch mit benannten und unbenannten Zahlen dabei abgewechselt werden.

Den Multiplikationsreihen schließen sich die Divisionsreihen an. Hier ist nun streng zwischen Messung und Teilung zu unterscheiden. Die weitere Anordnung der Übungen entspricht aber ganz derjenigen bei den Multiplikationsreihen; die Reihenfolge der gegebenen Zahlen bleibt stets dieselbe: Dividend und Divisor.

Wohl zu beachten ist, daß jede Reihe in acht verschiedenen Formen, zwei Grund- und sechs abgeleiteten Formen, auftreten kann. Es sind z. B. die Grundformen der Fünferreihe:

a) $5 \,.\, 1,\ 5 \,.\, 2 \ldots 5 \,.\, 20$ und

b) $5 : 5,\ 10 : 5 \ldots 100 : 5$;

die abgeleiteten Formen hingegen:

c) $1 \,.\, 5,\ 2 \,.\, 5,\ 3 \,.\, 5 \ldots$;	f) $5 : 1,\ 10 : 2,\ 15 : 3 \ldots$;
d) $5 = 5 \,.\, 1,\ 10 = 5 \,.\, 2 \ldots$;	g) $1 = 5 : 5,\ 2 = 10 : 5 \ldots$;
e) $5 = 1 \,.\, 5,\ 10 = 2 \,.\, 5 \ldots$;	h) $5 = 5 : 1,\ 5 = 10 : 2 \ldots$.

Sicherheit und Geläufigkeit ist auch hier das Ziel und zwar nicht nur für den Fall, daß die vorstehende Folge eingehalten wird, sondern für jede beliebige Folge.

Besondere Formen sind bei der Multiplikation einzuhalten, so-

13) Vergl. Rechenbuch, Heft 2. S. 6 (Ausg. A).

bald der Multiplikator die Zehn übersteigt. **Als Normalform** gilt dann z. B. für 5 . 17 folgende:

$$5 \cdot 17 = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 7 = 50 + 35 = 85;$$

daran schließt sich die erste Stufe der Abkürzung, die **Übergangsform**:

$$5 \cdot 17 = 50 + 35 = 85;$$

weiterhin die zweite Stufe, die **Abschlußform**:

$$5 \cdot 17 = 85.$$

Es ist immer erst dann zur nächsten Stufe überzugehen, wenn volle Sicherheit und genügende Geläufigkeit auf der eben behandelten Stufe erzielt worden sind.

Entsprechend erhält man als **Normalform** für **Divisionsreihen**:

$$85 : 5 = 50 : 5 + 35 : 5 = 10 + 7 = 17;$$

als **Übergangsform**:

$$85 : 5 = 10 + 7 = 17;$$

als **Abschlußform**:

$$85 : 5 = 17.$$

Auch hier gilt, daß erst dann, wenn das Kind die einfachen Aufgaben genügend beherrscht, zusammengesetzte Aufgaben zu behandeln sind. Dazu folgende Beispiele:

a) 5 . 13 + 16. Gesprochen: 5 mal 13 ist 65; 65 und 16 ist 81; also ist 5 mal 13 und 16 gleich 81.

b) 70 : 5 + 39. Gesprochen: 70 durch 5 ist 14; 14 und 39 ist 53; also ist 70 durch 5 und 39 gleich 53.

c) 81 — 5 . 13. Gesprochen: 5 mal 13 ist 65; 81 weniger 65 ist 16; also ist 81 weniger 5 mal 13 gleich 16.

d) 85 — 90 : 5. Gesprochen: 90 durch 5 ist 18; 85 weniger 18 ist 67; also ist 85 weniger 90 durch 5 gleich 67.

e) 85 : 5 + 5 . 13. Gesprochen: 85 durch 5 ist 17; 5 mal 13 ist 65; 17 und 65 ist 82; also ist 85 durch 5 und 5 mal 13 gleich 82.

Als Verbindung von Multiplikation und Division treten die **Bruchzahlen** auf. Zunächst handelt es sich um die **Brucheinheiten**. Das giebt folgende Reihe: Der zweite Teil heißt ein Halb, der dritte Teil heißt ein Drittel u. s. f. bis zum Zehntel. Hierauf werden diese Brucheinheiten auf Zähl- und Zeitmaße angewandt. Da heißt es z. B.

a) Ein halbes Schock ist 60 Stück durch 2, also 30 Stück; ein drittel Schock ist 60 Stück durch 3, also 20 Stück u. s. w.

Dann kommen die übrigen Bruchzahlen an die Reihe, z. B.

b) $\frac{2}{5}$ Schock = 24 Stück. (Ausrechnung: Ein fünftel Schock ist 12 Stück, zweifünftel Schock sind 12 Stück mal 2, also 24 Stück u. s. w.)

In ähnlicher Weise werden die Aufgaben mit unbenannten Zahlen gelöst, z. B.

c) $\frac{2}{3}$ von 48. (Ausrechnung: $\frac{1}{3}$ von 48 ist 16; $\frac{2}{3}$ von 48 ist 16 mal 2, also 32.)

Erst dann, wenn derartige Aufgaben sicher und schnell gelöst werden — nämlich ohne Zwischenstufe, also so: $\frac{2}{3}$ von 48 ist 32, $\frac{2}{5}$ Schock sind 24 Stück u. s. w. — erst dann dürfen zusammengesetzte Aufgaben behandelt werden. Denn müßte man bei letztern bis auf die erste Zerlegung zurückgehen, so wäre nichts gewonnen. Hierzu einige Beispiele:

a) $\frac{7}{10}$ von 40 + 35. Ausrechnung: $\frac{7}{10}$ von 40 ist 28; 28 und 35 ist 63; also ist $\frac{7}{10}$ von 40 und 35 gleich 63.

b) 90 — $\frac{7}{9}$ von 54. Ausrechnung: $\frac{7}{9}$ von 54 ist 42; 90 weniger 42 ist 48; also ist 90 weniger $\frac{7}{9}$ von 54 gleich 48.

c) $\frac{5}{8}$ von 96 — $\frac{2}{3}$ von 81. Ausrechnung: $\frac{5}{8}$ von 96 ist 60; $\frac{2}{3}$ von 81 ist 54; 60 weniger 54 ist 6; also ist $\frac{5}{8}$ von 96 weniger $\frac{2}{3}$ von 81 gleich 6.

Die Division mit Rest, welche am Schlusse des dritten Schuljahres auftritt, bringt keine wesentlich neuen Formen. Es lautet z. B. die Ausrechnung von 68 : 5 einfach so: 68 durch 5 ist 13 Rest 3 (denn die Fähigkeit, ohne Zerlegung der 68 zu dividieren, muß jetzt vorhanden sein). Hier treten in den zusammengesetzten Aufgaben ausnahmsweise auch Klammern auf. Selbstverständlich ist dann der Ausdruck in der Klammer zuerst zu berechnen. So ist z. B. die Aufgabe (45 + 36 — 28) : 6 so zu lösen:

45 und 36 ist 81; 81 weniger 28 ist 53; 53 durch 6 ist 8 Rest 5; also ist 45 und 36 weniger 28 durch 6 gleich 8 Rest 5.

Bezüglich der eingekleideten und angewandten Aufgaben ist auf die Bemerkungen für die beiden ersten Schuljahre zu verweisen. Dazu drei Beispiele:

a) Wer 15 Postkarten kauft, erhält wieviele Fünfpfenniger auf 1 ℳ zurück? Antwort: 1 Postkarte kostet 5 Pfennig, also kosten 15 Postkarten 5 Pfennig mal 15, das sind 75 Pfennig; 1 ℳ hat 100 Pfennig; 100 Pfennig weniger 75 Pfennig sind 25 Pfennig; 25 Pfennig sind 5 Fünfpfenniger; also: Wer 15 Postkarten kauft, erhält auf 1 ℳ 5 Fünfpfenniger zurück. — Doch ist das die umständlichere Antwort. Die kürzere und bessere wird so verlaufen können: 1 Postkarte kostet 1 Fünfpfenniger; 15 Postkarten kosten 15 Fünfpfenniger; 1 ℳ hat 20 Fünfpfenniger; 20 Fünfpfenniger weniger 15 Fünfpfenniger sind 5 Fünfpfenniger; also: Wer 15 Postkarten kauft, erhält auf 1 ℳ 5 Fünfpfenniger zurück.

b) Wieviele Wochen sind es vom 20. Juli bis 24. August? Antwort: Der Juli hat 31 Tage; am 20. Juli sind davon 19 Tage verflossen; also bleiben von 31 Tagen 12 Tage übrig; am 24. August sind 23 Tage vom August verflossen; 12 Tage und 23 Tage sind 35 Tage; 35 Tage sind 5 Wochen; also: Vom 20. Juli bis 24. August sind es 5 Wochen.

c) Der achte Teil einer Zahl ist um 8 größer als ihr Rest, welcher 4 beträgt. Wie heißt diese Zahl? Antwort: Beträgt der Rest 4, dann muß der achte Teil der Zahl 12 sein, denn 4 und 8 ist 12; ist aber 12 der achte Teil einer Zahl, so ist diese Zahl 96, denn 12 mal 8 ist 96; bei der gesuchten Zahl soll nun noch 4 Rest bleiben, also ist 100 die gesuchte Zahl. Probe: 100 durch 8 ist 12 Rest 4; 12 ist um 8 größer als der Rest 4. Zusammenfassung: Ist der achte Teil einer Zahl um 8 größer als ihr Rest, welcher 4 beträgt, so heißt diese Zahl 100.[14])

Für Addition und Subtraktion, welche nach unserm Lehrgange hinter der Multiplikation und Division im dritten Schuljahre scheinbar etwas zurückstehen, treten neue mündliche Darstellungsformen zwar nicht auf; dafür müssen aber die im zweiten Schuljahre gewonnenen Formen immer und immer wieder herangezogen werden. Mit andern Worten: die Additions- und Subtraktionsaufgaben in Reihenform[15]) haben als stehende, tägliche Übungen zu gelten, als die thatsächlich wichtigste Voraussetzung der Rechenfertigkeit. Um aber nach dieser Seite das Interesse möglichst zu beleben, darf man nicht bloß alte Formen bringen. Der Reiz des

14) Das dritte Beispiel wird vielen Schülern dieser Stufe wahrscheinlich zu große Schwierigkeiten bieten. Dasselbe soll aber auch nur als Probe der Behandlung einer sogenannten algebraischen Aufgabe gelten.

15) Vergl. S. 384.

Neuen ist ein zu wichtiges Förderungsmittel im Unterrichte, als daß wir darauf ganz verzichten dürften. Deshalb können schon von jetzt ab die Aufgaben in verschiedenen Ausdrucksweisen oder Einkleidungen an den Zögling herangebracht werden. Dieses besonders auch deshalb, weil dadurch derselbe zum Nachdenken veranlaßt und vor Einseitigkeiten bewahrt wird. Eine sehr gute Auswahl solcher Einkleidungen entnehmen wir einem ältern trefflichen Rechenwerke, indem wir zugleich bemerken, daß dieselbe für die folgenden Schuljahre mit bestimmt ist.[16])

Addition. Aufgabe: $4 + 8 = ?$

1) Wieviel beträgt 4 und 8 zusammen? 2) Addiere 4 und 8! 3) Zähle 4 zu 8! 4) Vereinige die Zahlen 4 und 8 in eine Summe! 5) Wie heißt das Ganze, dessen Teile 4 und 8 sind? 6) Welche Zahl besteht aus 4 und 8? 7) Welche Zahl ist um 4 größer als 8? (oder um 8 größer als 4?) 8) 4 ist um 8 (oder 8 ist um 4) kleiner als welche Zahl? 9) Welche Zahl beträgt 8 mehr als 4? (oder 4 mehr als 8?) 10) 8 steht vor welcher größern Zahl um 4 entfernt? 11) Man hat eine Zahl um 4 vermindert (verringert, verkleinert) und 8 erhalten, wie heißt sie? 12) Man hat 8 von einer Zahl subtrahiert (hinweggenommen) und 4 als Rest erhalten, wie heißt sie? 13) 4 ist der Unterschied zwischen 8 und welcher größeren Zahl? 14) Der Unterschied zweier Zahlen beträgt 8, die kleine heißt 4, wie die große? 15) Welche Zahl übersteigt die Zahl 8 um 4? u. s. w.

Subtraktion. Aufgabe: $12 - 7 = ?$

1) Ziehe 7 von 12 ab! 2) Vermindere (verringere, verkleinere) 12 um 7! 3) Welche Zahl bleibt übrig (als Rest), wenn 7 von 12 weggenommen wird? 4) Wie heißt der Unterschied (die Differenz) zwischen 7 und 12? 5) Zwei Zahlen betragen zusammen 12, die eine heißt 7, wie die andere? 6) Um wieviel muß man 7 vergrößern, um 12 zu erhalten? 7) Wie weit ist 7 von 12 entfernt? 8) Um wieviel wird die Zahl 7 von der Zahl 12 überstiegen? 9) 7 ist um wieviel kleiner als 12? 10) 12 ist um wieviel größer als 7? 11) Man hat zu 7 noch eine Zahl gelegt und 12 erhalten, wie hieß sie? 12) Um wieviel muß 12 vermindert werden, wenn 7 entstehen soll? 13) 12 beträgt wieviel mehr als 7? 14) Der Unterschied zwischen 12 und einer kleinern Zahl beträgt 7, wie heißt sie? 15) Durch Vereinigung der Zahl 7 mit einer andern erhielt man 12, wie heißt diese? 16) Der Minuend heißt 12, der Subtrahend 7, wie heißt die Differenz? 17) Der Minuend heißt 12, die Differenz 7, wie heißt der Subtrahend? 18) Die Summe zweier Zahlen, von denen die eine 7 heißt, ist gleich 12, wie heißt die andere? 19) Wie weit steht die siebente einstellige Zahl von der dritten zweistelligen entfernt? 20) Um wieviel steht die 4te ungerade Zahl niedriger als die 6te gerade? u. s. w.

Multiplikation. Aufgabe: $8 \,.\, 7 = ?$

1) Nimm 8 siebenmal! 2) Lege 8 sechsmal (nicht 7 mal) zu sich selbst! 3) Welche Zahl ist 7 mal so groß wie 8? 4) Wie heißt die Zahl, welche 6 mal größer als 8 ist? 5) Welche Zahl beträgt 7 mal so viel wie 8? 6) Welche Zahl beträgt 6 mal mehr als 8? 7) 8 ist von welcher Zahl der 7te Teil? 8) In welcher Zahl ist 8 siebenmal (oder 7 achtmal) enthalten? 9) Wie heißt das Siebenfache von 8? 10) In welcher Zahl liegt 8 siebenmal? 11) Von welcher Zahl läßt sich 8 siebenmal abziehen, ohne daß ein Rest bleibt? 12) Man hat eine Zahl durch 8 dividiert und 7 erhalten, wie hieß sie? 13) Eine gewisse Zahl besteht aus 7 Teilen und jeder Teil beträgt 8, wie heißt sie? 14) Die beiden Faktoren 7 und 8 geben welches Produkt? 15) Bei einem Divisionsexempel heißt der Divisor 7 und der Quotient 8, wie heißt der Dividend? 16) Multipliziere (vervielfache) 8 mit 7! u. s. w.

---

16) Wedemann, Theoretisch-praktische Rechenschule. 1. Teil. Erfurt 1844. S. 28 ff.

Division. Aufgabe: $28 : 4 = ?$

1) Dividiere 28 durch 4! 2) Zerlege 28 in 4 gleiche Teile! 3) Wie groß ist der 4te Teil von 28? 4) Die Zahl 4 ist welcher Teil von 28? 5) Wievielmal ist 4 in 28 enthalten? 6) Wievielmal so groß wie 4 ist 28? 7) 28 ist das Wievielfache von 4? 8) 2 Zahlen geben, miteinander multipliziert, 28, die eine heißt 4, wie die andere? 9) Mit welcher Zahl muß man 4 vervielfachen, um 28 zu erhalten? 10) Wievielmal läßt sich 4 von 28 abziehen? 11) 28 ist 4 mal so groß wie welche Zahl? 12) Zwei Faktoren, von denen der eine 4 ist, geben 28, wie heißt der andere? u. s. w.

d) Das vierte Schuljahr.

Dieses Schuljahr erweitert die Zahlreihe bis 1000 und am Ende desselben wird der Anfang mit dem eigentlichen *schriftlichen* Rechnen gemacht. Daher sind hier bezüglich der Darstellungsformen zwei Abschnitte zu unterscheiden: a) die mündlichen und schriftlichen Darstellungsformen stimmen noch überein; b) sie stimmen nicht mehr überein. Der Übergang von einem Abschnitte zum andern ist durch zweckmäßige Überleitungsformen zu vermitteln.

Die Übereinstimmung der *mündlichen* und *schriftlichen* Darstellungsformen findet besonders statt, so lange mit reinen Hunderten und Hunderten und Zehnern gerechnet wird. Denn im ersten Falle bewegt sich alles in den Formen der Zahlreihe 1 bis 10, im zweiten Falle in den Formen der Zahlreihe 1 bis 100, nur auf höherer Stufe. Deshalb bedarf es auch keiner neuen Darstellungsformen, sondern nur einer Übertragung der alten auf die erweiterte Zahlreihe. Beispiele:

1. *Reine Hunderte.*

$600 + 200 = 800$ folgt aus $6 + 2 = 8$.

2. *Hunderte und Zehner.*

a) $600 + 70 = 670$ folgt aus $60 + 7 = 67$;
b) $670 + 200 = 870$ „ „ $67 + 20 = 87$;
c) $450 + 30 = 480$ „ „ $45 + 3 = 48$;
d) $450 + 80 = 530$ „ „ $45 + 8 = 53$;
e) $350 + 130 = 480$ „ „ $35 + 13 = 48$;
f) $350 + 180 = 530$ „ „ $35 + 18 = 53$.

Dabei unterscheidet man, ganz wie vorher, zweckmäßig wieder drei Stufen der Ausrechnung: Die vollständige oder die *Normalform* (I), die *überleitende* (II), welche einige Zwischenformen überspringt, und die *kurze* (III), welche ohne Angabe aller Zwischenformen von der Aufgabe zur Lösung übergeht. Beispiel:

$450 + 80 = 450 + 50 + 30 = 500 + 30 = 530$ . . . (I)
$450 + 80 = 500 + 30 = 530$ . . . . (II)
$450 + 80 = 530$ . . . . (III)

Was die Schüler als sicheres Gut erworben haben, ist bei spätern Ausrechnungen selbstverständlich zu benutzen. Es wäre also falsch, Schüler, welche über den eben behandelten Fall sicher verfügen, bald darauf noch so rechnen zu lassen:

$$350 + 180 = 350 + 100 + 80 = 450 + 80 = 450 + 50 + 30$$
$$= 500 + 30 = 530.$$

Hier hat, da $350 + 100$ und $450 + 50$ bereits behandelt worden sind, unmittelbar aufeinanderzufolgen:

$$350 + 180 = 450 + 80 = 530.$$

Eine Erweiterung der mündlichen Darstellungsformen tritt ein, sobald mit Hunderten, Zehnern und Einern zu rechnen ist. Eigentlich neue Formen kommen aber auch da nicht vor. Denn unter Berücksichtigung des bereits Erworbenen kann gerechnet werden:

$368 + 479 = 768 + 79 = 838 + 9 = 847$ . . . (I)
$368 + 479 = 838 + 9 = 847$ . . . . (II)
$368 + 479 = 847$ . . . . (III)

Voraussetzung ist natürlich überall, daß die Schüler die Aufgaben im Gedächtnis behalten; letzteres wird, sofern der Unterricht nur planmäßig fortschreitet und der Lehrer sonst nichts versäumt hat, aber auch erwartet werden dürfen. Eine beachtenswerte Hilfe leistet dabei die einfache Regel: Die erste Zahl bleibe stets unzerlegt!

Wir haben hier nur Additionsaufgaben berücksichtigt. Doch sind durch dieselben selbstverständlich auch die Formen der Subtraktion gegeben. Die Formen der Multiplikation und Division aber, deren noch nicht gedacht wurde, schließen sich denen der vorhergehenden Schuljahre in ähnlicher Weise an, wie diejenigen der Addition und Subtraktion. So folgt z. B. $300 . 2$ aus $3 . 2$; $360 . 2$ aus $36 . 2$; $80 . 7$ aus $8 . 7$ rc. rc.

Die Aufgaben mit benannten Zahlen können keine Schwierigkeiten bereiten, insbesondere auch die nicht, welche Dezimalzahlen bringen. Denn sie schließen sich alle eng an die Aufgaben mit unbenannten Zahlen an. Feststehende Regel muß dabei sein: Die Benennung nicht weglassen! Beispiel: 2,83 ℳ + 1,39 ℳ. Zu sprechen: 2 ℳ 83 ₰ und 1 ℳ 39 ₰ sind 3 ℳ 83 ₰ und 39 ₰ rc.

Die in den Bemerkungen zum zweiten und dritten Schuljahre als unbedingt nötig bezeichneten Reihenaufgaben haben auch im vierten Schuljahre als fortlaufende, tägliche Übungen zu gelten. Dabei findet selbstverständlich auch eine Ausdehnung derselben auf die Zahlreihe 1 bis 1000 statt. So können z. B. vorkommen:

$90 + 20$, $190 + 20$ rc. $80 + 30$, $180 + 30$ rc. Zählen in geraden Zahlen von 100 bis 200, von 320 bis 376, von 582 bis 630 rc. Desgleichen in ungeraden Zahlen von 100 bis 200, von 435 bis 471, von 823 bis 785 rc. Ferner: 1, 51, 101, 151 rc. 2, 22, 42 rc. 3, 43, 83, 123 rc. $15 + 67 = 82$; $82 + 67 = 149$; $149 + 67 = 216$ rc. Ebenso mit Abzählen rc.

Feste mündliche Formen müssen auch bei Lösung der für das schriftliche Rechnen bestimmten Aufgaben eingehalten werden, um genügenden Zusammenhang für die gemeinsame Arbeit herbeizuführen. Dieselben haben sich namentlich durch Kürze und Bestimmtheit auszuzeichnen. Wir werden sie indessen nicht hier, sondern in Verbindung mit den schriftlichen Darstellungsformen selbst angeben.

Was schließlich die eingekleideten und angewandten Aufgaben betrifft, so kommen Darstellungsformen, welche von den beim dritten Schuljahre mitgeteilten Beispielen abweichen, nicht vor.

Es genügt deshalb auch der Hinweis auf das dort Mitgeteilte. Doch mögen die mannigfaltigen Einkleidungsformen, welche daselbst aufgeführt worden sind, noch ganz besonders als solche Formen bezeichnet werden, welche fleißig und mehr noch als im dritten Schuljahre heranzuziehen sind.

Hierüber nur noch eine Frage: Wie soll es mit den Rechenvorteilen im vierten Schuljahre gehalten werden? Bekanntlich sind die Ansichten darüber geteilte: Manche Rechenmethodiker betrachten es nahezu überall als Ziel, den Zögling in den Besitz von Rechenvorteilen zu setzen; andere wieder halten solches für falsch und meinen, es führe das Suchen und Haschen noch allerlei Vorteilen weder zum Verständnis und zur Sicherheit, noch zur Fertigkeit im Rechnen. Für uns liegt die Frage so: Das vierte Schuljahr soll die Zahlreihe bis 1000 erweitern und die vier Grundrechnungsarten innerhalb derselben behandeln, letztere auch auf gewisse Verhältnisse der Natur und des Menschenlebens anwenden. Das ist jedenfalls eine Aufgabe, deren Durcharbeitung die Zeit und Kraft des Zöglings vollständig in Anspruch nimmt, auch wenn man sich in jedem einzelnen Rechenfalle nur auf die Normalform und deren Abkürzungen beschränkt, d. h. auf diejenige Form, welche bei dem gegebenen Falle stets anwendbar ist, mögen die Zahlen der einzelnen Aufgaben beschaffen sein, wie sie wollen.

Und nicht allein um die Kenntnis dieser Darstellungsform soll es sich handeln, sondern auch um eine möglichst selbständige und sichere Anwendung derselben bei Lösung zugehöriger Aufgaben. Letzteres aber wird nicht erreicht, wenn gleich bei oder bald nach der Einführung in neue Zahlgebiete und Rechnungsarten grundsätzlich mehrere Lösungsweisen gegeben werden. Büttner sagt: „Die Normalform soll die Schüler an logisches Denken gewöhnen und die Rechenfertigkeit auf einer sichern Grundlage vermitteln. Bei den Anfängern im Rechnen würde gar nichts herauskommen, wenn man sie nicht in eine bestimmte Bahn einweisen wollte. Vorgeschrittene Schüler mögen mit der wachsenden Kraft versuchen, gelegentlich besondere Auflösungsweisen zu finden; doch sind dieselben ja nur bei gewissen Zahlen eine Erleichterung, eine Abkürzung, ein wirklicher Rechenvorteil, weshalb auch der fertige Rechner immer wieder auf den festen Boden der Normalformen zurückkehren wird.“ [17]) Auch Unger erklärt: „Einen zweckmäßigen Rechenunterricht kann man nur den nennen, durch welchen die Schüler bei der Beschäftigung mit den Zahlen an Denken gewöhnt und fortwährend im Denken geübt werden. . . . Alle Rechenvorteile sind nichts weiter als die nähern Bestimmungen, welche eine all-

---

17) Büttner a. a. O. S. 110.

gemein gegebene Regel für besondere Fälle zuläßt, und es ist einleuchtend, daß, wenn man eine allgemein gegebene Vorschrift bloß auf einige und zwar zum voraus bestimmte Fälle anwenden will, diese sich immer auf eine für den Gebrauch bequemere Form muß bringen lassen. Aber es folgt hieraus zugleich auch, daß die Zahl der möglichen Rechnungsvorteile unendlich groß sein muß, und daß der Lehrer daher, wenn er sich darauf einläßt, die verschiedenen möglichen Abkürzungen einzuüben, die Menge der zu gebenden Regeln auf eine bedenkliche Weise vermehrt, den Lehrgegenstand zersplittert und den Schüler belastet, statt daß er darauf denken sollte, den Gegenstand möglichst zu vereinfachen und dadurch übersichtlicher zu machen." [18])

So halten wir denn dafür, daß es für das vierte Schuljahr weder nötig noch nützlich sei, den Zögling planmäßig mit allerlei Rechenvorteilen bekannt zu machen. Dazu eignen sich das fünfte und die folgenden Schuljahre ungleich besser. [19])

e) Das fünfte Schuljahr.

In diesem Schuljahre wird die Zahlreihe über 1000 hinaus erweitert. Daraus folgt für die Darstellungsformen zweierlei: erstens werden die schriftlichen Darstellungsformen mehr als bisher in den Vordergrund zu treten haben; zweitens wird zu den mündlichen Darstellungsformen, da sie zu dem fortschreitenden Kopfrechnen in engster Beziehung stehen, wohl manches Neue hinzuzufügen sein, es wird dasselbe aber, eben weil sich das Kopfrechnen vorwiegend innerhalb der Zahlreihe 1 bis 1000 zu halten hat, mehr auf eine Vertiefung und Verwertung als auf eine Erweiterung der schon erworbenen Formen hinauslaufen.

Neue mündliche Darstellungsformen bringt das fünfte Schuljahr namentlich an drei Stellen: 1) im Anschlusse an die Erweiterung der Zahlreihe; 2) als Vorbereitung auf die vier Grundrechnungsarten innerhalb der erweiterten Zahlreihe; 3) in Verbindung mit den Sortenverwandlungen.

Zu dem ersten Punkte ist folgendes zu bemerken. Zum richtigen Schreiben muß das richtige und geläufige Lesen größerer Zahlen kommen. Dieses hängt zunächst von der richtigen Bildung der zusammengesetzten Zahlwörter ab. Davon ist zwar schon oben die Rede gewesen. Doch mögen noch einige besondere Bemerkungen hinzukommen. Festzuhalten ist, daß durch „und" nur die Verbindung der Einer mit den Zehnern von 21 ab erfolgen darf. Man sagt daher (26) „sechsundzwanzig", (69) „neunundsechzig" u. s. w. Falsch ist es also, Hunderte mit Zehnern und Einern durch „und" zu verbinden, also z. B. (214) zweihundert-

18) Unger a. a. O. S. 2 f.

19) Über Einzelheiten, welche hier nicht berührt wurden, sind die zugehörigen Lehrerhefte zu vergleichen.

undvierzehn, (204) zweihundertundvier u. s. w. zu sagen. Hier muß es heißen: „zweihundertvierzehn“, „zweihundertvier“ u. s. w. Nach derselben Regel ist zu sprechen: (3026) dreitausendsechsundzwanzig (aber nicht: dreitausendundsechsundzwanzig), ferner (3006) dreitausendsechs (aber nicht: dreitausendundsechs) u. s. w. Größere Zahlen sollen in Dreiergruppen geschrieben werden.[20]) Dadurch wird auch das Lesen derselben wesentlich unterstützt. Kinder, denen das Lesen größerer Zahlen schwer fällt, lasse man stets auf die drei niedrigsten Stellen achten, dann werden sie sich bald zurecht finden.

Auch bezüglich der Namen, welche die einzelnen Zahlordnungen erhalten, fehlt die Übereinstimmung noch. Allgemein gebräuchlich sind nur die Namen Einer und Zehner. Diese sind durch Anhängung von „er“ aus den Zahlwörtern ein (eins) und zehn entstanden. Vollzieht sich die Bildung der Namen für die nachfolgenden Zahlordnungen in derselben Weise, dann erhält man: Hunderter, Tausender, Zehntausender,[21]) Hunderttausender, Millioner, Zehnmillioner u. s. w. Gegen den Gebrauch dieser Namen, welche sprachlich richtige sind, wird sich, falls nur konsequent daran festgehalten wird, vom Standpunkte des Rechnens kaum etwas einwenden lassen. Dagegen ist zuzugeben, daß das auslautende „er“ hart klingt. Will man diese Endung daher vermeiden, so braucht man nur von der dritten Ordnung ab die Namen (das, ein) Hundert, (die) Hunderte, (das, ein) Tausend, (die) Tausende, (das, ein) Zehntausend, (die) Zehntausende, (das, ein) Hunderttausend, (die) Hunderttausende, (die, eine) Million, (die) Millionen u. s. w. statt jener zu nehmen. Denn auch diese Namen sind sprachlich richtige, und gegen ihren Gebrauch ist vom Standpunkte des Rechnens ebenfalls nichts einzuwenden. Indessen: wenn auch die Bildung der betreffenden Namen auf zweifache Weise zulässig ist, so muß doch nach der Entscheidung an einer Form festgehalten werden.

Was den zweiten Punkt betrifft, so handelt es sich hauptsächlich um die am Ende der Bemerkungen über das vierte Schuljahr erwähnten Rechenvorteile. Der Rechenvorteile giebt es freilich unzählig viele; hier aber kann es sich nur um diejenigen derselben handeln, welche das Kind im fünften Schuljahre ohne lange Auseinandersetzungen begreifen kann, welche seinem Denken so nahe liegen, daß es sie möglichst selbständig zu erlangen vermag. Die bezüglichen Darlegungen schließen sich zwar am besten an die vier Grundrechnungsarten an; im Grunde genommen läuft aber doch alles auf zwei Fälle hinaus: Vergrößerung, beziehentlich Verkleinerung gegebener Zahlen, um möglichst bequeme Zahlen zu erhalten, das ist der eine Fall; Zerlegung, beziehentlich Zerfällung gegebener Zahlen, um möglichst kleine Zahlen zu gewinnen, das ist der andere Fall. Dieses meint auch der treffliche Unger, wenn er schreibt: „Man bestrebe sich zunächst, die Schüler innigst vertraut zu machen mit dem Wesen der Zahl, und verweise dieselben später, nachdem sie bereits die erforder-

20) Amtliche Bestimmung. Vergl. S. 250.
21) Also nicht Zehnertausender!

lichen Fortschritte gemacht haben, um es gehörig würdigen zu können, bei jeder Gelegenheit auf den obersten Grundsatz alles praktischen Rechnens: **Man rechne stets mit den kleinsten oder bequemsten Zahlen!** und man wird besonderer Rechnungsvorteile nicht bedürfen; der Schüler wird keine anwendbare Abkürzung übersehen, ohne daß ihm hierzu besondere Vorschriften gegeben zu werden brauchen, oder daß man auf eine Regel zu verweisen nötig hätte, die für den gerade vorliegenden Fall und für die insbesondere vorkommenden Zahlen einer Vereinfachung fähig ist."[22]) Dazu folgende Beispiele:

Addition.[23])

Normalverfahren: 297 + 368 = 297 + 300 + 60 + 8 = 597 + 60 + 8 = 657 + 8 = 665.

Rechenvorteile: a) 297 + 368 = 300 + 368 — 3 = 668 — 3 = 665; 225 + 68 = 225 + 70 — 2 = 295 — 2 = 293; b) 264 + 48 = 264 + 36 + 12 = 300 + 12 = 312; 538 + 76 = 524 + 76 + 14 = 600 + 14 = 614; c) 294 + 385 = 300 + 400 — 21 = 700 — 21 = 679; 358 + 439 = 360 + 440 — 3 = 800 — 3 = 797; d) 392 + 516 = 400 + 508 = 908; 428 + 496 = 424 + 500 = 924; e) 6,58 ℳ + 4,95 ℳ = 6,58 ℳ + 5 ℳ — 5 ₰ = 11,58 ℳ — 5 ₰ = 11,53 ℳ; 4,78 m + 0,67 m = 5 m + 0,45 m = 5,45 m ꝛc.

Hier wird bei a) der eine Summand durch Vergrößerung in eine bequeme Zahl verwandelt; bei b) erhält man eine solche nach Zerlegung des einen Summanden; bei c) werden beide Summanden durch Vergrößerung zu bequemen Zahlen; bei d) wird der eine Summand vergrößert, der andere verkleinert; bei e) wird gezeigt, daß auch benannte Zahlen in ähnlicher Weise verändert werden können.

Am wertvollsten erweist sich jedenfalls unter diesen Rechenvorteilen die Ergänzung zu vollen Hunderten, beziehentlich Tausenden. Die Kinder gewöhnen sich an dieselbe auch bald und erreichen bei einiger Übung eine ganz bedeutende Fertigkeit. Daß derjenige, welcher diese Vorteile anwenden will, über die Summen je zweier beliebigen Einerzahlen sicher und sofort verfügen muß, liegt nahe. Insbesondere aber ist es die Ergänzung der Einer zu Zehnern, beziehentlich die darauf sich stützende Ergänzung der Zehner und gemischten Zehner zu Hunderten, welche sich als höchst wertvoll erweist. Festhalten muß man auch, daß einer der beiden Summanden (gewöhnlich der erste) nicht nach Stellen zerlegt werden darf, denn dadurch erhielte man nur mehr einzelne Zahlen und beschwerte das Gedächtnis unnötigerweise. Kommen Tausende vor, dann liegt ein Vorteil oft schon darin, daß man diese als Hunderte merkt und ausspricht, daß man also z. B. 3567 nicht 3 tausend 5 hundert 67, sondern 35 hundert 67 ausspricht u. dgl. m.

Subtraktion.[24])

Normalverfahren: 324 — 137 = 324 — 100 — 30 — 7 = 224 — 30 — 7 = 194 — 7 = 187.

Rechenvorteile: a) 324 — 137 = 337 — 137 — 13 = 200 — 13 = 187; 342 — 128 = 328 — 128 + 14 = 200 + 14 = 214; b) 324 — 137

22) Unger a. a. O. S. 3.
23) Vergl. Rechenbuch, Heft 4 (Ausg. A). S. 15.
24) Vergl. Rechenbuch, Heft 4 (Ausg. A). S. 20.

= 324 — 124 — 13 = 200 — 13 = 187; 342 — 128 = 342 — 142 + 14 = 200 + 14 = 214; c) 7,25 ℳ — 2,48 ℳ = 7,48 ℳ — 2,48 ℳ — 0,23 ℳ = 5 ℳ — 0,23 ℳ = 4,77 ℳ 2c.

Hier wird bei a) der Minuend so vergrößert, beziehentlich verkleinert, daß er mit dem Subtrahenden in den Zehnern und Einern übereinstimmt, also zu einer bequemen Zahl für die betreffende Aufgabe wird; bei b) geschieht dasselbe mit dem Subtrahenden; bei c) wird die Anwendung auf benannte Zahlen gezeigt.

Diese Vorteile unterscheiden sich von denen bei der Addition dadurch, daß sie sich nicht auf die Ergänzung zu Hunderten oder Tausenden stützen. Doch kann auch von solchen Ergänzungen Gebrauch gemacht werden, wie folgende Beispiele zeigen:

d) 548 — 392 = 548 — 400 + 8 = 148 + 8 = 156; 584 — 329 = 584 — 330 + 1 = 254 + 1 = 255; e) 447 — 269 = 31 + 147 = 278; 954 — 482 = 18 + 454 = 472 2c.

Voraussetzung in allen diesen Fällen ist, daß der Rechner die Unterschiede je zweier beliebigen Einer, sowie die Unterschiede zwischen jedem Einer und den Zahlen 10 und 20 sofort richtig angeben kann.

Multiplikation.[25])

Normalverfahren: 27 . 24 = 27 . 20 + 27 . 4 = 540 + 108 = 648.

Rechenvorteile: a) 27 . 24 = (25 + 2) . 24 = 600 + 48 = 648; 97 . 6 = (100 — 3) . 6 = 600 — 18 = 582; b) 15 . 42 = 15 . (40 + 2) = 600 + 30 = 630; 14 . 48 = 14 . (50 — 2) = 600 — 28 = 582; c) 27 . 24 = 27 . 3 . 8 = 81 . 8 = 648; 35 . 42 = 5 . 7 . 42 = 210 . 7 = 1470; d) 42 . 45 = 6 . 7 . 5 . 9 = 30 . 7 . 9 = 210 . 9 = 1890; 36 . 5 = 36 : 2 . 10 = 18 . 10 = 180.

Das Normalverfahren unterscheidet sich nicht von dem früher angegebenen. Die Rechenvorteile entstehen bei a) durch Umgestaltung des Multiplikanden, bei b) durch Umgestaltung des Multiplikators in eine bequeme Zahl, bei c) durch Zerlegung des Multiplikators oder des Multiplikanden in Faktoren, wobei durch die nachfolgende Multiplikation mit dem einen Faktor eine bequeme Zahl gewonnen wird, endlich bei d) durch Zerlegung von Multiplikand und Multiplikator in Faktoren und nachfolgende Vertauschung derselben, beziehentlich durch verhältnismäßige Veränderung der gegebenen Zahlen mit Hilfe von Division und Multiplikation.

Beispiele für angewandtes Rechnen:

a) Ein Feldgrundstück, welches die Gestalt eines Rechtecks hat, ist 56 m lang und 15 m breit; wieviel beträgt sein Flächeninhalt? Antwort: Der Flächeninhalt beträgt 56 qm . 15 = (560 + 280) qm = 840 qm. (Berechnet wird zuerst das 10fache, dann die Hälfte desselben!) b) Schnellrechnen: Wenn 1 Stück 7 ₰ kostet, dann kosten 100 Stück 7 ℳ 2c.

Division.[26])

Normalverfahren: 855 : 15 = 750 : 15 + 105 : 15 = 50 + 7 = 57. Rechenvorteile: a) 741 : 39 = (780 — 39) : 39 = 20 — 1 = 19; 752 : 39 = (780 — 28) : 39 = 20 — 1 R 11; b) 672 : 42 = 672 : 6 : 7 = 112 : 7 = 16; 630 : 21 = 63 . 10 : 21 = 3 . 10 = 30; c) 700 : 28 = 100 : 4 = 25; 700 : 42 = 100 : 6 = ($16\frac{2}{3}$!); d) 360 : 28 = 360 : (30 — 2) = 12 R 2 . 12 = 12 R 24; 1547 : 97 = 1547 : (100 — 3) = 15 R (47 + 3 . 15) = 15 R 92.

Das Normalverfahren ist von früher her bekannt; es gründet sich auf die Zerlegung des Dividenden nach den Vielfachen des Divisors. Die Rechenvorteile entstehen bei a) durch Umwandlung des Dividenden in eine bequeme Zahl;

---

25) Vergl. Rechenbuch, Heft 4 (Ausg. A). S. 30.
26) Rechenbuch, Heft 4 (Ausg. A). S. 35.

bei b) durch Zerlegung des Divisors in Faktoren; bei c) durch vorhergehende Division des Dividenden und Divisors durch einen gemeinschaftlichen Faktor; bei d) durch Ergänzung des Divisors zu einer bequemen Zahl.

Beispiele für angewandtes Rechnen:

a) Wie oft muß man 25 l nehmen, um 18 hl zu erhalten? Antwort: Um 1 hl zu erhalten, muß man 25 l viermal nehmen; um 18 hl zu erhalten, muß man 25 l 4 . 18 = 72 mal nehmen. b) Schnellrechnen: Wenn 100 Stück 7 ℳ kosten, so kostet 1 Stück 7 ₰ ꝛc.

Was schließlich den dritten Punkt anlangt, so ist auf folgendes hinzuweisen. Sehr einfach gestaltet sich die Sortenverwandlung auf- und abwärts für unsere dezimalen Münzen, Maße und Gewichte, da dieselbe hier stets auf eine Multiplikation mit oder eine Division durch 10, 100, 1000 . . . führt. Umständlicher, mehr oder weniger, wird sie bei den nichtdezimalen Maßen, also den Zeit- und Zählmaßen. Deshalb brauchen hier auch nur die letztern, und zwar in dem Umfange, in welchem sie unser „Rechenbuch" aufführt, berücksichtigt zu werden. [27])

Voraussetzung für alle Sortenverwandlungen im vorerwähnten Umfange ist die Sicherheit und Geläufigkeit im Multiplizieren mit und Dividieren durch die Währungs- oder Verwandlungszahlen 6, 7, 12, 30, 52, 60, 360, 365 bei Zeitmaßen und 4, 12, 15, 60, 144 bei Zählmaßen. Bei allen Sortenverwandlungen handelt es sich entweder um zwei oder mehrere Sorten, nämlich um eine oder mehrere gegebene und eine oder mehrere gesuchte Sorten. Wenn aber auch die Möglichkeit, drei, vier und mehr Sorten in einer Aufgabe zu vereinigen, vorliegt, so ist damit doch keineswegs gesagt, daß die Volksschule diese Möglichkeit vollständig auszubeuten hätte. Für die Volksschule genügt es, wenn zwei, ausnahmsweise höchstens drei Sorten in einer Aufgabe berücksichtigt werden. Dazu folgende Beispiele:

a) Erweitern und Einrichten (Resolvieren).

a) Wieviele Tage sind 13 Wochen? Antwort: 13 Wochen sind 7 Tage mal 13, also 91 Tage. [28])

b) Wieviele Tage sind 7 Monate 25 Tage? Antwort: 7 Monate sind 30 Tage mal 7 gleich 210 Tage; 210 Tage und 25 Tage sind 235 Tage; also sind 7 Monate und 25 Tage gleich 235 Tage.

c) Wieviel Minuten sind 3 Tage 15 Stunden 30 Minuten? Antwort: 3 Tage sind 24 Stunden mal 3 gleich 72 Stunden; 72 Stunden und 15 Stunden sind 87 Stunden; 87 Stunden sind 60 Minuten mal 87, gleich 4800 Minuten und 420 Minuten gleich 5220 Minuten; 5220 Minuten und 30 Minuten sind 5250 Minuten; also sind 3 Tage 15 Stunden 30 Minuten gleich 5250 Minuten. —

b) Kürzen (Reduzieren).

a) Wieviele Dutzend sind 768 Stück? Antwort: [29]) 768 Stück sind 768 Dutzend

27) Rechenbuch, Heft 4 (Ausg. A). S. 46 f.

28) Wir sind uns wohl bewußt, daß diese Form nicht die sonst übliche ist, und daß man daher mancherlei gegen dieselbe einwenden wird; gleichwohl halten wir an ihr fest, weil sie die Konsequenz der frühern Bestimmung, nach welcher der Multiplikand vor dem Multiplikator zu stehen hat, ist.

29) Hier entscheidet die mathematische Richtigkeit hinsichtlich der Benennung. Sollen Stück in Dutzend verwandelt werden, so ergiebt sich zunächst 1 Stück = 1 Dutzend : 12 oder $\frac{1}{12}$ Dutzend, also 768 Stück = 768 Dutzend : 12 oder $\frac{768}{12}$ Dutzend u. s. w.

durch 12, das sind 60 Dutzend und 4 Dutzend oder 64 Dutzend; also sind 768 Stück gleich 64 Dutzend.

b) Wieviele Dutzend sind 975 Stück? Antwort: 975 Stück sind 975 Dutzend durch 12 = 80 Dutzend + 1 Dutzend 3 Stück = 81 Dutzend 3 Stück u. s. w.

c) Wieviele Gros und Dutzend sind 768 Stück? Antwort: 768 Stück sind 768 Dutzend : 12 = 64 Dutzend; 64 Dutzend sind 64 Gros : 12 = 5 Gros 4 Dutzend; also sind u. s. w.

d) Wieviele Gros und Dutzend sind 975 Stück? Antwort: 975 Stück sind 975 Dutzend : 12 = 81 Dutzend 3 Stück; 81 Dutzend sind 81 Gros : 12 = 6 Gros 7 Dutzend; also sind 975 Stück gleich 6 Gros 7 Dutzend 3 Stück.

Es versteht sich von selbst, daß in diesen Aufgaben die Abkürzungen, beziehentlich Rechenvorteile, welche oben für die Multiplikation und Division aufgeführt wurden, nicht nur Anwendung finden dürfen, sondern auch sollen. Hierzu zwei Beispiele:

1) Wieviele Stunden sind 4 Tage 22 Stunden? Antwort: 4 Tage 22 Stunden sind 2 Stunden weniger als 5 Tage; 5 Tage sind 120 Stunden; also sind 4 Tage 22 Stunden gleich 118 Stunden! 2) 300 Stück sind wieviele Dutzend? Antwort: Es ist 300 : 12 = 100 : 4 = 25; also sind 300 Stück gleich 25 Dutzend.

Auch bei den Grundrechnungsarten würde es zu zwecklosen Weitläufigkeiten führen, wollte man die Sortenzahlen in den einzelnen Aufgaben häufen. In den meisten Fällen, die im praktischen Leben vorkommen, handelt es sich um eine oder zwei Sorten. Daher hat sich das Kopfrechnen auch auf diese zu beschränken.[30])

Die mündlichen Darstellungsformen der Grundrechnungsarten ergeben sich aus denen des vierten Schuljahres in Verbindung mit den vorstehenden Sortenverwandlungen und den später folgenden schriftlichen Darstellungsformen. Deshalb nur folgende Beispiele:

a) 3 Std 36 Min + 5 Std 48 Min = ?

Ausrechnung: 3 Stunden 36 Minuten und 5 Stunden 48 Minuten sind 8 Stunden 36 Minuten und 48 Minuten oder 8 Stunden 84 Minuten; 8 Stunden 84 Minuten sind 9 Stunden 24 Minuten; also sind ꝛc.

b) 9 Std 24 Min — 5 Std 48 Min = ?

Ausrechnung: 9 Stunden 24 Minuten weniger 5 Stunden 48 Minuten sind 4 Stunden 24 Minuten weniger 48 Minuten oder 4 Stunden weniger 24 Minuten; 4 Stunden weniger 24 Minuten sind 3 Stunden 36 Minuten; also sind ꝛc.

c) 4 Sch 13 St . 16 = ?

Ausrechnung: 4 Schock mal 16 sind 64 Schock; 13 Stück mal 16 sind 208 Stück oder 3 Schock 28 Stück; 64 Schock und 3 Schock 28 Stück sind 67 Schock 28 Stück; also sind ꝛc.

d) 29 D 7 St : 8 = ? (Teilen.)

Ausrechnung: 29 Dutzend durch 8 sind 3 Dutzend, Rest 5 Dutzend; 5 Dutzend 7 Stück sind 67 Stück; 67 Stück durch 8 sind 8 Stück, Rest 3 Stück; also sind ꝛc.

e) 12 D 6 St : 3 D 4 St = ? (Messen.)

Ausrechnung: 12 Dutzend 6 Stück sind 150 Stück, 3 Dutzend 4 Stück sind 40 Stück; 150 Stück durch 40 Stück ist 3 mal, Rest 30 Stück; also ist ꝛc.

Auch hier sind, sobald sich Gelegenheit bietet, Rechenvorteile anzuwenden. So kann man in Aufgabe a) die Minuten zur vollen Stunde ergänzen. Dann kommt: 4 Std + 5 Std 24 Min oder 3 Std

30) Vergl. Rechenbuch, Heft 4 (Ausg. A). Seite 54 ff.

24 Min. + 6 Std. In Aufgabe c) kann man 15 St setzen. Dann kommt 64 Sch + 4 Sch — 32 St u. dgl. m.

Zur Addition und Subtraktion mit mehrfach benannten Zahlen gehört auch ein Teil der sogenannten **Zeitrechnung**. Darüber folgen bei den **schriftlichen** Darstellungsformen einige Angaben.[31])

Im fünften Schuljahre tritt ferner die Schlußrechnung als solche zum ersten Male auf. Dieselbe zerfällt in drei Abteilungen: a) Schluß von der Einheit auf die Mehrheit; b) Schluß von der Mehrheit auf die Einheit; c) Schluß von einer Mehrheit auf eine andere. In der letzten Abteilung namentlich kommen neben dem Normalverfahren auch einige Rechenvorteile zur Anwendung. Hierzu folgende Beispiele:

a) Wieviel kosten 15 kg Rindfleisch, wenn das Kilogramm 1,30 ℳ kostet? Antwort: Wenn 1 kg 1,30 ℳ kostet, so kosten 15 kg 15 mal soviel, also 1,30 ℳ mal 15; 1 ℳ mal 15 sind 15 ℳ und 30 ₰ mal 15 sind 450 ₰ oder 4,50 ℳ; 15 ℳ und 4,50 ℳ sind 19,50 ℳ; also: Wenn 1 kg Rindfleisch 1,30 ℳ kostet, so kosten 15 kg 19,50 ℳ.

b) Wieviel kostet ein Paar Strümpfe, wenn ein Dutzend Paar mit 15,60 ℳ bezahlt wird? Antwort: Wenn 1 Dutzend Paar 15,60 ℳ kostet, so kostet 1 Paar den zwölften Teil von 15,60 ℳ; 12 ℳ durch 12 ist 1 ℳ; 3,60 ℳ durch 12 ist 30 ₰; also: Wenn ein Dutzend Paar Strümpfe mit 15,60 ℳ bezahlt wird, so kostet ein Paar 1,30 ℳ.

c) Dielung und Anstrich eines 40 qm großen Fußbodens kosteten 60,80 ℳ; wieviel wird hiernach ein 51 qm großer Fußboden kosten? Antwort: Wenn 40 qm 60,80 ℳ kosten, so kostet 1 qm den 40. Teil davon, das sind 1,52 ℳ; 51 qm kosten das, was 1 qm kostet, 51 mal, mithin 1,52 ℳ mal 51; 1,52 ℳ mal 50 sind 76 ℳ; 76 ℳ und 1,52 ℳ sind 77,52 ℳ; also: Wenn 40 qm 60,80 ℳ kosten, so kosten 51 qm 77,52 ℳ.

d) Ein Lebensmittelvorrat reicht für 3 Personen 16 Tage; wie lange wird er für 12 Personen reichen? Antwort: Wenn 3 Personen 16 Tage reichen, dann reichen 12 Personen nur den 4. Teil von 16 Tagen, das sind 4 Tage; also: Wenn 3 Personen 16 Tage mit einem Lebensmittelvorrate reichen, so reichen 12 Personen mit demselben Vorrate 4 Tage.

e) Wenn 48 qm 28,50 ℳ kosten, wieviel kosten 32 qm? Antwort: In 48 und 32 geht die 16 auf; daher: Wenn 48 qm 28,50 ℳ kosten, so kosten 16 qm den 3. Teil von 28,50 ℳ, das sind 9,50 ℳ; 32 qm kosten das, was 16 qm kosten, 2 mal, also 9,50 ℳ mal 2, das sind 19 ℳ; also: Wenn 48 qm 28,50 ℳ kosten, so kosten 32 qm 19 ℳ.

f) Das sechste Schuljahr.

In diesem Schuljahre sind die Dezimal- und Bruchzahlen im Zusammenhange zu behandeln. Die mündlichen Darstellungsformen schließen sich also diesen beiden Gebieten an. Zu den Dezimalzahlen gehören **Zehntel**, **Hundertstel** (nicht Hundertel), **Tausendstel** (nicht Tausendtel), **Zehntausendstel**, **Hunderttausendstel**, **Millionstel** (nicht Milliontel) u. s. f. Jede dieser Dezimalzahlen, kurz **Dezimalen** genannt, gehört in eine bestimmte Stelle, **Dezimalstelle** genannt. Hat eine Dezimalzahl

31) Vergl. hierüber auch die zugehörigen Lehrerhefte.

nur Dezimalen, so ist sie eine reine Dezimalzahl; ist eine ganze Zahl mit ihr verbunden, dann nennen wir sie eine gemischte Dezimalzahl. Die Trennung der Ganzen von den Dezimalen erfolgt durch den Dezimalstrich (auch Dezimalkomma genannt). Gezählt werden die Stellen von links nach rechts, es stehen also die Zentel in der ersten, die Hundertstel in der zweiten Stelle u. s. w. Dezimalzahlen können auf verschiedene Weise gelesen werden. Wir merken uns a) für reine Dezimalzahlen, z. B. 0,376, folgende Lesarten: 376 Tausendstel; 0 Ganze 3 Zehntel 7 Hundertstel 6 Tausendstel; 0 Komma 3 (drei) 7 (sieben) 6 (sechs); b) für gemischte Dezimalzahlen, z. B. 8,376, hingegen: 8 und 376 Tausendstel; 8 Ganze 3 Zehntel 7 Hundertstel 6 Tausendstel; 8 Komma 3 — 7 — 6. Außer diesen je drei Lesarten giebt es noch zwei andere, welche dadurch entstehen, daß man entweder die einzelnen Stellen oder die ganze Dezimalzahl in Einheiten der niedrigsten Stelle angiebt (z. B. bei 8,376 so: a) 8000 Tausendstel 300 Tausendstel 70 Tausendstel 6 Tausendstel und b) 8376 Tausendstel); es haben dieselben aber nicht viel praktischen Wert. Von den drei ersten Lesarten ist die erste zwar die übliche; die beiden andern sind aber die praktischern, wenn es sich um Diktate und Vergleichungen handelt. Etwas abweichend von den mitgeteilten sind die Lesarten bei benannten Dezimalzahlen. Doch unterscheidet man auch hier nur drei solcher. Beispiel: 3,46 ℳ. Übliche Lesart: 3 Mark 46 Pfennig; außerdem: 3 und 46 hundertstel Mark; 346 Pfennig. Man kann also jede benannte Dezimalzahl als zweisortige und einsortige Zahl lesen, im letztern Falle aber die höhere oder niedere Sorte berücksichtigen. Schwerfällig wäre folgende Lesart: 3 ganze und 46 hundertstel Mark, weshalb sie zu unterbleiben hat. Noch schwerfälliger würde sein: 3 Mark und 46 hundertstel Mark — oder vollends gar: 3 ganze Mark und 46 hundertstel Mark! — Aber auch die abgekürzte Leseweise, wie sie im Geschäftsverkehre jetzt vorkommt, 3 Mark 46, ist in der Schule aus naheliegenden Gründen nicht zuzulassen.

Für das mündliche Rechnen haben die Dezimalzahlen zwar nicht die Bedeutung wie die ganzen und die gebrochenen Zahlen; indessen soll damit doch auch nicht gesagt sein, daß es überhaupt zwecklos wäre, mit ihnen mündlich zu rechnen. Wir sind vielmehr der Ansicht, daß das mündliche Rechnen mit Dezimalzahlen nicht allein die Einsicht in das Wesen dieser Zahlen erheblich fördert, sondern daß es auch ein recht beachtenswertes Gegengewicht einem gerade hier sich sehr leicht einschleichenden Mechanismus gegenüber bildet. Außerdem ist es eine Ergänzung des mündlichen Rechnens mit ganzen Zahlen und eine nicht zu verachtende Vorstufe für ebendasselbe Rechnen mit Bruchzahlen. Und so lassen wir denn nachstehend eine streng geordnete Übersicht empfehlenswerter Übungen in der Reihenfolge der vier Grundrechnungsarten folgen. Der Einteilungsgrund, welcher uns dabei leitete, dürfte überall leicht herauszufinden sein. Die Ausrechnungen aber ergeben sich aus den Angaben des vierten und fünften Schuljahres.

Addition.

a) 7 + 0,8; 0,75 + 6; b) 0,5 + 0,4; 0,53 + 0,49; c) 0,4 + 0,56; 0,584 + 0,6; d) 5,38 + 2,49; e) 3,45 ℳ + 2,26 ℳ; 8,87 m + 3,46 m ꝛc.

Subtraktion.

a) 0,8 — 0,5; 0,72 — 0,45; b) 12,9 — 9; 12,9 — 0,3; 12,45 — 9,28; c) 7 — 0,8; 7 — 3,8; 0,2 — 0,05; d) 7,2 — 4,5; 7,3 — 3,56; e) 7,24 ℳ — 4,18 ℳ; 7,24 hl — 4,78 hl.

Recht zweckmäßig sind auch die Reihenaufgaben, welche durch fortgesetzte Addition oder Subtraktion entstehen, wie z. B.

0,9 + 0,9 = 1,8; 1,8 + 0,9 = 2,7; 2,7 + 0,9 = 3,6 ꝛc. 2,4 + 2,4 = 4,8; 4,8 + 2,4 = 7,2 ꝛc. 7 — 0,7 = 6,3; 6,3 — 0,7 = 5,6 ꝛc. 36 — 3,6 = 32,4; 32,4 — 3,6 = 28,8 ꝛc.

Multiplikation.

a) 0,67 . 10, 100, 1000; 3,67 . 10, 100, 1000; b) 0,67 . 8, 80, 800; 3,67 . 8, 80, 800; c) 0,67 . 24; 3,67 . 24; d) 3 . 0,8; 0,6 . 0,8; 3,6 . 0,8; e) 0,24 . 0,8; 6,24 . 0,8; f) 0,67 ℳ . 5; 5,32 m . 50; 0,85 hl . 32; 2,16 ℳ . 25.

Division.

a) 48 : 10, 100 . . .; 4,8 : 10, 100 . . .; 0,48 : 10, 100 . . ., b) 48 : 3; 4,8 : 3; 0,48 : 3; c) 48 : 5; 4,8 : 5; 0,48 : 5; d) 48 : 20; 4,8 : 20; 0,48 : 20; e) 48 : 15; 4,8 : 15; 0,48 : 15; f) 36,25 ℳ : 5; 42,60 m : 20; 56,25 hl : 15.

Die Zahl der Rechenfälle läßt sich aber bei der Division noch dadurch erheblich vermehren, daß auch im Divisor Dezimalzahlen auftreten, wie z. B. 9 : 0,6 = 90 : 6 = 15; 9,3 : 0,6 = (90 + 30 z) : 6 = 15,5; 8 : 1,6 = 80 : 16 = 5; 8,4 : 1,6 = 84 : 16 = 5,25 u. s. w.

Ähnlich wie bei Addition und Subtraktion können auch hier sehr zweckmäßige Reihenaufgaben gestellt werden. Beispiele:

a) 0,3 . 1; 0,3 . 2; 0,3 . 3 ꝛc. 1,2 . 1; 1,2 . 2; 1,2 . 3 ꝛc. ꝛc. 0,3 . 0,1; 0,3 . 0,2; 0,3 . 0,3 ꝛc. 1,2 . 0,1; 1,2 . 0,2; 1,2 . 0,3 ꝛc. ꝛc. b) 7 : 7; 6,3 : 7; 5,6 : 7 ꝛc. 12 : 12; 10,8 : 12 ꝛc. ꝛc. 7 : 0,7; 6,3 : 0,7; 5,6 : 0,7 ꝛc. 12 : 1,2; 10,8 : 1,2 ꝛc. ꝛc.

Außerdem sind allerlei eingekleidete und angewandte Aufgaben mit benannten und unbenannten Zahlen, insbesondere solche, bei denen von der Einheit auf eine Mehrheit und von einer Mehrheit auf die Einheit zu schließen ist, am Platze. Hierzu zwei Beispiele:

a) A braucht während eines Jahres 4 Raummeter Holz, wovon 1 Raummeter 7,25 ℳ kostet; wieviel hat er für Holz auszugeben? Antwort: Kostet 1 Raummeter 7,25 ℳ, dann kosten 4 Raummeter 7,25 ℳ mal 4, also 29 ℳ. b) Als man eine gewisse Zahl mit 4 multiplizierte, erhielt man 21,36; wie hieß die Zahl? Antwort: 21,36 : 4 = 5,34 hieß die Zahl.

Als Hauptgebiet des mündlichen Rechnens im sechsten Schuljahre haben indessen die Bruchzahlen zu gelten. Die Vorzüge, welche der „Bruchrechnung“ für immer das Heimatrecht in der Volksschule sichern, wurden oben ausführlicher dargelegt.[32]) Nicht der letzte dieser Vorzüge ist es aber, dessen hier noch Erwähnung geschieht. Bartholomäi sucht, wie wir wissen, den Grund aller der Bruchrechnung eigentümlichen Vorzüge darin, daß dieselbe nicht mit Zahlen, sondern mit Funktionen operiert. Wir pflichten dem bei und bemerken insbesondere, daß sich hieraus z. B. auch das Vorkommen zahlreicher Nebenoperationen, als Erweitern, Kürzen, Gleichnamigmachen u. a., erklärt. Bieten aber diese Nebenoperationen schon an und für sich dem mündlichen Rechnen ein reiches Material, so führen sie besonders noch dadurch, daß sie bei jeder der vier Grundrechnungsarten vereinzelt oder verbunden auftreten, zu einer solchen Fülle mannigfaltiger und bildender Aufgaben, wie sie weder bei ganzen Zahlen noch bei Dezimalzahlen angetroffen wird. Und zu alledem kommen noch die dem praktischen Teile des Rechenunterrichts angehörigen Aufgaben aus der Schluß- und Prozentrechnung. In der That, wenn hier von einem Übelstande zu reden wäre, so könnte er eher in einem Aufgabenreichtume als in einem Aufgabenmangel gefunden werden. Daher wird auch die Hauptthätigkeit des unterrichtenden Lehrers mehr in der richtigen Ausscheidung der weniger wertvollen Stoffe als in der Heranziehung brauchbarer Stoffe zu bestehen haben. Denn brauchbar für das mündliche Rechnen ist eigentlich alles, was zur Bruchrechnung gehört. Nur hat man es mit den Darstellungsformen bei den Bruchzahlen wenn möglich noch strenger als bei ganzen und Dezimal-Zahlen zu nehmen. Nicht nur, weil erfahrungsgemäß allein auf diese Weise Klarheit und Sicherheit erzielt werden, sondern auch, weil das Kind hier weniger leicht als bei ganzen und Dezimal-Zahlen selbständig zu wirklich guten Darstellungsformen gelangt.

Nach der Anordnung unseres „Rechenbuches“ geht der Bruchrechnung ein einleitender Abschnitt über Bruchzahlen voraus. In demselben werden die nichtdezimalen Maße benutzt, um zum Bruchzahlbegriffe zu gelangen. Dann folgt ein Vorkursus, gleichsam Anschauungskursus, über die gebräuchlichsten Bruchzahlen — Halbe, Viertel, Achtel; Drittel, Sechstel, Zwölftel; Fünftel, Zehntel, Zwanzigstel — zuletzt eine Zusammenfassung der dabei erzielten Ergebnisse: Entstehung der Bruchzahlen, Zähler und Nenner, echte und unechte Bruchzahlen, gemischte Zahlen, Verwandlung unechter Bruchzahlen in ganze oder gemischte Zahlen, gleichnamige und ungleichnamige Bruchzahlen, Erweitern, Kürzen, Gleichnamigmachen, Hauptnennersuchen. Vergrößerung und Verkleinerung der Bruchzahlen durch Veränderungen am Zähler oder Nenner 2c.

Wenn es nun auch richtig ist, zu fordern, daß Definitionen und Regeln in der Volksschule nicht die Ausgangspunkte bilden; so wäre es doch verkehrt, daraus zu folgern, daß dieselben überhaupt grundsätzlich zu vermeiden seien. Als Ergebnisse der Schularbeit dürfen sie nicht nur auftreten, sondern sie sollen es auch. Denn schreitet die Lernarbeit der Volksschule nicht bis zu klaren Begriffen fort, dann bleibt sie ebenso wie

32) Vergl. S. 141 ff.

jede andere geistige Thätigkeit eine unvollendete, und von einer verständigen Verwertung des Erlernten kann nicht die Rede sein. Die Klarheit des Begriffs tritt aber in der Definition in die Erscheinung, und die Anwendbarkeit desselben findet in der Regel ihren Ausdruck. Nur so gelangt der Zögling der Volksschule zum bewußten, verständigen Thun. Wenn das aber für alle Unterrichtsfächer der Volksschule gilt, so doch ganz besonders für den Rechenunterricht, und innerhalb desselben wieder für das Rechnen mit Bruchzahlen. Und so mögen denn hier, abweichend von dem Vorhergehenden, zunächst diejenigen Begriffe und Regeln, mit denen es die Bruchrechnung zu thun hat, näher bestimmt werden. Selbstverständlich kann es sich dabei nur um Ausdrucksformen handeln, welche, unbeschadet der sachlichen Richtigkeit, in erster Linie die Bedürfnisse und die Fassungskraft des Volksschülers fest im Auge behalten. Als solche dürften aber gelten:

1) Eine Bruchzahl entsteht, wenn man ein Ganzes in zwei oder mehr gleiche Teile zerlegt und einen oder mehrere dieser Teile nimmt.

2) Jede Bruchzahl besteht aus Zähler und Nenner. Der Nenner giebt an, in wieviele gleiche Teile das Ganze zerlegt wurde, der Zähler, wieviele dieser gleichen Teile die Bruchzahl enthält. (Der Nenner nennt die gleichen Teile, der Zähler zählt die davon genommenen Teile).

3) Sind Zähler und Nenner einer Bruchzahl gleich, dann ist der Wert der letztern gleich Eins; ist der Zähler kleiner als der Nenner, dann beträgt der Wert der Bruchzahl weniger, ist der Zähler größer als der Nenner, dann beträgt ihr Wert mehr als Eins. Bruchzahlen, deren Wert weniger als Eins beträgt, heißen echte, Bruchzahlen, deren Wert ebensoviel oder mehr als Eins beträgt, heißen unechte Bruchzahlen.

4) Zahlen, welche aus einer ganzen Zahl und einer echten Bruchzahl zusammengesetzt sind, nennt man gemischte Zahlen. (Beim Lesen derselben schaltet man der Deutlichkeit halber das Wörtchen „und" ein, also z. B. $2\frac{3}{4}$ = zwei und dreiviertel, $23\frac{3}{8}$ = dreiundzwanzig und dreiachtel u. s. w. Das Wort „Ganzes" oder „Ganze" einzuschalten, ist nicht nötig, auch nicht wünschenswert, denn es wird dadurch nichts an Deutlichkeit gewonnen, wohl aber eine breite, schleppende Form des Ausdrucks angenommen).

5) Jede unechte Bruchzahl läßt sich in eine ganze oder gemischte Zahl verwandeln und umgekehrt. Soll eine unechte Bruchzahl in eine ganze oder gemischte Zahl verwandelt werden, so dividiert man den Zähler durch den Nenner; soll eine ganze oder gemischte Zahl in eine (unechte) Bruchzahl verwandelt (kurz: eingerichtet!) werden, so multipliziert man die ganze Zahl mit dem Nenner und addiert (bei der gemischten Zahl) zum Produkte den Zähler der angehängten Bruchzahl. Die Summe, welche dadurch entsteht, ist der Zähler des unechten Bruches.

6) Bruchzahlen mit gleichen Nennern heißen gleichnamige, solche mit ungleichen Nennern ungleichnamige Bruchzahlen.

7) Multipliziert man Zähler und Nenner einer Bruchzahl mit derselben Zahl (Erweiterungszahl), so wird die Bruchzahl erweitert; dividiert man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl (Kürzungszahl), so wird die Bruchzahl gekürzt. Weder durch das Erweitern noch durch das Kürzen wird der Wert einer Bruchzahl verändert.

8) Die wichtigste Anwendung des Erweiterns ist das Gleichnamigmachen der Bruchzahlen. Bruchzahlen gleichnamig machen heißt, ihnen gleiche Nenner geben (sie auf gleiche Benennung bringen), ohne dabei ihren Wert zu verändern. Will man Bruchzahlen gleichnamig machen, so sucht man zuerst den Hauptnenner (gemeinschaftlichen Nenner, Generalnenner), d. h. die kleinste derjenigen Zahlen, in welchen alle Nenner (ohne Rest) aufgehen.

9) Eine Bruchzahl wird vergrößert, wenn man den Zähler vergrößert oder den Nenner verkleinert; eine Bruchzahl wird verkleinert, wenn man den Zähler verkleinert oder den Nenner vergrößert.

10) Jede Bruchzahl kann als eine Divisionsaufgabe betrachtet werden; der Zähler ist dann der Dividend und der Nenner der Divisor.

Noch weiter zu gehen, wäre für die Volksschule nicht nur überflüssig, sondern auch unzuläſſig.

Die Zahl der mündlichen Darstellungsformen ist hier natürlich eine sehr große. Da sich die Nebenfälle aber unschwer aus den Hauptfällen ableiten lassen, so genügt eine Berücksichtigung der letztern. Wir beschränken uns also auf dieselben unter Einhaltung der Reihenfolge unseres Rechenbuchs, indem wir überall das Normalverfahren angeben.

Addition und Subtraktion.[33])

Erste Abteilung: Die Bruchzahlen sind gleichnamig.

a) Aufgabe: $\frac{7}{8} + \frac{5}{8}$. Auflösung: Die Aufgabe heißt $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{8}$ ist $\frac{12}{8}$ oder 1 und $\frac{4}{8}$; $\frac{4}{8}$ ist $\frac{1}{2}$; also ist $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{8}$ gleich 1 und $\frac{1}{2}$.

b) Aufgabe: $4\frac{5}{12} - 3\frac{7}{12}$. Auflösung: Die Aufgabe heißt $4\frac{5}{12}$ weniger $3\frac{7}{12}$; $4\frac{5}{12}$ weniger 3 ist $1\frac{5}{12}$; $1\frac{5}{12}$ ist $\frac{17}{12}$; $\frac{17}{12}$ weniger $\frac{7}{12}$ ist $\frac{10}{12}$; $\frac{10}{12}$ ist $\frac{5}{6}$; also ist $4\frac{5}{12}$ weniger $3\frac{7}{12}$ gleich $\frac{5}{6}$.

Multiplikation und Division.

Erste Abteilung: Multiplikator und Divisor sind ganze Zahlen.

a) Aufgabe: $6\frac{3}{4}$. 10. Auflösung: Die Aufgabe heißt $6\frac{3}{4}$ mal 10; 6 mal 10 ist 60; $\frac{3}{4}$ mal 10 ist $\frac{30}{4}$; $\frac{30}{4}$ ist $7\frac{2}{4}$ oder $7\frac{1}{2}$; 60 und $7\frac{1}{2}$ ist $67\frac{1}{2}$; also ist $6\frac{3}{4}$ mal 10 gleich $67\frac{1}{2}$.

b) Aufgabe: $6\frac{2}{3}$: 4. Auflösung: Die Aufgabe heißt $6\frac{2}{3}$ durch 4; $6\frac{2}{3}$ ist $\frac{20}{3}$; $\frac{20}{3}$ durch 4 ist $\frac{5}{3}$ oder $1\frac{2}{3}$; also ist $6\frac{2}{3}$ durch 4 gleich $1\frac{2}{3}$.

c) Aufgabe: Mache $\frac{5}{6}$ und $\frac{4}{9}$ gleichnamig! Auflösung: Die Aufgabe heißt ꝛc. Da 6 und 9 durch 3 teilbar sind, so ist 2 mal 9 (oder 6 mal 3) = 18 der Hauptnenner; $\frac{1}{6}$ ist $\frac{3}{18}$, $\frac{5}{6}$ ist $\frac{15}{18}$; $\frac{1}{9}$ ist $\frac{2}{18}$, $\frac{4}{9}$ ist $\frac{8}{18}$; also geben $\frac{5}{6}$ und $\frac{4}{9}$, wenn man sie gleichnamig macht, $\frac{15}{18}$ und $\frac{8}{18}$.

Addition und Subtraktion.[34])

Zweite Abteilung: Die Bruchzahlen sind ungleichnamig.

a) Aufgabe: $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$. Auflösung: Die Aufgabe heißt $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$; Viertel und Sechstel geben Zwölftel; $\frac{1}{4}$ ist $\frac{3}{12}$, $\frac{3}{4}$ ist $\frac{9}{12}$; $\frac{1}{6}$ ist $\frac{2}{12}$, $\frac{5}{6}$ ist $\frac{10}{12}$; $\frac{9}{12}$ und $\frac{10}{12}$ ist $\frac{19}{12}$ oder $1\frac{7}{12}$; also ist $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ gleich $1\frac{7}{12}$.

b) Aufgabe: $5\frac{3}{4} - 3\frac{5}{6}$. Auflösung: Die Aufgabe heißt $5\frac{3}{4}$ weniger $3\frac{5}{6}$; $5\frac{3}{4}$ weniger 3 ist $2\frac{3}{4}$; Viertel und Sechstel geben Zwölftel; $\frac{1}{4}$ ist $\frac{3}{12}$, $\frac{3}{4}$ ist $\frac{9}{12}$; $\frac{1}{6}$ ist $\frac{2}{12}$, $\frac{5}{6}$ ist $\frac{10}{12}$; $2\frac{9}{12}$ weniger $\frac{10}{12}$ ist 2 weniger $\frac{1}{12}$ oder $1\frac{11}{12}$; also ist $5\frac{3}{4}$ weniger $3\frac{5}{6}$ gleich $1\frac{11}{12}$.

Multiplikation und Division.

Zweite Abteilung: Multiplikator und Divisor sind Bruchzahlen.

a) Aufgabe: $\frac{5}{6}$. $\frac{3}{8}$. Auflösung: Die Aufgabe heißt $\frac{5}{6}$ mal $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{6}$ mal $\frac{1}{8}$ ist $\frac{5}{48}$; $\frac{5}{48}$ mal 3 ist $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$; also ist $\frac{5}{6}$ mal $\frac{3}{8}$ gleich $\frac{5}{16}$.

b) Aufgabe: $4\frac{3}{4}$: $3\frac{2}{3}$. Auflösung: Die Aufgabe heißt $4\frac{3}{4}$ durch $3\frac{2}{3}$; $4\frac{3}{4}$ ist $\frac{19}{4}$, $3\frac{2}{3}$ ist $\frac{11}{3}$; die eingerichtete Aufgabe heißt also $\frac{19}{4}$ durch $\frac{11}{3}$; $\frac{19}{4}$ durch $\frac{1}{3}$ ist $\frac{57}{4}$; $\frac{57}{4}$ durch 11 ist $\frac{57}{44}$ oder $1\frac{13}{44}$; also ist $4\frac{3}{4}$ durch $3\frac{2}{3}$ gleich $1\frac{13}{44}$.

Sämtliche Rechenfälle der vier Grundrechnungsarten mit Bruchzahlen gestatten selbstverständlich auch die Durchführung mit benannten Zahlen.

---

33) Rechenbuch, Heft 5 (Ausg. A). S. 42.
34) Rechenbuch, Heft 5 (Ausg. A). S. 50.

So lange nicht Sortenverwandlungen damit verbunden sind, unterscheidet sich das Verfahren nicht von dem mit unbenannten Zahlen. Machen sich aber Sortenverwandlungen nötig, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Verwandlung in niedere und höhere Sorten. Dazu zwei Beispiele:

Sortenverwandlung mit Bruchzahlen:

a) Aufgabe: Wieviele Stück sind $3\frac{4}{5}$ Dutzend? Auflösung: Die Aufgabe heißt rc. 1 Dutzend sind 12 Stück; 3 Dutzend sind 36 Stück; $\frac{1}{5}$ Dutzend sind $\frac{12}{5}$ Stück, $\frac{4}{5}$ Dutzend sind $\frac{48}{5}$ Stück oder $9\frac{3}{5}$ Stück; 36 Stück und $9\frac{3}{5}$ Stück sind $45\frac{3}{5}$ Stück; also sind $3\frac{4}{5}$ Dutzend gleich $45\frac{3}{5}$ Stück.

b) Aufgabe: Wieviele Tage sind $77\frac{1}{3}$ Stunden? Auflösung: Die Aufgabe heißt rc. 24 Stunden sind 1 Tag; $77\frac{1}{3}$ Stunden sind 3 Tage $5\frac{1}{3}$ Stunden; 1 Stunde ist $\frac{1}{24}$ Tag, $\frac{1}{3}$ Stunde ist $\frac{1}{72}$ Tag; $5\frac{1}{3}$ Stunden sind $\frac{16}{3}$ Stunden oder $\frac{16}{72}$ Tag, gekürzt $\frac{2}{9}$ Tag; 3 Tage und $\frac{2}{9}$ Tag sind $3\frac{2}{9}$ Tage; also sind $77\frac{1}{3}$ Stunden gleich $3\frac{2}{9}$ Tage.

Mit der Multiplikation und Division der Bruchzahlen in Verbindung stehen aber auch Aufgaben aus der Zinsrechnung. Welche Fälle das sind und wo dieselben ihren richtigen Platz zu erhalten haben, ergiebt sich aus dem „Rechenbuche“. Deshalb nur einige Beispiele.

Berechnung von Zinsen. Gegeben: Kapital, Zinsfuß, Zeit.

a) Aufgabe: Wieviel Zinsen bringen 225 ℳ zu $3\frac{1}{3}\,\frac{0}{0}$ in 6 Jahren? Auflösung: Es sind die Zinsen von 225 ℳ zu $3\frac{1}{3}\,\frac{0}{0}$ für 6 Jahre zu berechnen. 100 ℳ bringen in 1 Jahre $3\frac{1}{3}$ ℳ und in 6 Jahren 20 ℳ Zinsen; 1 ℳ bringt in 1 Jahre $3\frac{1}{3}$ Pfennig und in 6 Jahren 20 Pfennig Zinsen; 225 ℳ bringen in 1 Jahre $3\frac{1}{3}$ Pfennig mal 225 und in 6 Jahren 20 Pfennig mal 225 Zinsen; 20 Pfennig mal 200 sind 40 ℳ und 20 Pfennig mal 25 sind 5 ℳ; 40 ℳ und 5 ℳ sind 45 ℳ; also bringen 225 ℳ zu $3\frac{1}{3}\,\frac{0}{0}$ in 6 Jahren 45 ℳ Zinsen.

b) Aufgabe: Wieviel Zinsen bringen 132 ℳ zu $3\,\frac{0}{0}$ in $2\frac{2}{3}$ Jahren? Auflösung: Es sind die Zinsen von 132 ℳ zu $3\,\frac{0}{0}$ für $2\frac{2}{3}$ Jahre zu berechnen. 100 ℳ bringen in 1 Jahre 3 ℳ und in $2\frac{2}{3}$ Jahren 8 ℳ Zinsen; 1 ℳ bringt in 1 Jahre 3 Pfennig und in $2\frac{2}{3}$ Jahren 8 Pfennig Zinsen; 132 ℳ bringen in $2\frac{2}{3}$ Jahren 8 Pfennig mal 132 gleich 800 Pfennig und 256 Pfennig, zusammen 1056 Pfennig oder 10,56 ℳ Zinsen; also bringen 132 ℳ zu $3\,\frac{0}{0}$ in $2\frac{2}{3}$ Jahren 10,56 ℳ Zinsen.

c) Aufgabe: Wieviel Zinsen bringen 328 ℳ zu $4\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$ in $3\frac{1}{3}$ Jahren? Auflösung: Es sind die Zinsen von 328 ℳ zu $4\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$ für $3\frac{1}{3}$ Jahre zu berechnen. 1 ℳ bringt in $3\frac{1}{3}$ Jahren $4\frac{1}{2}$ Pfennig mal $3\frac{1}{3}$, also 15 Pfennig Zinsen; 328 ℳ bringen in $3\frac{1}{3}$ Jahren 15 Pfennig mal 328, also 32,80 ℳ und 16,40 ℳ, zusammen 49,20 ℳ Zinsen; also bringen 328 ℳ zu $4\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$ in $3\frac{1}{3}$ Jahren 49,20 ℳ Zinsen.

Rechenvorteile.

Bei allen vier Grundrechnungsarten mit Bruchzahlen giebt es selbstverständlich auch mancherlei Vorteile. Als besonders bemerkenswerte heben wir folgende hervor:

a) Addition. Wenn mehr als zwei Summanden gegeben sind, können sich aus einer abgeänderten Reihenfolge derselben Vorteile ergeben. Beispiele:

1) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) + (\frac{2}{3} + \frac{5}{6}) = 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$; 2) $4\frac{1}{3} + 3\frac{1}{4} + 2\frac{5}{6} = 9\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} = 10\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = 10\frac{2}{12} + \frac{3}{12} = 10\frac{5}{12}$ u. s. w.

b) Subtraktion. Hier bieten Vergrößerung oder Verkleinerung des Minuenden und Subtrahenden Vorteile, wenn die Bruchzahlen sich Ganzen nähern. Beispiele:

1) $5\frac{7}{8} - 2\frac{2}{3} = (6 - 2\frac{2}{3}) - \frac{1}{8} = 3\frac{1}{3} - \frac{1}{8} = 3\frac{5}{24}$; $5\frac{7}{8} - 2\frac{2}{3} = (5\frac{7}{8} - 3) + \frac{1}{3} = 2\frac{7}{8} + \frac{1}{3} = 3\frac{5}{24}$; 2) $6\frac{1}{8} - 2\frac{2}{3} = (6 - 2\frac{2}{3}) + \frac{1}{8} = 3\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = 3\frac{11}{24}$.

Auch durch Aufwärtszählen gelangt man zu Vorteilen. Beispiel:

$15\frac{3}{4} - 9\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + 5\frac{3}{4} = \frac{4}{20} + 5\frac{15}{20} = 5\frac{19}{20}$ u. s. w.

c) Multiplikation. Es können die Faktoren entweder in bequeme (z. B.

ganze) oder kleinere Zahlen verwandelt werden; auch die Vertauschung der Nenner bietet Vorteile, wenn verwandte Zahlen vorhanden sind. *Beispiele:*

1) $\frac{14}{15} \,.\, 7 = 1 \,.\, 7 - \frac{1}{15} \,.\, 7 = 7 - \frac{7}{15} = 6\frac{8}{15}$; $8\frac{14}{15} \,.\, 7 = 9 \,.\, 7 - \frac{1}{15} \,.\, 7 = 63 - \frac{7}{15} = 62\frac{8}{15}$; 2) $\frac{11}{12} \,.\, 23 = \frac{11}{12} \,.\, 24 - \frac{11}{12} = 22 - \frac{11}{12} = 21\frac{1}{12}$; $\frac{11}{12} \,.\, 25 = \frac{11}{12} \,.\, 24 + \frac{11}{12} = 22\frac{11}{12}$; 3) $12 \,.\, \frac{3}{4} = \frac{12}{4} \,.\, 3 = 3 \,.\, 3 = 9$; $7 \,.\, \frac{13}{14} = \frac{7}{14} \,.\, 13 = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8} \,.\, \frac{4}{9} = \frac{3}{9} \,.\, \frac{4}{8} = \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ u. s. w.

d) *Division.* Zu den bemerkenswertesten Abkürzungen gehören diejenigen, welche sich aus dem Vorhandensein verwandter Zahlen ergeben. Dieselben sind aber, da in solchen Fällen die in den Quotienten vorkommenden Bruchzahlen stets gehoben werden müssen, falls die Verwandtschaft der Zahlen vorher unbeachtet blieb, schon oben berücksichtigt worden. Nicht erwähnt worden ist dagegen ein durch Vergrößerung des Dividenden entstehender Vorteil. *Beispiel:*

$7\frac{11}{12} : 4 = 8 : 4 - \frac{1}{12} : 4 = 2 - \frac{1}{48} = 1\frac{47}{48}$.

Auch die Zerlegung des Divisors in Faktoren kann, da sie auf kleinere Zahlen führt, in einzelnen Fällen Vorteile bieten. *Beispiel:*

$25\frac{5}{6} : 15 = 25\frac{5}{6} : 5 : 3 = 5\frac{1}{6} : 3 = 1\frac{13}{18}$. Hier nicht berücksichtigte Einzelfälle, Reihenaufgaben, fortlaufende Übungen u. s. w. ergeben sich aus den *Lehrerheften* in Verbindung mit den *Schülerheften.*

Schlußrechnung mit Bruchzahlen.

Die Schlußrechnung zerfällt nach einer bereits gegebenen Aufstellung in drei natürliche Gruppen: Schluß von der Einheit auf eine Mehrheit, Schluß von einer Mehrheit auf die Einheit, Schluß von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit. Diese Aufstellung könnte auch für Bruchzahlen beibehalten werden. Indessen empfiehlt es sich doch aus praktischen Gründen mehr, das Auftreten der Bruchzahlen in den einzelnen Gliedern zu betonen. Da nun durch die Schlüsse stets vom ersten auf das dritte Glied überzuleiten ist, so wird es wesentlich darauf ankommen, ob und welche Bruchzahlen in diesen beiden Gliedern vorkommen, und es werden daher zweckmäßig Aufgaben mit *gleichnamigen* und Aufgaben mit *ungleichnamigen* Bruchzahlen im ersten und dritten Gliede unterschieden. Innerhalb jeder Gruppe können allerdings noch Abstufungen vorkommen. Doch ist der Fall Bruchzahl und ganze Zahl oder umgekehrt im ersten und dritten Gliede nicht als besonderer zu rechnen. Hierzu drei *Beispiele:*

a) *Aufgabe:* Eine Gasflamme verbrauchte in $7\frac{1}{5}$ Stunden für 28 ₰ Gas; wieviel durchschnittlich in 1 Stunde? *Auflösung:* Die Aufgabe heißt ꝛc. Kostet das Gas, welches in $7\frac{1}{5}$ Std. oder $\frac{36}{5}$ Std. verbraucht wird, 28 ₰, so kostet das in $\frac{1}{5}$ Stunde verbrauchte Gas den 36. Teil von 28 ₰, also $\frac{28}{36}$ ₰ oder $\frac{7}{9}$ ₰; in 1 Std. braucht man also für $\frac{7}{9}$ ₰ . 5 = $\frac{35}{9}$ ₰ = $3\frac{8}{9}$ ₰ Gas. *Zusammenfassung:* Wenn eine Gasflamme in $7\frac{1}{5}$ Std. für 28 ₰ Gas verbraucht, so verbraucht sie in 1 Stunde durchschnittlich für $3\frac{8}{9}$ ₰.

b) *Aufgabe:* Ein Ölvorrat reichte 30 Tage, als man durchschnittlich jeden Tag $3\frac{3}{4}$ Std. davon brannte; wie lange wird er reichen, wenn die tägliche durchschnittliche Brennzeit $5\frac{1}{4}$ Std. beträgt? *Auflösung:* Die Aufgabe heißt ꝛc. Wird $3\frac{3}{4}$ Std. oder $\frac{15}{4}$ Std. gebrannt, so reicht man 30 Tage, bei $\frac{1}{4}$ Stunde Brennzeit also 30 Tage mal 15 oder 450 Tage und bei $5\frac{1}{4}$ Std. oder $\frac{25}{4}$ Std. 450 Tage durch 25, also 18 Tage. *Zusammenfassung:* Wenn ein Ölvorrat bei einer täglichen Brennzeit von $3\frac{3}{4}$ Std. 30 Tage reicht, so reicht er bei einer täglichen Brennzeit von $5\frac{1}{4}$ Std. nur 18 Tage.

c) *Aufgabe:* Als die Gasflammen eines Hauses täglich $4\frac{1}{2}$ Std. brannten, betrug die monatliche Gasrechnung 14,85 ℳ; wieviel wird sie betragen, wenn die tägliche Brennzeit nur $3\frac{3}{5}$ Std. beträgt? *Auflösung:* Die Aufgabe heißt ꝛc. Beträgt bei $4\frac{1}{2}$ Std. oder $\frac{9}{2}$ Std. die Rechnung 14,85 ℳ, so beträgt sie für $\frac{1}{2}$ Std. den 9. Teil von 14,85 ℳ, also 1,65 ℳ und für 1 Std. 1,65 ℳ mal 2 = 3,30 ℳ; bei $\frac{1}{5}$ Std. Brennzeit würde das Gas 3,30 ℳ : 5 = 0,66 ℳ kosten und bei $3\frac{3}{5}$ Std. oder $\frac{18}{5}$ Std. 18 mal soviel, also 0,66 ℳ . 18 = 13,20 ℳ — 1,32 ℳ = 11,88 ℳ. Zusammenfassung: Wenn bei einer täglichen Brennzeit von $4\frac{1}{2}$ Stunden die monatliche Gasrechnung 14,85 ℳ beträgt, dann wird dieselbe bei einer täglichen Brennzeit von $3\frac{3}{5}$ Stunden 11,88 ℳ betragen.

g) Das siebente und achte Schuljahr.

Es handelt sich in diesen beiden Schuljahren vorwiegend um den praktischen Teil des Volksschulrechnens. Derselbe ist fortzuführen und abzuschließen. Was den theoretischen Teil anlangt, so hat es dieser jetzt fast nur mit einigen neuen schriftlichen Darstellungsformen neben Wiederholung des früher Erlernten zu thun. Der praktische Teil aber hat die Schlußrechnung im Zusammenhange zu berücksichtigen, die wichtigste Nebenform derselben, die Prozentrechnung, durchzuarbeiten, dazu die Unterabteilungen beider, soweit Zeit- und andere Verhältnisse es gestatten oder fordern. Alles, was sonst noch hinzu kommt, ist nur neu in Beziehung auf die Sachgebiete, welche behandelt werden, also nicht in Beziehung auf die Darstellungsformen.

Der Schlußrechnung ist bereits im fünften und sechsten Schuljahre gedacht worden. Im fünften Schuljahre handelte es sich um Aufgaben mit ganzen, im sechsten Schuljahre um solche mit Dezimal- und Bruchzahlen. Jetzt braucht in dieser Beziehung kein Unterschied gemacht zu werden, d. h. es dürfen Aufgaben mit ganzen, gebrochenen und dezimalen Zahlen in bunter Mischung folgen. Dagegen kann, nachdem die drei Hauptfälle (Schluß von der Einheit auf eine Mehrheit, Schluß von einer Mehrheit auf die Einheit, Schluß von einer Mehrheit auf eine andere) behandelt worden sind, größeres Gewicht auf die besondern Lösungsarten gelegt werden. Die wertvollsten derselben sind folgende vier: a) Schluß von einer Mehrheit auf ein Vielfaches derselben. b) Schluß von einer Mehrheit auf einen Teil derselben. c) Schluß mit Hilfe eines gemeinschaftlichen Teilers. d) Lösung mit Hilfe von Zerlegungen. Neben den geraden Verhältnissen sind selbstverständlich auch die ungeraden zu berücksichtigen. Auch ist die Einflechtung von Nebenumständen, welche Nebenrechnungen nach sich ziehen, hier am Platze. Dazu folgende Beispiele:

a) Schluß von der Einheit auf eine Mehrheit.

Aufgabe: Wieviel wird jährlich erspart, wenn das einzelne Kilogramm Zucker 75 ₰ kostet, für jeden der fünf 8 kg schweren Zuckerhüte aber 5,30 ℳ zu zahlen ist? Auflösung: Kostet ein Zuckerhut 5,30 ℳ, so kosten 5 Zuckerhüte fünfmal so viel, also 26,50 ℳ. Diese 5 Zuckerhüte wiegen zusammen 40 kg. Kostet 1 kg Zucker einzeln 75 ₰, so kosten 40 kg 75 ₰ mal 40, oder 75 ₰ mal 4 mal 10, also 30 ℳ; das sind 3,50 ℳ mehr als beim Einkaufe im ganzen. Zusammenfassung: Kostet ein 8 kg schwerer Zuckerhut 5,30 ℳ, das einzelne Kilo aber 75 ₰, dann erspart man an fünf Zuckerhüten 3,50 ℳ.

b) *Schluß von einer Mehrheit auf die Einheit.*

Aufgabe: A kauft 5 Dutzend Taschentücher für 33 ℳ ein und verkauft jedes Stück mit 25 ₰ Gewinn; wie teuer verkauft er das Stück? *Auflösung*: 5 Dutzend sind 60 Stück; kosten 60 Stück 33 ℳ, so kostet ein Stück den 60. Teil von 33 ℳ, also 55 ₰. Da jedes Stück mit 25 ₰ Gewinn verkauft werden soll, so beträgt der Verkaufspreis für ein solches 55 ₰ + 25 ₰, also 80 ₰. *Zusammenfassung*: Wenn 5 Dutzend Taschentücher im Einkaufe 33 ℳ kosten, beim Verkaufe aber an jedem Stück 25 ₰ gewonnen werden soll, so beträgt der Verkaufspreis für ein Stück 80 Pfennig.

c) *Schluß von einer Mehrheit auf eine andere über die Einheit.*

Aufgabe: Zur Anfertigung eines Zimmerteppichs würde man 32 m Stoff brauchen, wenn derselbe 0,85 m breit läge; wieviele Meter sind nötig, wenn der Stoff nur 0,64 m breit liegt? *Auflösung*: Braucht man bei 0,85 m Breite 32 m Stoff, so braucht man bei 0,01 m Breite 85 mal soviel Stoff, also 32 m mal 85, und bei 0,64 m Breite den 64. Teil von 32 m mal 85; 32 m mal 85 durch 64 ist gleich 1 m mal 85 durch 2, also 42,50 m. *Zusammenfassung*: Wenn man bei 0,85 m Breite 32 m Stoff braucht, so braucht man bei 0,64 m Breite 42,50 m Stoff.

d) *Schluß von einer Mehrheit auf ein Vielfaches derselben.*

Aufgabe: Ein Lebensmittelvorrat würde für 2 Personen $3\frac{1}{2}$ Monat gereicht haben; wenn aber noch 4 Personen dazu kommen, wie lange reicht der Vorrat dann? *Auflösung*: Kommen noch 4 Personen hinzu, so sind es zusammen 6 Personen. Reichen 2 Personen $3\frac{1}{2}$ Monat, dann reichen 6 Personen den 3. Teil von $3\frac{1}{2}$ Monat, also $1\frac{1}{6}$ Monat. *Zusammenfassung*: Reicht ein Lebensmittelvorrat für 2 Personen $3\frac{1}{2}$ Monat, dann reicht er, wenn noch 4 Personen dazu kommen, $1\frac{1}{6}$ Monat.

e) *Schluß von einer Mehrheit auf einen Teil derselben.*

Aufgabe: Multipliziert man eine Zahl mit $8\frac{2}{5}$, so erhält man $12\frac{1}{2}$; wieviel erhält man, wenn man dieselbe Zahl mit $2\frac{4}{5}$ multipliziert? *Auflösung*: $8\frac{2}{5}$ ist 3 mal $2\frac{4}{5}$; erhält man nun $12\frac{1}{2}$ durch Multiplikation mit $8\frac{2}{5}$, so muß man durch Multiplikation mit $2\frac{4}{5}$ den dritten Teil von $12\frac{1}{2}$, also $4\frac{1}{6}$ erhalten. *Zusammenfassung*: Erhält man durch Multiplikation mit $8\frac{2}{5}$ als Produkt $12\frac{1}{2}$, so erhält man durch Multiplikation mit $2\frac{4}{5}$ als Produkt $4\frac{1}{6}$.

f) *Schluß mit Hilfe eines gemeinschaftlichen Teilers.*

Aufgabe: Von einem Stück Leinwand, das 32 m groß ist und 23,04 ℳ kostet, werden 12 m zum Einkaufspreise abgegeben; wieviel kosten dieselben? *Auflösung*: Der gemeinschaftliche Teiler für 32 und 12 ist 4. Kosten 32 m 23,04 ℳ, so kosten 4 m den achten Teil davon, also 3 ℳ — 12 ₰ (= 2,88 ℳ), und 12 m das 3fache von (3 ℳ — 12 ₰), also 9 ℳ — 36 ₰ = 8,64 ℳ. *Zusammenfassung*: Kosten 32 m 23,04 ℳ, so kosten 12 m 8,64 ℳ.

g) *Lösung mit Hilfe von Zerlegungen.*

Aufgabe: B gab in 14 Tagen 7,56 ℳ für unnütze Dinge aus. Wenn er das im Monat Juni so fortgesetzt hätte, wie groß wäre die Ausgabe gewesen? *Auflösung*: Der Juni hat 30 Tage, das sind 28 Tage + 2 Tage; beträgt die Ausgabe für 14 Tage 7,56 ℳ, so beträgt sie für 28 Tage 7,56 ℳ mal 2, also 15,12 ℳ, und für 2 Tage $\frac{1}{7}$ von 7,56 ℳ, das sind 1,08 ℳ; 15,12 ℳ und 1,08 ℳ sind zusammen 16,20 ℳ; also hätte die Ausgabe im Juni 16,20 ℳ betragen. *Zusammenfassung*: Giebt B in 14 Tagen 7,56 ℳ für unnütze Dinge aus, so beträgt die Ausgabe im Juni, wenn er seine Lebensweise fortsetzt, 16,20 ℳ.

Auch die *Prozentrechnung* hat bereits Berücksichtigung gefunden. Im *sechsten* Schuljahre sind die Zinsen nach Prozenten berechnet worden, auch sind Aufgaben mit Prozentzahlen vorgekommen, in denen nach dem Kapitale oder nach der Zeit gefragt wurde. Indessen war das doch nur eine Unterabteilung der Prozentrechnung. Denn nach Prozenten kann man außer Kapitalzinsen auch Gewinn und Verlust überhaupt, sodann Zu- und Abnahmen, Bestandteile, Abzüge u. dgl. m. berechnen. Streng genommen ist die Prozentrechnung allerdings nichts weiter als eine besondere Art der Schlußrechnung, und es findet daher auch kein wesentlicher Unterschied zwischen der mündlichen Darstellung bei ihr und derjenigen bei der Schlußrechnung statt. Indessen führt die stete Gegenwart der Zahl 100 doch auf manche bemerkenswerte Eigentümlichkeit, sowie auf Abkürzungen, die als wertvolle Rechenvorteile gelten dürfen, sodaß wir nicht umhin können, etwas näher darauf einzugehen.

Zunächst handelt es sich in der Prozentrechnung darum, den Kindern den Begriff „Prozent" recht klar zu machen, denn so einfach die Sache scheint, so schwer gewöhnen sich die Kinder daran, mit dem Worte „Prozent" den richtigen Inhalt zu verbinden. An das Frühere anknüpfend, ist zunächst festzuhalten: Mit Prozent bezeichnet man die Zinsen für hundert Mark auf ein Jahr.[35]) Weiterhin erst folgt die allgemeinere Auffassung. Dabei muß die Bedeutung der Prozentrechnung, welche darin besteht, daß man durch die Zurückführung aller Angaben auf 100 einen ebenso sichern als bequemen Maßstab gewinnt, erkannt werden. Am geeignetsten hierzu erweist sich die Feststellung der Größe des Gewinnes oder Verlustes. Denn wenn eine Ware zu 6 ℳ eingekauft und mit 8 ℳ verkauft wird, so beträgt der Gewinn zwar nur 2 ℳ, es ist das aber doch ein größerer Gewinn, als wenn der Einkauf 40 ℳ und der Verkauf 50 ℳ beträgt, da im ersten Falle $33\frac{1}{3}$ Prozent, im letzten Falle aber nur 25 Prozent gewonnen werden.

Die Lösung der Aufgaben der Prozentrechnung im engern Sinne, also der Zinsrechnung, wird zweckmäßig durch zwei Gruppen von Vorübungen, die auch als Reihenaufgaben auftreten können, eingeleitet. In der ersten Gruppe sind die Prozente gegeben, in der zweiten Gruppe werden sie gesucht. Dabei sind die Prozentzahlen besonders hervorzuheben und einzuprägen, durch welche 100 ohne Rest teilbar ist:

$1\frac{0}{0}$ ist $\frac{1}{100}$ der gegebenen Zahl; $2\frac{0}{0} = \frac{1}{50}$; $4\frac{0}{0} = \frac{1}{25}$; $5\frac{0}{0} = \frac{1}{20}$; $10\frac{0}{0} = \frac{1}{10}$; $20\frac{0}{0} = \frac{1}{5}$; $25\frac{0}{0} = \frac{1}{4}$; $50\frac{0}{0} = \frac{1}{2}$ der gegebenen Zahl. Dazu auch gemischte Zahlen, z. B. $2\frac{1}{2}\frac{0}{0} = \frac{1}{40}$; $3\frac{1}{3}\frac{0}{0} = \frac{1}{30}$; $6\frac{2}{3}\frac{0}{0} = \frac{1}{15}$; $8\frac{1}{3}\frac{0}{0} = \frac{1}{12}$; $12\frac{1}{2}\frac{0}{0} = \frac{1}{8}$; $16\frac{2}{3}\frac{0}{0} = \frac{1}{6}$; $33\frac{1}{3}\frac{0}{0} = \frac{1}{3}$ der gegebenen Zahl. u. s. w.

Hat sich der Schüler das vorstehende zu eigen gemacht, so vermag er viele Aufgaben der Prozentrechnung auf leichte Weise zu lösen. Die Umkehrungen der vorstehenden Gleichungen aber kommen in Betracht, wenn die Prozentzahlen gesucht werden. Ist die erste Zahl der 100. Teil der zweiten, dann beträgt sie 1 Prozent derselben; ist sie der 50. Teil oder $\frac{1}{50}$, so beträgt sie 2 Prozent; ist sie der 25. Teil oder $\frac{1}{25}$, so beträgt

35) pro = für; centum = Hundert; procent (Abkürzung von pro cento) = für ein Hundert.

sie 4 Prozent u. s. w. Selbstredend sind die vorhin aufgeführten nicht die einzigen Prozentzahlen, welche man anwendet. Daher haben sich auch die Vorübungen nicht auf sie zu beschränken. Wichtig sind, wegen ihres häufigen Vorkommens im Geldverkehre, namentlich die zwischen 3 und 5 liegenden Prozentzahlen, die mit den Bruchzahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ gemischten Zahlen, also $3\frac{1}{2}\%$, $3\frac{1}{3}\%$, $3\frac{2}{3}\%$, $3\frac{1}{4}\%$ ꝛc.

Sind diese und ähnliche Vorübungen beendet, so folgt zunächst die *Berechnung von Kapitalzinsen*. Dieselbe läßt sich in drei Gruppen zerlegen: Berechnung der Zinsen a) für Jahre, b) für Monate, c) für Tage. Eigentlich hat man es aber in allen drei Gruppen mit der Zinsenberechnung für Jahre zu thun, denn der Monat wird als $\frac{1}{12}$ Jahr, der Tag als $\frac{1}{360}$ Jahr betrachtet. Handelt es sich um Jahre, so gilt als einfachster Fall *ein* Jahr, dann folgen *mehrere* Jahre, hierauf *Bruchteile* des Jahres (z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ J.), endlich *gemischte Zahlen*. Auch bei Monaten kann Gebrauch von dieser Einteilung gemacht werden, bei Tagen hingegen hat dieselbe keinen Sinn. Indem wir bezüglich der Einzelheiten auf unser „Rechenbuch“ [36]) verweisen, lassen wir drei ausgeführte Beispiele, für jede Gruppe eins, folgen.

Berechnung der Zinsen für Jahre, Monate und Tage.

a) *Aufgabe:* Berechne die Zinsen von 250 ℳ zu $3\frac{1}{3}\%$ in $1\frac{1}{2}$ Jahren? *Auflösung:* Die Aufgabe heißt ꝛc. 250 ℳ bringen in 1 Jahre zu 1 Prozent 2,50 ℳ Zinsen ein, also zu $3\frac{1}{3}\%$ in $1\frac{1}{2}$ Jahren = 2,50 ℳ mal $3\frac{1}{3}$ mal $1\frac{1}{2}$ oder 2,50 ℳ mal $\frac{10}{3}$ mal $\frac{3}{2}$ oder 2,50 ℳ . 5 = 12,50 ℳ. *Zusammenfassung:* 250 ℳ bringen zu $3\frac{1}{3}\%$ in $1\frac{1}{2}$ Jahren 12,50 ℳ Zinsen ein.

b) *Aufgabe:* A hat am 1. Januar 840 ℳ zu $4\frac{1}{2}\%$ geliehen und zahlt dieselben am 1. Mai desselben Jahres mit den Zinsen zusammen zurück. Wieviel beträgt die Rückzahlung? *Auflösung:* Die Aufgabe heißt ꝛc. Vom 1. Januar bis 1. Mai sind es 4 Monate oder $\frac{1}{3}$ Jahr. Da nun 840 ℳ zu 1 % in 1 Jahre 8,40 ℳ Zinsen bringen, so bringen sie zu $4\frac{1}{2}\%$ in 4 Monaten = 8,40 ℳ . $4\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ oder 8,40 ℳ . $\frac{3}{2}$ oder 4,20 ℳ . 3, das sind 12,60 ℳ; es hat also A 840 ℳ + 12,60 ℳ = 852,60 ℳ zurückzuzahlen. *Zusammenfassung:* Zahlt A am 1. Mai ein am 1. Januar zu $4\frac{1}{2}\%$ geliehenes Kapital von 840 ℳ nebst Zinsen zurück, so beträgt die Rückzahlung 852,60 ℳ.

c) *Aufgabe:* Wieviel betragen die Zinsen von 125 ℳ zu 6 % in 24 Tagen? *Auflösung:* Die Aufgabe heißt ꝛc. Da 125 ℳ zu 1 % in 1 Jahre 1,25 ℳ Zinsen bringen, so bringen sie zu 6 % 1,25 ℳ mal 6 und in 24 Tagen 1,25 ℳ mal 6 mal $\frac{24}{360}$ oder, da 6 . $\frac{24}{360}$ gleich $\frac{2}{5}$ ist, 1,25 ℳ . $\frac{2}{5}$, also 0,50 ℳ Zinsen. *Zusammenfassung:* Die Zinsen von 125 ℳ zu 6 % in 24 Tagen betragen 0,50 ℳ.

Die meisten Rechenbücher ꝛc. behandeln an dieser Stelle noch drei weitere Fälle: Berechnung des Kapitals, des Zinsfußes und der Zeit. Wir verweisen dieselben, mit Ausnahme des an zweiter Stelle aufgeführten Falles, in einen besondern Abschnitt, „*Ergänzungsaufgaben*“ überschrieben, weil die Bedeutung, die solche Aufgaben für den Volksschüler haben, keine große ist.

Deshalb hier auch nur ein Beispiel.

---

36) Rechenbuch, Heft 6 (Ausg. A). S. 23 f.

Berechnung des Zinsfußes.

Aufgabe: K bezog von 240 ℳ in 3 Jahren 26,40 ℳ Zinsen; welches war der Zinsfuß? Auflösung: Die Aufgabe heißt ꝛc. Bezieht K in 3 Jahren 26,40 ℳ Zinsen, so bezieht er in 1 Jahre 8,80 ℳ; bringen 240 ℳ in 1 Jahre 8,80 ℳ Zinsen, so bringt 1 ℳ in 1 Jahre $3\frac{2}{3}$ ₰, das sind $3\frac{2}{3}$ %. Zusammenfassung: Bezieht K von 240 ℳ in 3 Jahren 26,40 ℳ Zinsen, so hat er dieselben zu $3\frac{2}{3}$ % ausgeliehen.

Viel wichtiger sind die übrigen Unterabteilungen der Prozentrechnung, voran die Berechnung von Gewinn und Verlust. In jeder der hierhergehörigen Aufgaben handelt es sich um drei Größen: Einkauf, Verkauf und Gewinn bez. Verlust. Daraus lassen sich sechs Aufgabengruppen bilden: a) Berechnung des Gewinnes aus Einkauf und Verkauf; b) Berechnung des Einkaufs aus Verkauf und Gewinn; c) Berechnung des Verkaufs aus Einkauf und Gewinn; d), e) und f) die drei entsprechenden Aufgabengruppen mit Verlust. Dadurch, daß Gewinn und Verlust in Prozentzahlen ausgedrückt sind, bez. ausgedrückt werden sollen, wird jede der in diese sechs Gruppen verwiesenen Aufgaben zu einer der Prozentrechnung angehörigen. Hierzu drei Beispiele.

Berechnung von Gewinn und Verlust nach Prozent.

a) Aufgabe: 1 hl Kartoffeln kostete im Einkaufe 4,50 ℳ; der Händler aber verkaufte 1 l davon mit 6 ₰. Wieviel Prozent betrug sein Gewinn oder Verlust? Auflösung: Die Aufgabe heißt ꝛc. Kostet 1 l 6 ₰, so kostet 1 hl 6 ℳ, der Händler gewinnt also 1,50 ℳ an 4,50 ℳ; da nun 1,50 ℳ der dritte Teil von 4,50 ℳ ist, so beträgt der Gewinn $33\frac{1}{3}$ Prozent. Zusammenfassung: Wenn 1 hl Kartoffeln im Einkaufe 4,50 ℳ kostet, 1 l davon aber mit 6 ₰ verkauft wird, so gewinnt der Händler $33\frac{1}{3}$ Prozent.

b) Aufgabe: Wieviel Prozent Verlust hat man, wenn eine Ware, die 5,60 ℳ gekostet hat, 1,40 ℳ unter dem Einkaufspreise verkauft werden muß? Auflösung: Die Aufgabe heißt ꝛc. Verliert man an einer Ware, die 5,60 ℳ gekostet hat, 1,40 ℳ, so verliert man daran den 4. Teil, also 25 Prozent. Zusammenfassung: Wird eine Ware, welche 5,60 ℳ gekostet hat, mit 1,40 ℳ Verlust verkauft, so beträgt dieser Verlust 25 %.

c) Aufgabe: A gewann an einer Ware 20 %, indem er sie für 8,40 ℳ verkaufte; wie teuer war sie im Einkaufe? Auflösung: Die Aufgabe heißt ꝛc. Bei 20 % Gewinn beträgt der Einkaufspreis 100 ℳ und der Verkaufspreis 120 ℳ, es ist also der Gewinn der 6. Teil des Verkaufspreises; da nun der 6. Teil von 8,40 ℳ 1,40 ℳ ist, so beträgt der Einkaufspreis 8,40 ℳ weniger 1,40 ℳ, also 7 ℳ. Zusammenfassung: Gewinnt A an einer Ware, die er zu 8,40 ℳ verkauft, 20 Prozent, so hat dieselbe im Einkaufe 7 ℳ gekostet.

Die Berechnung von Zu- und Abnahmen nach Prozenten ist weniger eine Geldrechnung als eine Rechnung mit allerlei Maßen und sonstigen Zahlen. Daher werden hier auch wesentlich andere Sachgebiete als bisher behandelt, ein Vorzug, den man sich nicht entgehen lassen darf. Die Darstellungsformen selbst zeigen wenig Veränderungen. Deshalb auch nur zwei ausgeführte Beispiele.

a) Aufgabe: Vor 40 Jahren kostete 1 kg Kalbfleisch 0,36 ℳ; jetzt kostet es 0,90 ℳ. Wieviel Prozent beträgt die Preissteigerung? Auflösung: Die Aufgabe heißt ꝛc. Auf 36 Pfennig beträgt die Preissteigerung 54 Pfennig, auf 1 Pfennig $1\frac{1}{2}$ Pfennig und auf 100 Pfennig 150 Pfennig, also überhaupt 150 %. Zusammenfassung: Da der Preis des Kalbfleisches von 36 ₰ auf 90 ₰ gestiegen ist, so beträgt die Preissteigerung bei demselben 150 Prozent.

b) Aufgabe: Von einer Schulklasse, welche 45 Schüler zählte, erkrankten gleichzeitig 40 % an den Masern; wieviele Schüler wohnten also dem Unterrichte noch bei? Auflösung: Die Aufgabe heißt ꝛc. Da 40 % erkrankten, so waren noch 60 % anwesend, also von 100 Schülern 60 Schüler, oder von 5 Schülern 3 Schüler und von 45 Schülern 9 mal 3 Schüler = 27 Schüler. Zusammenfassung: Wenn von 45 Schülern 40 % gleichzeitig erkranken, so wird die Schulklasse noch von 27 Schülern besucht.

Auch die Berechnung von Bestandteilen erstreckt sich auf zahlreiche Sachgebiete. Dazu ein Beispiel.

Aufgabe: Glockenmetall besteht aus 77 % Kupfer, 21 % Zinn und 2 % Antimon; wieviel von jedem Metalle braucht man zu einer 950 kg schweren Glocke? Auflösung: Die Aufgabe heißt ꝛc. 950 kg sind $9\frac{1}{2}$ hundert Kilogramm, also braucht man 77 kg mal $9\frac{1}{2}$ = (770 — $38\frac{1}{2}$) kg = 731,5 kg Kupfer, 21 kg mal $9\frac{1}{2}$ = (210 — $10\frac{1}{2}$) kg = 199,5 kg Zinn und 2 kg mal $9\frac{1}{2}$ = 19 kg Antimon. Zusammenfassung: Wenn das Glockenmetall aus 77 % Kupfer, 21 % Zinn und 2 % Antimon besteht, so braucht man zu einer 950 kg schweren Glocke 731,5 kg Kupfer, 199,5 kg Zinn und 19 kg Antimon.

Was die Berechnung von Abzügen betrifft, so ist dieselbe wesentlich wieder eine Geldrechnung. Man pflegt sie mit dem Namen Rabattrechnung zu belegen, wenn es sich um einen Erlaß bei Warenkäufen handelt, während die Berechnung der Abzüge bei Geldgeschäften Diskontrechnung genannt wird. Besondere Rechnungsarten sind aber beide ebenfalls nicht.

Aufgabe: Eine Musikalienhandlung gewährte bei Barzahlungen 25 % Rabatt; wieviel beträgt die Barzahlung bei einer Rechnung von 36 ℳ? Auflösung: Die Aufgabe heißt ꝛc. Bei 25 % beträgt der Rabatt $\frac{1}{4}$ der Rechnung, also 9 ℳ von 36 ℳ; folglich muß die Barzahlung 27 ℳ sein.[37])

Die mündlichen Darstellungsformen noch weiter zu führen, erscheint aus zwei Gründen unnötig: Erstens treten neue Formen in unserm Rechenbuche nur noch in den Abschnitten mit Ergänzungsaufgaben auf, und diese sind derart, daß schriftliche Berechnungen fast überall den mündlichen vorzuziehen sind; zweitens können auch die den verschiedenen Sachgebieten angehörenden Aufgaben keine Veranlassung zur Weiterführung geben, da es sich bei diesen um rein sachliche Belehrungen handeln würde, die billig dem Sachunterrichte selbst überlassen bleiben.[38])

---

37) Hierzu ist aber zu bemerken, daß dieses Rabatt vom Hundert ist. Statt desselben wäre richtiger Rabatt auf Hundert zu berechnen. Bei diesem bedeuten 25 %, daß bei einer Rechnung von 125 ℳ die Barzahlung 100 ℳ beträgt, der Rabatt also $\frac{1}{5}$ der Rechnung ist. In unserm Falle würde also der Rabatt auf Hundert nur 7,20 ℳ, die Barzahlung 28,80 ℳ betragen.

38) Zu vielen Aufgaben findet man übrigens auch in den Lehrerheften alle wünschenswerten Andeutungen.

§ 26.

Die schriftlichen Darstellungsformen.

Litteratur. Die Litteratur des vorigen Paragraphen. Außerdem: Flade, O. Die schriftlichen Darstellungsformen des Rechnens in der Volksschule. Döbeln 1880. Hentschel-Költzsch, Lehrbuch des Rechenunterrichts. 14. Aufl. Leipzig 1892. Hofer, J. Methodik des Rechenunterrichts. Wien 1883. Räther, H. Theorie und Praxis des Rechenunterrichts. Breslau 1891. Rein zc. Die Schuljahre. Vergl. dazu die am Ende des Paragraphen aufgeführte Litteratur.

Der Umstand, daß das mündliche Rechnen als der wertvollere Teil des Volksschulrechnens zu gelten hat, bestimmte uns, den mündlichen Darstellungsformen eine größere Bedeutung beizulegen, als sonst wohl geschieht. Daher ist auch ihre eben zu Ende geführte Behandlung eine gesonderte gewesen. Bei den schriftlichen Darstellungsformen, mit denen wir es nun zu thun haben, dürfen wir uns aus zwei Gründen kürzer fassen. Einmal, weil dieselben während der vier ersten Schuljahre sich den mündlichen Darstellungsformen eng anschließen; dann, weil bei ihnen gewöhnlich schon die Angabe einer Form genügt, derjenigen nämlich, welche in dem betreffenden Falle und nach den oben aufgestellten Forderungen als die beste gelten darf, der Form für das Normalverfahren, kurz der Normalform. [1])

Zu den schriftlichen Darstellungsformen gehören zunächst die Ziffern und die Operationszeichen. Die Ziffern lernt das Kind bereits im ersten Schuljahre kennen; doch genügt die Anweisung, welche es da erhält, noch keineswegs. Es hat vielmehr der Schreibunterricht der nächsten Jahre die einzelnen Ziffern wiederholt und nach ihren Schriftelementen geordnet durchzuüben, und auch der Rechenunterricht hat streng darauf zu achten, daß die zusammengestellten Ziffern ein gefälliges Aussehen bekommen. Der günstige Eindruck, welchen sauber und schön geschriebene Ziffern auf den Leser machen, ist ja bekannt; für den Zögling der Volksschule aber kommt noch in Betracht, daß die Bildung des ästhetischen Interesses dadurch eine sehr bemerkenswerte Förderung erfährt.

Was die Operationszeichen betrifft, so entscheiden wir uns für folgende vier:

$$+ \qquad - \qquad . \qquad :$$

und lassen dieselben lesen:

und, weniger, mal, durch.

Bei „durch" ist anfangs zwischen „gemessen durch" und „geteilt durch" zu unterscheiden; später kann es in jedem Falle kurzweg „durch" heißen. Von diesen Operationszeichen sind die beiden ersten die allgemein gebräuchlichen; das dritte Zeichen hingegen, der Punkt (.), wird wohl noch immer in den wenigsten Volksschulen angewandt; auch

1) Vergl. S. 372 ff.

das vierte Zeichen, den Doppelpunkt (:), findet man nicht überall. Gewöhnlich setzt man als Multiplikationszeichen ein liegendes Kreuz (×). Wir meinen aber, daß der Punkt demselben seiner leichtern Ausführbarkeit halber, und weil er nicht mit dem stehenden Kreuze der Addition, zumal wenn dieses, was bei schnellerem Schreiben stets geschieht, schräg gestellt wird, verwechselt werden kann, vorzuziehen ist. Als Divisionszeichen findet nicht selten noch der senkrechte Strich neben dem Doppelpunkte Verwendung. Es ist indessen nicht nötig, zwei Zeichen zu verwenden, denn man kann mit dem Doppelpunkte sowohl den Begriff des Teilens, als auch den des Messens verbinden.

Die Wahl und Bedeutung der Operationszeichen steht übrigens mit der Aufeinanderfolge der gegebenen Zahlen in engster Verbindung. Bekannt ist, daß man bei Addition und Subtraktion stets die Zahl, welche zugezählt, beziehentlich abgezählt werden soll, in die zweite Stelle setzt, daß man dagegen bei der Multiplikation und Division nicht selten umgekehrt verfährt, nämlich die Zahl, mit welcher multipliziert, oder durch welche dividiert werden soll, vorangehen läßt. Demgegenüber ist zu bemerken: Beide Darstellungsformen zugleich anzuwenden, ist mindestens inkonsequent; man wird deshalb besser eine derselben fallen lassen. Es liegt aber nahe, daß das die zweite Form sein muß. Denn zunächst muß die Zahl vorhanden sein, an welcher die Operation, dann erst die, durch welche die Operation ausgeführt wird. Wer teilen will, muß vor allem das, was zu teilen ist, kennen; wer vervielfältigen will, muß zuerst wissen, was vervielfältigt werden soll. Und so hält denn auch unser Rechenbuch streng daran fest, daß die Aufeinanderfolge der gegebenen Zahlen in den Grundoperationen diese ist:

Augend + Addend;
Minuend — Subtrahend;
Multiplikand . Multiplikator;
Dividend : Divisor.

Nach den gegebenen Zahlen ist das Zeichen = (Gleichheitszeichen) zu setzen, sobald die vollständige Auflösung folgt, denn Aufgabe und Auflösung bilden dann zusammen die beiden Seiten einer Gleichung. Dieses Zeichen darf aber nicht stehen, wenn zunächst nur ein Teil der Aufgabe gelöst wird.[2]) Gelesen wird das Zeichen (=): „ist gleich“ oder kurz „gleich“.

Um dem kontrollierenden Lehrer die Übersicht zu erleichtern, empfiehlt es sich, jedes Ergebnis doppelt unterstreichen zu lassen.

Beispiel:

$$35 + 47 - 28 = 82 - 28 = \underline{\underline{54}}$$

Schlußpunkte werden den Ziffern der Auflösungen nicht beigefügt, da der Punkt ebenso wie das Komma, wenn er neben einer Ziffer steht, Rechnungszeichen ist, derselbe hier aber in seiner Bedeutung als Satzzeichen genommen würde. Nur bei Abkürzungen in Benennungen, außer-

2) Vergl. S. 371.

dem in Subtraktionsaufgaben (wenn eine Verwandlung eintritt) und am Ende der periodischen Dezimalzahlen dürfen neben den Multiplikations- und Divisionspunkten noch Punkte auftreten. Doch ziehen wir, was die Benennungen betrifft, auch vor, dieselben durchweg ohne Punkte zu geben. Das Komma ist bei den Dezimalzahlen als Trennungszeichen zwischen Ganze und Dezimalen zu setzen und darf daher ebenfalls nicht als Satz- oder sonstiges Zeichen neben Ziffern verwendet werden. Der Doppelpunkt ist Divisionszeichen, der Gedankenstrich Subtraktionszeichen. Mithin bleiben als Satzzeichen, wenn man will, nur Semikolon, Fragezeichen und Ausrufungszeichen übrig. Diese können aber auch als solche, je nach Bedürfnis, verwendet werden.

Zu den schriftlichen Darstellungsformen gehören ferner die Abkürzungen der Benennungen. Diejenigen für unsere dezimalen Münzen, Maße und Gewichte sind durch reichsgesetzliche Bestimmungen geregelt und oben bereits mitgeteilt worden.[3]) Sämtliche Abkürzungen dieser Benennungen (ausgenommen Mark) werden durch Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets und ohne Schlußpunkte dargestellt. Für die übrigen Benennungen fehlt es zur Zeit leider noch an einer ähnlichen Bestimmung und daher findet man auch in fast jedem Rechenwerke andere Abkürzungen. Nur darin stimmen die meisten derselben überein, daß sie nicht Buchstaben des kleinen lateinischen, sondern des großen deutschen Alphabets setzen.

Es ist indessen nicht einzusehen, weshalb dieser Unterschied gemacht wird. Und so haben wir — entgegen dem Brauche, der auch in der ersten Auflage unseres Handbuches noch beibehalten wurde — in den neuern Auflagen des „Rechenbuches" für die Abkürzungen der Benennungen die großen lateinischen Buchstaben angenommen.[4]) Daß es die Großbuchstaben sind, kann nicht überraschen, denn von den Kleinbuchstaben haben neun bereits bei den dezimalen Maßen und Gewichten Verwendung gefunden. Nachstehend die Übersicht der von uns gewählten Abkürzungen:

A. Papiermaße.

Ries	= Rs
Bogen	= Bg

B. Zählmaße.

Gros	= Gr
Dutzend	= D
Stück	= St
Mandel	= Mdl
Schock	= Sch

C. Zeitmaße.

Jahr	= J
Monat	= Mon
Woche	= W
Tag	= T
Stunde	= Std
Minute	= Min
Sekunde	= Sek

3) Vergl. S. 249.

4) Nur solange, als die Schüler nicht über die Schriftformen des großen lateinischen Alphabets verfügen, während der drei oder vier ersten Schuljahre, ist von denselben abzusehen. Doch kommen die betreffenden Benennungen in schriftlichen Darstellungen während dieser Zeit so selten vor, daß davon die Entscheidung nicht abhängen kann. Man läßt die Benennungen hier entweder vollständig schreiben oder einstweilen die entsprechenden großen deutschen Buchstaben setzen.

Wie man sieht, sind in diesen Abkürzungen neben den Großbuchstaben noch so viele Kleinbuchstaben zur Verwendung gekommen, daß jede Verwechslung ausgeschlossen ist. Mit den gesetzlich geregelten Abkürzungen aber haben sie gemein, daß auch bei ihnen die Schlußpunkte fehlen. Letzteres der Kürze halber und in der Absicht, durch nachfolgende Multiplikations- oder Divisionspunkte keinen Irrtum entstehen zu lassen.

Allgemein gebräuchlich sind die Abkürzungszeichen für Winkelgrößen: (^{0}) für Grad, (′) für Minute und (″) für Sekunde. Ebenso können die abgekürzten Benennungen der ausländischen Münzen als einheitliche gelten, insbesondere: Franc = Fr. (Mehrzahl: Francs = Frs.); Pfund Sterling = £; Schilling = s. und sh.; Pence = d.; Gulden = fl.; Kreuzer = kr.; Rubel = R^0; Dollar = $ u. a. m.

Dazu noch eine Bemerkung, welcher wir allgemeine Beachtung wünschen möchten. Handelt es sich um dezimale Sorten, so hält unser „Rechenbuch" daran fest, daß dieselben als Dezimalzahlen und nicht als Bruchzahlen zu schreiben sind. Sehr viele Rechenmethodiker scheinen jedoch von andern Grundsätzen auszugehen, wahrscheinlich um „bequemere Zahlen" zu gewinnen. Aber zugegeben auch, daß in manchen, selbst in vielen Fällen „bequemere Zahlen" entstehen, wenn man an Stelle der Dezimalzahl die Bruchzahl setzt; für die Fertigkeit im Operieren mit Dezimalzahlen — um derenwillen die dezimalen Sorten doch angenommen worden sind und auf welche jedes Normalverfahren zu fußen hat — wird dadurch nichts gewonnen. Im Gegenteil, das fortwährende Suchen nach „bequemen Zahlen" hält in vielen Fällen nur auf und verdunkelt die Hauptsache. Übrigens dürfen wir für unsere Darstellungsform auch die mathematische Richtigkeit in Anspruch nehmen.

a) Das erste Schuljahr.

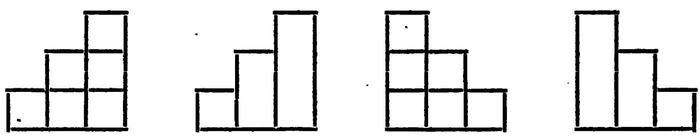
Die ersten schriftlichen Darstellungen sind nach unserm Lehrgange Zeichenübungen im Netze der Schiefertafel nach den Würfeln des Tillichschen Rechenkastens. Anfangs zeichnet der Lehrer das Darzustellende auf die Wandtafel; die Kinder zeichnen nach. Weiterhin fällt die Wandtafelzeichnung fort, und die Kinder zeichnen unmittelbar nach den Würfeln. Zuletzt werden auch die Würfel während des Zeichnens nicht mehr aufgestellt: das Kind zeichnet nach Erinnerungsbildern oder erfindet auf Grund derselben selbst neue Formen. Operationszeichen dürfen dabei in keinem Falle angewandt werden.[5])

Mittlerweile lernt das Kind die Ziffern kennen und schreiben. Wenn nicht bis zu schönen, so doch bis zu richtigen Formen muß es der kleine Rechenschüler bringen. Das setzt unter anderm voraus, daß die einzelnen Teile der Ziffern in richtiger Aufeinanderfolge ausgeführt werden. Wer da weiß, wie oft Anfänger gerade dagegen fehlen, wird

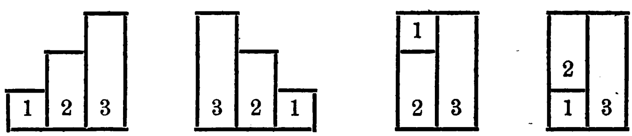
5) Vergl. S. 338.

diese Bemerkung nicht als überflüssige betrachten. Der Lehrer muß wiederholt zusehen, während der Schüler die Ziffern schreibt, nicht erst die fertigen Ziffern in Augenschein nehmen. Ist der Zögling aber in den Besitz der Ziffern gelangt, so hat er dieselben zu den Zeichnungen in Beziehung zu setzen. Hierbei sind zwei Stufen zu unterscheiden: a) die Ziffern werden *in* die Zeichnung geschrieben; b) die Ziffern werden *neben* die Zeichnung geschrieben. Soll ersteres das Kind veranlassen, bei der Ziffer an die richtige Zahl zu denken, welche durch dieselbe bezeichnet wird, so soll letzteres zum Zifferrechnen überleiten. Deshalb dürfen hier auch die Operationszeichen zum ersten Male Verwendung finden. Erst wenn das Kind diese Übungen richtig ausführt, fallen die Zeichnungen ganz weg, und Ziffern und Operationszeichen bleiben die alleinigen Darstellungsmittel. Schließlich haben Lese- und Diktierübungen den Beweis zu liefern, daß das Kind das ihm zu steckende Ziel erreichte: es muß nicht nur jede in Ziffern gegebene Aufgabe richtig und geläufig zu lesen vermögen, sondern auch jede in Zahlen mündlich mitgeteilte Aufgabe richtig, sauber und geläufig niederschreiben können.[6] Hierzu folgende Darstellungsformen:

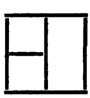
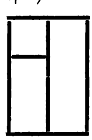
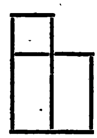
a) Nur Zeichnungen.



b) Zeichnungen mit eingeschriebenen Ziffern.



c) Zeichnungen mit nebenstehenden Ziffern u. s. w.

 1 + 1 = 2  2 + 1 = 3  3 — 1 = 2

d) Darstellungsformen ohne Zeichnungen:

4 + 3 = 7	3 + 4 + 2 = 9	8 = 5 + 3
7 — 3 = 4	9 — 4 — 2 = 3	4 = 7 — 3
4 . 2 = 8	3 . 2 + 4 = 10	6 = 2 . 3
8 : 4 = 2	9 : 3 — 1 = 2	3 = 6 : 2

6) Vergl. hierüber das erste Lehrerheft.

$9 = 5 + 3 + 1$	$8 + 6 : 3 = 10$
$4 = 9 - 7 + 2$	$7 - 8 : 4 = 5$
$8 = 3 \;.\; 2 + 2$	$2 \;.\; 4 : 8 = 1$
$10 = 8 : 4 + 8$	$6 : 2 \;.\; 3 = 9$

b) Das zweite Schuljahr.

Die Aufgabe des zweiten Schuljahres besteht in der Einführung in die Zahlreihe 1 bis 100, vor allem in der Durcharbeitung derselben nach Maßgabe der Addition und Subtraktion. Den Anfang macht die Zehnerreihe, dann folgen, vom Leichten zum Schweren aufsteigend, sämtliche Additions- und Subtraktionsfälle. Da hier zum ersten Male zweistellige Zahlen zu schreiben sind, so versäume man nicht, die Schüler zum Schreiben derselben von links nach rechts (Zehner — Einer) wiederholt anzuleiten und anzuhalten. Denn die Gewohnheit, die Einer vor den Zehnern zu schreiben, läßt sich später nur schwer beseitigen.

Da die schriftlichen Darstellungsformen der einzelnen Rechenfälle mit den mündlichen völlig übereinstimmen, so bedarf es nur des Hinweises auf die letztern. Man findet dieselben übrigens im „Rechenbuche" selbst. Denn das rechnende Kind soll, so oft als nötig, in mustergiltiger Ausführung anschauen können, was von ihm gefordert wird.

Bei den ersten Rechenfällen, wie 10 + 5, 15 — 5 ꝛc., giebt es nur eine Darstellungsform. Die letzten Rechenfälle aber fordern die Unterscheidungen von drei Formen: Normalform, Übergangsform und Abschlußform. Die zweite Form folgt aus der ersten, die dritte aus der zweiten durch Weglassung von Zwischenformen, beide Formen bringen also ein abgekürztes Verfahren zur Darstellung. Hierzu zwei Beispiele:

a) Zuzählen und Abzählen mit Überschreitung eines Zehners.

Normalform.

$$45 + 7 = 45 + 5 + 2 = 50 + 2 = 52$$
$$52 - 7 = 52 - 2 - 5 = 50 - 5 = 45$$
$$25 + 27 = 25 + 20 + 7 = 45 + 7 = 52$$
$$52 - 27 = 52 - 20 - 7 = 32 - 7 = 25$$

Übergangsform.

$$45 + 7 = 50 + 2 = 52$$
$$52 - 7 = 50 - 5 = 45$$
$$25 + 27 = 45 + 7 = 52$$
$$52 - 27 = 32 - 7 = 25$$

Abschlußform.

$$45 + 7 = 52; \quad 52 - 7 = 45;$$
$$25 + 27 = 52; \quad 52 - 27 = 25.$$

b) Zusammengesetzte Aufgaben:

$$16 + 17 + 18 = 33 + 18 = 51$$
$$23 + 28 - 26 = 51 - 26 = 25$$
$$52 - 39 + 18 = 13 + 18 = 31$$
$$54 - 17 - 18 = 37 - 18 = 19$$

Eine Vergleichung zeigt, daß jeder nächste Rechenfall des zweiten Schuljahres den vorhergehenden in sich schließt. Deshalb führt auch jedes Normalverfahren mit seinen Zerlegungen in Zehner und Einer immer wieder auf die vorausgegangenen Rechenfälle zurück. Daraus folgt natürlich: Nur wenn das Vorausgegangene sicher angeeignet wurde, ist es gestattet, weiterzugehen, beziehentlich Abkürzungen eintreten zu lassen. Denn alle Abkürzungen können selbstredend nur den Sinn haben, daß die im Normalverfahren aufgeführten Zwischenrechnungen nicht mehr aufgeschrieben werden, nicht aber den Sinn, daß sie überhaupt nicht mehr auszuführen sind. In Gedanken werden sie nach wie vor stets ausgeführt, nur daß die darauf verwandte Zeit zuletzt eine verschwindend kleine ist. Man kann daher auch sagen, daß in den abgekürzten Darstellungsformen des zweiten Schuljahres eine zweckmäßige Verbindung des Kopfrechnens mit dem schriftlichen Rechnen ihren ersten Ausdruck findet. Daß zusammengesetzte Aufgaben erst dann auftreten dürfen, wenn die Schüler die einfachen Aufgaben sicher und geläufig, auch ohne Angabe der Zerlegungen, wie sie das Normalverfahren fordert, zu lösen vermögen, versteht sich von selbst. Zugleich erhellt, weshalb oben in den zusammengesetzten Aufgaben Zerlegungen überhaupt nicht mehr vorkommen.

c) Das dritte Schuljahr.

Diesem Schuljahre ist die eingehende Behandlung der Reihen der Einerzahlen zugewiesen. Diese Reihen, welche ebenso wie die natürliche Zahlreihe gebildet werden, nur daß jede einen andern Ausgangspunkt hat, können in acht Formen, zwei Haupt- und zwei Nebenformen mit je zwei Umkehrungen, auftreten. Die erste Hauptform ist diejenige, welche gewöhnlich als Bestandteil des „kleinen Einsmaleins" eingeführt wird. Die zweite Hauptform gehört dem „kleinen Einsineins" an. Durch Vertauschung der Faktoren entstehen zwei Nebenformen, deren jede ihren eigentümlichen Wert besitzt. Wir schließen dabei keine dieser Reihen mit dem Zehnfachen der Grundzahl ab, sondern führen sie bis an die Grenze der Zahlreihe, also bis 100, fort. Das bringt doppelten Gewinn. Dadurch, daß man in der Fortführung über das Zehnfache hinaus eine sehr wichtige Verwertung der bis zum Zehnfachen reichenden Reihen hat, und weil auf diese Weise die Reihen der Zahlen 11 bis 19 großenteils schon mit behandelt werden.

A. Haupt-Darstellungsformen.

a) Multiplikation: $5 \cdot 1 = 5;\ 5 \cdot 2 = 10 \ldots\ 5 \cdot 20 = 100;$
b) Division: $5 : 5 = 1;\ 10 : 5 = 2 \ldots 100 : 5 = 20.$

B. Neben-Darstellungsformen.

a) Multiplikation: $1 \cdot 5 = 5;\ 2 \cdot 5 = 10 \ldots\ 20 \cdot 5 = 100;$
b) Division: $5 : 1 = 5;\ 10 : 2 = 5 \ldots 100 : 20 = 5.$

C. Umkehrungen.

A. a) Multiplikation: $5 = 5 \,.\, 1$; $10 = 5 \,.\, 2 \ldots 100 = 5 \,.\, 20$;
b) Division: $1 = 5 : 5$; $2 = 10 : 5 \ldots 20 = 100 : 5$.
B. a) Multiplikation: $5 = 1 \,.\, 5$; $10 = 2 \,.\, 5 \ldots 100 = 20 \,.\, 5$;
b) Division: $5 = 5 : 1$; $5 = 10 : 2 \ldots 5 = 100 : 20$.

Geht man über das Zehnfache in einer Reihe hinaus, dann sind drei Darstellungsformen zu unterscheiden: a) die Normalform (das ausführlichste Verfahren); b) die Übergangsform (entstehend durch Weglassung der ersten Zerlegung); c) die Abschlußform (die bloße Verbindung der Aufgabe mit dem Ergebnisse). Diese drei Formen wiederholen sich für jede Reihe. Zu ihrer Behandlung ist aber erst überzugehen, wenn der Schüler die betreffende Reihe bis zum Zehnfachen beherrscht. Als Darstellungsformen empfehlen wir folgende:

A. Multiplikation.

a) Normalform: $5 \,.\, 17 = 5 \,.\, 10 + 5 \,.\, 7 = 50 + 35 = 85$.
b) Übergangsform: $5 \,.\, 17 = 50 + 35 = 85$.
c) Abschlußform: $5 \,.\, 17 = 85$.

B. Division.

a) Normalform: $85 : 5 = 50 : 5 + 35 : 5 = 10 + 7 = 17$.
b) Übergangsform: $85 : 5 = 10 + 7 = 17$.
c) Abschlußform: $85 : 5 = 17$.

Die Normalform ist stets die wichtigste von allen, denn in ihr kommt der ganze Gedankenprozeß, der sich in der Kinderseele abzuspielen hat, zur Erscheinung. Ebendeshalb darf zu den Abkürzungen auch nicht verschritten werden, so lange der Zögling in der Darstellung des Normalverfahrens sich noch unsicher zeigt. Auch muß auf das Normalverfahren immer wieder zurückgegriffen werden, sobald Schwankungen eintreten. Und schließlich darf man, wir betonen das nochmals, niemals vergessen, daß auch bei den abgekürzten Darstellungsformen der Schüler stets die Zwischenstufen der Normalform in Gedanken durchläuft. Nur die Zeit, die er dazu braucht, wird immer kürzer, wenn es an der rechten Übung nicht fehlt.

Sämtliche Reihen sind auch für benannte Zahlen aufzustellen. Dabei ist die Division als Messen und Teilen aufzufassen. Denn aus 5 ℳ . 3 = 15 ℳ folgt:

15 ℳ : 5 ℳ = 3 mal (Messen) und
15 ℳ : 5 = 3 ℳ (Teilen).

Den einfachen Formen schließen sich zusammengesetzte an; doch erst dann, wenn der Zögling bis zur „Abschlußform" vorgedrungen ist. Denn müßten bei Lösung zusammengesetzter Aufgaben noch sämtliche Zerlegungen angegeben werden, so würde eine so breite Darstellung entstehen, daß die Übersicht aufhörte. Das aber kann der Zweck zusammengesetzter Aufgaben nicht sein. Es müssen also z. B. folgende Darstellungen dem Zöglinge mit einer gewissen Leichtigkeit gelingen:

$$\begin{aligned} 5 \,.\, 13 + 16 &= 65 + 16 = 81 \\ 75 : 5 + 56 &= 15 + 56 = 71 \\ 19 \,.\, 5 - 5 \,.\, 6 &= 95 - 30 = 65 \\ 60 : 5 + 90 : 5 &= 12 + 18 = 30 \\ 85 : 5 + 5 \,.\, 13 &= 17 + 65 = 82 \end{aligned}$$

Wenn nicht, dann giebt es nichts Besseres zu thun, als noch einmal die einfachen Formen gründlich zu üben.

Als eine sehr wichtige Verwertung des durch die Behandlung der Reihen Erlernten gilt uns die Rechnung mit Bruchzahlen. Hier treten Multiplikation und Division in einer Verbindung auf, welche derjenigen in der spätern (eigentlichen) Schlußrechnung entspricht. Man kann daher auch diese Verbindung als Vorstufe der Schlußrechnung betrachten. Was aber ihre Darstellung betrifft, so wolle man von vorn herein streng darauf halten, daß nur wagerechte Bruchstriche geschrieben werden. Bei schiefen Bruchstrichen ist die regelrechte Verbindung des Gleichheitszeichens mit den beiderseits stehenden Bruchzahlen ausgeschlossen. Also nicht $^6/_8 = {}^3/_4$ sondern $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Es empfiehlt sich deshalb, von den Kindern zu fordern, daß sie den Bruchstrich stets zuerst schreiben, bei dem Gleichheitszeichen aber darauf achten, daß der eine Strich desselben etwas höher, der andere etwas tiefer als der vorausgehende oder nachfolgende Bruchstrich zu stehen kommt. Darstellungsformen giebt es dazu nur zwei:

a) Normalform: $\frac{4}{5}$ von $80 = 16 \,.\, 4 = 64$.
b) Abschlußform: $\frac{4}{5}$ von $80 = 64$.

Zusammengesetzte Aufgaben sind wie folgt darzustellen:

$\frac{7}{10}$ von $40 + 35 = 28 + 35 = 63$
$70 - \frac{7}{5}$ von $35 = 70 - 49 = 21$
$\frac{5}{8}$ von $96 - \frac{2}{3}$ von $81 = 60 - 54 = 6$
$\frac{5}{4}$ von $60 + \frac{3}{8}$ von $40 = 75 + 15 = 90$

Den Beschluß macht die Division mit Rest. Hier können sich, da die Kinder sozusagen Gefühl für die Reihenzahlen gewonnen haben, keine erheblichen Schwierigkeiten zeigen. Als Darstellungsformen empfehlen wir:

a) Normalform: $88 : 5 = 50 : 5 + 38 : 5 = 10 + 7$ R. $3 = 17$ R. 3.
b) Übergangsform: $88 : 5 = 10 + 7$ R. $3 = 17$ R. 3.
c) Abschlußform: $88 : 5 = 17$ R. 3.

Bei zusammengesetzten Aufgaben kommt die Klammer zur Anwendung:

$(37 + 48) : 7 = 85 : 7 = 12$ R. 1
$(72 - 25) : 3 = 47 : 3 = 15$ R. 2
$8 \,.\, 12 : 7 = 96 : 7 = 13$ R. 5
$\frac{3}{4}$ von $72 : 7 = 54 : 7 = 7$ R. 5

Die eingekleideten und angewandten Aufgaben werden nur mündlich gelöst. [7])

---

7) Vergl. hierzu S. 387 und das betreffende Lehrerheft.

d) Das vierte Schuljahr.

Die Erweiterung der Zahlreihe bis 1000 fordert zu Lese- und Schreibübungen mit dreistelligen Zahlen auf. Sicherheit und Geläufigkeit sind das Ziel, welches hierin erreicht sein muß, bevor zu den nachfolgenden schriftlichen Darstellungsformen verschritten werden kann. Insbesondere wird man der Neigung vieler Schüler, nach den Hunderten erst die Einer und dann die Zehner zu schreiben, so lange zu begegnen haben, bis sie spurlos verschwunden ist.

Das vierte Schuljahr bringt, strenggenommen, dreierlei schriftliche Darstellungsformen: a) solche, welche nur eine Wiedergabe der mündlichen Darstellungsformen sind; b) solche, welche den Übergang von den mündlichen zu den eigentlichen schriftlichen Darstellungen bilden; c) die eigentlichen schriftlichen Darstellungsformen. Was die erste Gruppe der Darstellungsformen betrifft, so ist auf das oben Mitgeteilte zu verweisen[8]. Die zweite Gruppe ist besonders für die Multiplikation und Division von Bedeutung. Die dritte Gruppe darf in unserm Falle als die Hauptgruppe bezeichnet werden. Nachstehend führen wir für alle drei Gruppen, nach den Grundrechnungsarten geordnet, die Darstellungsformen der bemerkenswertesten Rechenfälle vor.

A. Addition.

a) Erste Gruppe.

450 + 80 = 450 + 50 + 30 = 500 + 30 = 530 (Normalform);
450 + 80 = 500 + 30 = 530 (Übergangsform);
450 + 80 = 530 (Abschlußform).
283 + 9 = 292[9])
283 + 139 = 383 + 30 + 9 = 413 + 9 = 422 (Normalform)[10]);
283 + 139 = 413 + 9 = 422 (Übergangsform);
283 + 139 = 422 (Abschlußform).

Mit benannten Zahlen, z. B.

2,83 ℳ + 1,39 ℳ = 3,83 ℳ + 30 ₰ + 9 ₰ = 4,13 ℳ + 9 ₰ = 4,22 ℳ;
2,83 ℳ + 1,39 ℳ = 4,13 ℳ + 9 ₰ = 4,22 ℳ;
2,83 ℳ + 1,39 ℳ = 4,22 ℳ.

b) Zweite Gruppe.

8	40	48	100	148
6	30	36	200	236
9	50	59	300	359
5	70	75	100	175
28	190	28	700	28
		190		190
		218		700
				918

---

8) Vergl. S. 417.

9) Da 83 + 9 schon im zweiten Schuljahre behandelt wurde, so tritt die Form 83 + 7 + 2 = 90 + 2 = 92 hier natürlich nicht auf. Das Erworbene darf, ja muß auf den nachfolgenden Stufen verwertet werden! —

10) Ausführlich müßte als Normalform gesetzt werden: 283 + 139 = 283 + 100 + 30 + 9 = 383 + 30 + 9 = 413 + 9 = 422. Die Abkürzung rechtfertigt sich aber aus der vorigen Bemerkung.

Ausführung: α) Mit Nennung der einzelnen Stellenwerte: 8 und 6 ist 14; 14 und 9 ist 23; 23 und 5 ist 28; β) ohne Nennung der einzelnen Stellenwerte: 8, 14, 23, 28 Einer u. s. w.

Das zweite Verfahren ist schließlich beizubehalten, und es muß so lange geübt werden, bis die Kinder sicher und schnell (taktmäßig) nach demselben zu rechnen vermögen. Einzelrechnen und Chorrechnen wechseln dabei zweckmäßig ab. Um sichere Resultate zu erzielen, wird jede Summandenreihe noch einmal in der entgegengesetzten Richtung addiert (hier also von unten nach oben). Erhält man dieselbe Summe, so ist anzunehmen, daß richtig addiert wurde; erhält man eine andere Summe, dann muß die Addition noch ein drittes Mal ausgeführt werden u. s. w. Ähnlich wie bei der ersten, verfährt man bei allen folgenden Aufgaben. Sind gemischte Zahlen in einer Aufgabe vorhanden, so setzt man die Reihensummen richtig untereinander und addiert dieselben zuletzt nach Art des mündlichen Verfahrens; also z. B. 190 und 28 ist 218; 700 und 190 ist 890; 890 und 28 ist 918 u. s. w.

Neben den Aufgaben mit unbenannten treten auch solche mit benannten Zahlen auf. Das Verfahren selbst ändert sich bei diesen aber nicht. Eine letzte Übergangsform entsteht noch dadurch, daß man bei den Reihensummen die Nullen nicht mit hinschreibt, sondern lediglich aus der Stellung der übrigen Ziffern auf deren Wert schließt. Beispiele:

36,48 ℳ	29	148
75,56 „	76	226
59,37 „	58	359
87,95 „	85	265
0,26 „	67	28
2,10 „	93	17
27,00 „	38	8
230,00 „	37	998
259,36 ℳ	408	

Die Ausführung der Aufgabe mit benannten Zahlen gestaltet sich so: α) Addition der Einer-, danach der Zehnerreihe der Pfennige; β) Addition der Einer-, danach der Zehnerreihe der Mark; γ) Addition der vier erhaltenen Reihensummen nach Art des mündlichen Verfahrens. Die Ausführung der beiden andern Aufgaben unterscheidet sich nicht von derjenigen, welche oben bereits mitgeteilt worden ist.

c) Dritte Gruppe.

2		1 2		2 2 2	
29	29	148	148	36,48 ℳ	36,48 ℳ
76	76	226	226	75,56 „	75,56 „
58	58	359	359	59,37 „	59,37 „
85	85	256	256	87,95 „	87,95 „
248	248	989	989	259,36 ℳ	259,36 ℳ

Ausführung: Addition der Einerreihe wie in der zweiten Gruppe; zuletzt aber heißt es: „28 Einer — geschrieben 8 Einer, gemerkt 3 Zehner" (anfangs über die Zehnerreihe zu schreiben, später bloß zu merken); Addition der Zehnerreihe in bekannter Weise, doch mit den 2 Zehnern, welche übertragen wurden, beginnend: „2, 4, 11, 16, 24 Zehner — geschrieben 4 Zehner und 2 Hunderte." Das Verfahren für die übrigen Aufgaben läßt sich hieraus leicht ableiten.

B. Subtraktion.

a) Erste Gruppe.

760 — 280 = 760 — 200 — 80 = 560 — 80 = 480 (Normalform);
760 — 280 = 560 — 80 = 480 (Übergangsform);
760 — 280 = 480 (Abschlußform).
764 — 8 = 756
764 — 178 = 664 — 70 — 8 = 594 — 8 = 586 (Normalform);
764 — 178 = 594 — 8 = 586 (Überleitungsform);
764 — 178 = 586 (Abschlußform).[11])

Mit benannten Zahlen, z. B.

7,64 m — 1,78 m = 6,64 m — 70 cm — 8 cm = 5,94 m — 8 cm = 5,86 m;
7,64 m — 1,78 m = 5,94 m — 8 cm = 5,86 m;
7,64 m — 1,78 m = 5,86 m.

b) Zweite Gruppe.

600 + 160 + 8 = 768	600 + 150 + 18 = 768
400 + 80 + 5 = 485	400 + 70 + 9 = 479
200 + 80 + 3 = 283	200 + 80 + 9 = 289
63 m + 61 cm = 63,61 m	62 m + 1,05 m = 63,05 m
36 „ + 35 „ = 36,35 „	36 „ + 0,48 „ = 36,48 „
27 m + 26 cm = 27,26 m	26 m + 0,57 m = 26,57 m

c) Dritte Gruppe.

768	76.8	7.68	7.6.8	7.1.8	7.0.8	7.0.8
— 425	— 439	— 485	—4 7 9	—4 7 9	—4 7 9	—4 0 9
343	329	283	2 8 9	2 3 9	2 2 9	2 9 9

6.3,6.1 m	6.3.,6.1 m	6.3.,0.5 m	6.0.,0.5 m
— 3 6,3 5 „	— 3 6 ,8 5 „	3 6 ,4 8 „	3 6 ,4 8 „
2 7,2 6 m	2 6 ,7 6 m	2 6 ,5 7 m	2 3 ,5 7 m

Sprechweise dazu:

1) 8 Einer weniger 5 Einer gleich 3 Einer; 6 Zehner weniger 2 Zehner gleich 4 Zehner; 7 Hunderte weniger 4 Hunderte gleich 3 Hunderte; also ist 768 weniger 425 gleich 343.

2) 8 Einer weniger 9 Einer geht nicht, ich verwandle deshalb einen Zehner in Einer (Punkt hinter die 6); 1 Zehner gleich 10 Einer, 10 Einer und 8 Einer gleich 18 Einer; 18 Einer weniger 9 Einer gleich 9 Einer; 5 Zehner (1 Zehner ist in Einer verwandelt worden!) weniger 3 Zehner gleich 2 Zehner; 7 Hunderte weniger 4 Hunderte gleich 3 Hunderte; also ist ꝛc.

---

[11]) Auch bei den Subtraktionsaufgaben ist davon auszugehen, daß in spätern Aufgaben das durch die vorhergehenden Aufgaben Erworbene zu verwerten ist.

3) 8 Einer weniger 5 Einer = 3 Einer; 6 Zehner weniger 8 Zehner geht nicht, ich verwandle deshalb 1 Hundert in Zehner (Punkt hinter die 7); 1 Hundert = 10 Zehner, 10 Zehner und 6 Zehner = 16 Zehner; 16 Zehner weniger 8 Zehner = 8 Zehner; 6 Hunderte (1 Hundert ist in Zehner verwandelt worden!) weniger 4 Hunderte = 2 Hunderte; also ist ꝛc.

4) 8 Einer weniger 9 Einer geht nicht, ich verwandle deshalb 1 Zehner in Einer (Punkt hinter die 6); 1 Zehner = 10 Einer; 10 Einer und 8 Einer = 18 Einer; 18 Einer weniger 9 Einer = 9 Einer; 5 Zehner (1 Zehner ist in Einer verwandelt worden!) weniger 7 Zehner geht nicht, ich verwandle deshalb 1 Hundert in Zehner (Punkt hinter die 7); 1 Hundert = 10 Zehner, 10 Zehner und 5 Zehner = 15 Zehner; 15 Zehner weniger 7 Zehner = 8 Zehner; 6 Hunderte (1 Hundert ist verwandelt worden!) weniger 4 Hunderte = 2 Hunderte; also ist ꝛc.

5) Ausführung wie vorher.

6) 8 Einer weniger 9 Einer geht nicht, ich verwandle deshalb 1 Hundert in Zehner und davon 1 Zehner in Einer (Punkte hinter 0 und 7); 1 Hundert = 10 Zehner, 1 Zehner = 10 Einer; 10 Einer und 8 Einer = 18 Einer; 18 Einer weniger 9 Einer = 9 Einer; 9 Zehner (1 Zehner ist in Einer verwandelt worden!) weniger 7 Zehner = 2 Zehner; 6 Hunderte (1 Hundert ist in Zehner verwandelt worden!) weniger 4 Hunderte = 2 Hunderte; also ist ꝛc.

7) Ähnliche Ausführung wie vorher.

In den Aufgaben mit benannten Zahlen wird jede Sorte für sich behandelt. Es sind also zu unterscheiden: Einer und Zehner bei den Centimetern; Einer, Zehner u. s. w. bei den Metern. Reichen die Einer-Centimeter nicht zu, so wird 1 Zehner-Centimeter verwandelt; reichen die Zehner-Centimeter nicht zu, so wird 1 Einer-Meter in 10 Zehner-Centimeter verwandelt u. s. w. Hiernach gestaltet sich z. B. die Ausführung der letzten Aufgabe wie folgt: 5 Einer weniger 8 Einer geht nicht, ich verwandle deshalb 1 Zehner-Meter in 10 Einer-Meter, 1 Einer-Meter in 10 Zehner-Centimeter, 1 Zehner-Centimeter in 10 Einer-Centimeter (Punkte hinter 6, 0, 0); 10 Einer und 5 Einer = 15 Einer; 15 Einer weniger 8 Einer = 7 Einer; 9 Zehner (1 Zehner ist verwandelt worden!) weniger 4 Zehner = 5 Zehner; 9 Einer weniger 6 Einer = 3 Einer; 5 Zehner weniger 3 Zehner = 2 Zehner; also ist ꝛc.

Die vorstehend gegebenen, die schriftliche Darstellung begleitenden mündlichen Formen dürfen aber nur den Ausgangspunkt bilden. Sie sollen den Schüler zu einer verständnisvollen Auffassung der schriftlichen Darstellung befähigen. Sobald diese erzielt ist, läßt man Abkürzungen eintreten. Als Übergangsform erhält man dann z. B. für die siebente der vorstehenden Aufgaben:

18 Einer weniger 9 Einer = 9 Einer; 9 Zehner weniger 0 Zehner = 9 Zehner; 6 Hunderte weniger 4 Hunderte = 2 Hunderte; also ist ꝛc. Zuletzt darf auch die Stellenbezeichnung wegfallen und man hat als Abschlußform: 18 weniger 9 = 9; 9 weniger 0 = 9; 6 weniger 4 = 2; also ist ꝛc.

Selbstverständlich ist stets daran festzuhalten: Ein toter Mechanismus darf nirgends entstehen! Wiederholt sind daher die beiden vorausgehenden Formen heranzuziehen, um die letzte Abkürzung zu beleben; auch ist immer wieder auf die erste, grundlegende Form zurückzugehen, wenn sich beim Zöglinge ein Mangel an Verständnis zeigt.

C. Multiplikation.

a) Erste Gruppe.[12]

$268 \,.\, 3 = 260 \,.\, 3 + 8 \,.\, 3 = 780 + 24 = 804$ (Normalform);

[12]) Bei den Zerlegungen ist nicht bis auf die letzten Elemente zurückzugehen; denn der Schüler braucht nur das im dritten Schuljahre für Zehner und Einer Erlernte auf Hunderte und Zehner zu übertragen, um sofort z. B. 260 . 3 lösen zu können u. s. w.

268 . 3 = 780 + 24 = 804 (Übergangsform);
268 . 3 = 804 (Abschlußform).

Mit benannten Zahlen, z. B.

30 cm . 18 = 5,40 m; 18 cm . 30 = 5,40 m;
1,40 ℳ . 2 = 2,80 ℳ; 2,60 hl . 3 = 7,80 hl.

b) Zweite Gruppe.

3 . 278
278 = 200 + 70 + 8
3 . 200 = 600
3 . 70 = 210
3 . 8 = 24
3 . 278 = 834

3 . 278
600
210
24
834

27 . 36
36 = 30 + 6
27 . 30 = 810
27 . 6 = 162
27 . 36 = 972

27 . 36
810
162
972

c) Dritte Gruppe.

67 . 4
268

286 . 3
858

50 . 17
500
350
850

19 . 48
76
152
912

Sprechweise dazu:

1) 7 Einer mal 4 = 28 Einer oder 2 Zehner 8 Einer — geschrieben 8 Einer, gemerkt 2 Zehner; 6 Zehner mal 4 = 24 Zehner, 24 Zehner und 2 Zehner = 26 Zehner — geschrieben 6 Zehner und 2 Hunderte; also ist 67 mal 4 gleich 268.

2) 6 Einer mal 3 = 18 Einer oder 1 Zehner 8 Einer — geschrieben 8 Einer, gemerkt 1 Zehner; 8 Zehner mal 3 = 24 Zehner; 24 Zehner und 1 Zehner = 25 Zehner oder 2 Hunderte 5 Zehner — geschrieben 5 Zehner, gemerkt 2 Hunderte; 2 Hunderte mal 3 = 6 Hunderte; 6 Hunderte und 2 Hunderte = 8 Hunderte — geschrieben 8 Hunderte; also ist 286 mal 3 gleich 858.

3) 5 Zehner mal 10 = 5 Hunderte — geschrieben 5 Hunderte; 5 Zehner mal 7 = 35 Zehner — geschrieben 5 Zehner und 3 Hunderte; zusammen 0 Einer, 5 Zehner, 8 Hunderte; also ist 50 mal 17 gleich 850.

4) 9 Einer mal 40 = 36 Zehner oder 3 Hunderte 6 Zehner — geschrieben 6 Zehner, gemerkt 3 Hunderte; 1 Zehner mal 40 = 4 Hunderte; 4 Hunderte und 3 Hunderte = 7 Hunderte — geschrieben 7 Hunderte; 9 Einer mal 8 = 72 Einer oder 7 Zehner 2 Einer — geschrieben 2 Einer, gemerkt 7 Zehner; 1 Zehner mal 8 = 8 Zehner; 8 Zehner und 7 Zehner = 15 Zehner oder 1 Hundert und 5 Zehner — geschrieben 5 Zehner und 1 Hundert; zusammen: 2 Einer; 11 Zehner (geschrieben 1 Zehner, gemerkt 1 Hundert); 9 Hunderte; also ist ꝛc.

Andere Aufgaben werden in ähnlicher Weise gelöst. Während aber die vorstehend gegebenen schriftlichen Darstellungen für alle Aufgaben unverändert beibehalten werden, kürzt man die begleitenden Bemerkungen mehr und mehr ab. Denn auch hier hat die ausführlichere Bezeichnung der einzelnen Operationen nur den Zweck, dem Schüler zu einer verständnisvollen Auffassung der schriftlichen Darstellungen zu verhelfen. Ist dieselbe erzielt, so genügen Andeutungen.

Als Übergangsform betrachten wir z. B. für 286 . 3 die folgende: 6 Einer mal 3 = 18 Einer — geschrieben 8 Einer, gemerkt 1 Zehner; 8 Zehner mal 3 und 1 Zehner = 25 Zehner — geschrieben 5 Zehner, gemerkt 2 Hunderte; 2 Hunderte mal 3 und 2 Hunderte = 8 Hunderte; also ist 286 mal 3 gleich 858. Als kürzeste

Form gilt für das vierte Schuljahr:[13]) 6 mal 3 = 18 — geschrieben 8 Einer, gemerkt 1 Zehner; 8 mal 3 und 1 = 25 — geschrieben 5 Zehner, gemerkt 2 Hunderte; 2 mal 3 und 2 = 8 — geschrieben 8 Hunderte; also ist rc.

Hierzu kommen noch Aufgaben mit benannten Zahlen, insbesondere solche, in denen dezimale Sorten multipliziert werden, z. B.

37 l . 24	19 l . 48	3,47 hl . 24	27,19 hl . 32
7,40	7,60	69,40	815,70
1,48	1,52	13,88	54,38
8,88 hl	9,12 hl	83,28 hl	870,08 hl

Ist nur eine Sorte (z. B. Liter) im Multiplikanden gegeben, dann unterscheidet sich die Rechnung nur dadurch von einer mit unbenannten Zahlen, daß jedes Produkt nach Hektoliter und Liter bestimmt wird. Kommen zwei Sorten (z. B. Hektoliter und Liter) im Multiplikanden vor, so werden dieselben während der Rechnung getrennt aufgefaßt. Es ist z. B. bei 3,47 hl . 24 zu sprechen: 7 l mal 20 = 140 l oder 1 hl 40 l — geschrieben 40 l, gemerkt 1 hl; 40 l mal 20 = 800 l oder 8 hl; 8 hl und 1 hl = 9 hl; — geschrieben 9 hl; 3 hl mal 20 = 60 hl — geschrieben 60 hl u. s. w. Das mag etwas umständlich erscheinen, läßt sich aber an dieser Stelle, wo die Kenntnis der Dezimalzahlen noch fehlt, nicht ändern. Wird doch die Hauptsache, die verständnisvolle Auffassung des Rechenfalles, auf diesem Wege erreicht. Selbstredend dürfen, sobald die Schüler die Aufgaben mit Verständnis rechnen, auch hier Abkürzungen eintreten.

Schließlich noch zwei Bemerkungen über die vorstehenden schriftlichen Darstellungsformen. Die meisten Rechenwerke für Volksschulen pflegen, wenn der Multiplikator mehrstellig ist, die Teilprodukte in anderer Reihenfolge als wir zu bilden. Sie multiplizieren nämlich (den rechtsstehenden Faktor als Multiplikator gedacht) zuerst mit den Einern, danach mit den Zehnern u. s. w. während wir die umgekehrte Reihenfolge einhalten. Bezeichnen wir unsere Darstellung mit A, die andere mit B, so ergiebt sich z. B. für die Aufgabe 29 . 32 dieses:

A) 29 . 32	B) 29 . 32
87	58
58	87
928	928

Räumlich aufgefaßt, rückt also unsere Darstellungsform von links nach rechts vor, die andere von rechts nach links. Aber schon dieses ist ein Vorzug unserer Form, denn es bedingt eine bessere Ausnutzung des Raumes unter dem Striche. Namentlich, wenn der Multiplikator mehr als zwei Stellen hat. Denn dann schieben sich die Teilprodukte bei der

[13]) Im nächsten Schuljahre kommt eine noch kürzere Form in Anwendung, es wird dann die Stellenbezeichnung ganz weggelassen.

B-Darstellung immer weiter nach links vor, sodaß zuweilen, wie die Erfahrung lehrt, sogar das Papier nicht mehr zureicht. Der Hauptvorzug unserer Form besteht aber besonders darin, daß sich dieselbe dem mündlichen Verfahren eng anschließt und daß es diejenige Form ist, welche später bei der abgekürzten Multiplikation (mit Dezimalzahlen) Verwendung findet. Eine zweite Abweichung unserer Darstellungsform von der üblichen ist das Nebeneinandersetzen von Multiplikand und Multiplikator, denn gewöhnlich setzt man den Multiplikator unter den Multiplikanden. Auch halten wir, was auch nicht überall geschieht, streng darauf, daß die niedrigste Stelle jedes Teilproduktes unter diejenige Stelle des Multiplikators, mit der man soeben multipliziert, geschrieben wird. Letzteres führt zu einer gleichmäßigen, übersichtlichen Anordnung der Teilprodukte und schützt vor Irrtümern, denn man ersieht daraus sofort, mit welcher Stelle des Multiplikators multipliziert worden ist und welcher Wert dem Teilprodukte zukommt.

D. Division.

a) Erste Gruppe.[14])

910 : 40 = 800 : 40 + 110 : 40 = 20 + 2 R. 30 = 22 R. 30 (Normalform);
910 : 40 = 20 + 2 R. 30 = 22 R. 30 (Übergangsform);
910 : 40 = 22 R. 30 (Abschlußform).
528 : 12 = 480 : 12 + 48 : 12 = 40 + 4 = 44 (Normalform);
528 : 12 = 40 + 4 = 44 (Übergangsform);
528 : 12 = 44 (Abschlußform).

Mit benannten Zahlen, z. B.
2,80 M : 2 = 1,40 M; 2,80 M : 1,40 M = 2 mal.

b) Zweite Gruppe.

750 : 50	980 : 50
750 = 500 + 250	980 = 500 + 480
500 : 50 = 10	500 : 50 = 10
250 : 50 = 5	480 : 50 = 9 R. 30
750 : 50 = 15	980 : 50 = 19 R. 30

750 : 50 = 10	980 : 50 = 10
500	500
250 : 50 = 5	480 : 50 = 9 R. 30
250	450
15	30 19 R. 30

786 : 4 = 100 + 90 + 6 R. 2	759 : 7 = 100 + 0 + 8 R. 3
400	700
386 = 196 R. 2	59 = 108 R. 3
360	00
26	59
24	56
2	3

14) Die bei der Multiplikation gemachte Bemerkung gilt auch hier.

c) Dritte Gruppe.

684 : 2 = 342;
6
8
8
4
4

694 : 2 = 347;
6
9
8
14
14

794 : 2 = 397;
6
19
18
14
14

172 : 2 = 86
16
12
12

756 : 7 = 108;
7
5
0
56
56

786 : 4 = 196 R. 2;
4
38
36
26
24
2

759 : 11 = 69;
66
99
99

594 : 20 = 29 R. 14;
40
194
180
14

594 : 24 = 24 R. 18.
48
114
96
18

Sprechweise dazu:

1) 684 : 2 = ? Zuerst werden die Hunderte geteilt: 600 durch 2 = 300, denn 300 mal 2 = 600; 684 weniger 600 = 84. Nun werden die Zehner geteilt: 80 durch 2 = 40, denn 40 mal 2 = 80; 84 weniger 80 = 4. Zuletzt werden die Einer geteilt: 4 durch 2 = 2, denn 2 mal 2 = 4; 4 weniger 4 = Null. Also ist 684 durch 2 gleich 342.

2) 794 : 2 = ? Zuerst werden die Hunderte geteilt: 600 [15]) durch 2 = 300, denn 300 mal 2 = 600; 794 weniger 600 = 194. Nun werden die Zehner geteilt: 180 durch 2 = 90, denn 90 mal 2 = 180; 194 weniger 180 = 14. Zuletzt werden die Einer geteilt: 14 durch 2 = 7, denn 7 mal 2 = 14; 14 weniger 14 = Null. Also ist 794 durch 2 gleich 397.

3) 172 : 2 = ? Die Hunderte werden nicht geteilt, weil man keine ganzen Hunderte im Ergebnisse erhält; von 17 Zehner werden 16 Zehner geteilt; 160 : 2 = 80; denn 80 mal 2 = 160; 172 weniger 160 = 12. Nun werden die Einer geteilt; 12 : 2 = 6, denn 6 mal 2 = 12; 12 weniger 12 = Null. Also ist 172 : 2 gleich 86.

4) 756 : 7 = ? Zuerst werden die Hunderte geteilt; 700 : 7 = 100, denn 100 : 7 = 700; 756 weniger 700 = 56. Die Zehner werden nicht geteilt, weil man daraus keine ganzen Zehner erhält; in die Zehnerstelle des Ergebnisses schreibt man eine Null. Zuletzt werden die Einer geteilt; 56 : 7 = 8, denn 8 . 7 = 56; 56 weniger 56 = Null. Also ist 756 : 7 gleich 108.

Ähnlich wie in diesen vier Fällen hat sich die Lösung der übrigen Aufgaben zu gestalten. Doch sollen die vorstehend gegebenen Formen nur zum Verständnisse verhelfen; weiterhin dürfen kürzere Formen in Gebrauch genommen werden, z. B.

786 : 4 = ? 400 durch 4 = 100, denn 100 mal 4 = 400; 786 weniger

15) Der Grund, weshalb zunächst 600 geteilt wird, ist: man will im Ergebnisse ganze Hunderte erhalten. Ähnlich bei den Zehnern.

400 = 386; 360 durch 4 = 90, denn 90 mal 4 = 360; 386 weniger 360 = 26; 26 : 4 = 6 R. 2; also ist 786 : 4 gleich 196 R. 2 u. s. w.[16])

Auch bei der schriftlichen Division sind Aufgaben mit *benannten Zahlen* zu berücksichtigen. Dabei ist zwischen *Messen* und *Teilen* zu unterscheiden. Beispiele:

4,68 ℳ : 12 ₰ (Messen).
468 ₰ : 12 ₰ = 39 mal
36
108
108

4,68 ℳ : 12 (Teilen).
468 ₰ : 12 = 39 ₰.
36
108
108

37,28 m : 24 = 1,55 m (R. 8 cm)
24
132
120
128
120
8

739,49 m : 36 = 20,54 m (R. 5 cm)
72
194
180
149
144
5

Schließlich ist noch einer *Verbindung* von Multiplikation und Division zu gedenken. Beispiel:

$\frac{5}{8}$ von 976 = 976 : 8 . 5 = 610

976 : 8 = 122;
8
17
16
16
16

122 . 5
610

Bei allen Darstellungen der Division ist streng darauf zu halten, daß die Stellenziffern der Ausrechnung genau unter die der Aufgabe zu stehen kommen.[17])

e) Das fünfte Schuljahr.

Die im vorigen Schuljahre erworbenen schriftlichen Darstellungsformen nebst den begleitenden Worten werden nun auf die über 1000 hinaus erweiterte Zahlreihe übertragen. Zunächst unverändert, weiterhin aber, wenn thunlich, in noch kürzerer Form. Um größere Zahlen rasch übersehen zu können, teilt man dieselben in Gruppen zu je drei Stellen ab, z. B.

67 305; 548 942; 4 309 510 ꝛc.

---

16) In den folgenden Schuljahren kommt die Stellenbezeichnung ganz in Wegfall; dadurch wird eine noch kürzere Form gewonnen.

17) Vergl. hierüber noch S. 389 f. und das betreffende Lehrerheft.

Punkt oder Komma dürfen, was nochmals bemerkt wird, nicht als Abteilungszeichen verwendet werden. — Als Darstellungsformen empfehlen wir folgende:

A. Addition.

556	157	47 5
1768	379	4,32 ℳ
3276	87	38,74 „
1849	9	0,86 „
2357	95	9,87 „
7835	368	23,79 „
4378	1345	0,83 „
7643	2079	8,53 „
9876	135	0,99 „
5317	46	1,85 „
4684	8	10,38 „
48983	4551	100,16 ℳ

Zu sprechen ist z. B. bei der ersten Aufgabe: 8, 14, 23, 30, 35, 43, 46, 52, 59, 63 Einer — geschrieben 3 Einer, gemerkt 6 Zehner; 6, 12, 19 u. s. f.

Was zu merken ist, wird anfangs noch **über** die nächste Reihe geschrieben; später, wenn die Schüler genügende Sicherheit und Fertigkeit erlangt haben, ist dieses aber auch nicht mehr nötig. An der Regel, daß jede Reihe einmal von oben nach unten und dann von unten nach oben zu addieren ist, um sich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, wird festgehalten. Es ist das für die Volksschule unter allen **Proben** der Addition die beste, weil für Volksschüler die verständlichste.

B. Subtraktion.

9375	935.4	6.39.2	9.2.1.3
— 3124	— 314 9	— 4 73 8	— 6 7 4 5
6251	620 5	1 65 4	2 4 6 8

4.6.03.1	3.0.5.0.0.7	7.0.001.2
— 2 8 52 7	— 9 6 4 0 9	— 3 4 900 9
1 7 50 4	2 0 8 5 9 8	3 5 100 3

58,42 hl	1.5.4,8.4 hl	94.0.,1.7 hl
— 43,31 „	— 9 6,2 8 „	— 53 7 ,9 8 „
15,11 hl	5 8,5 6 hl	40 2 ,1 9 hl

Für die die Rechnung begleitenden Worte ist die kürzeste Form des Ausdrucks anzustreben. Bei der letzten Aufgabe mit unbenannten Zahlen ist also z. B. zu sprechen: 12 weniger 9 = 3, 0 weniger 0 = 0; 0 weniger 0 = 0; 10 weniger 9 = 1; 9 weniger 4 = 5; 6 weniger 3 = 3 u. s. w.

Hat das vierte Schuljahr seine Schuldigkeit gethan und hat auch im laufenden Schuljahre noch einmal die verständnisvolle, alle Stellenwerte genau beachtende Auffassung den Ausgangspunkt gebildet, so kann der vorstehend empfohlene Mechanismus nicht mehr schädlich wirken. Schon das spätere Schulrechnen fordert diesen Mechanismus, um Zeit zu gewinnen; wievielmehr das praktische Leben. Selbstredend muß man sich von Zeit zu Zeit immer wieder davon überzeugen, daß in diesem Mechanismus noch geistiges Leben herrscht, man muß also z. B. Fragen einschalten, deren Beantwortung seitens der Kinder Kunde von einer verständigen Auffassung zu geben vermag, ab und zu wieder eine Aufgabe mit vollständiger Angabe aller Erwägungen, Schlüsse u. s. w. lösen lassen u. dgl. m.

Soll sich das Kind von der Richtigkeit seiner Rechnung überzeugen, was aus verschiedenen Gründen nötig ist, so bleibt auch bei der Subtraktion das nochmalige Durchrechnen das beste Mittel. Es darf indessen auch die bekannte *Probe*, welche darin besteht, daß man den Rest zum Subtrahenden addiert und so den Minuenden erhält, Anwendung finden, denn sie ist so einfach, daß der Volksschüler sie begreifen kann. Beispiel mit Probe:

$$\begin{array}{r} 7.2.0.3.0.5 \\ -\ 2\,7\,4\,3\,9\,4 \\ \hline 4\,4\,5\,9\,1\,1 \\ \hline 7\,2\,0\,3\,0\,5 \end{array}$$

Das sogenannte „*österreichische Verfahren*“ bei der Subtraktion, welches darin besteht, daß man zum Subtrahenden soviel addiert, als ihm noch fehlt, um dem Minuenden gleich zu sein, möchten wir nach wiederholten Erwägungen und Erfahrungen nicht empfehlen: denn einerseits wird durch dasselbe der Charakter der Subtraktion gründlich verwischt, was auf dieser Stufe methodisch falsch ist, und anderseits läuft es auf weiter nichts hinaus, als auf einen noch leistungsfähigern Mechanismus, was für den Volksschüler des fünften Schuljahres doch nicht viel bedeuten will. Wir verweisen die Einübung dieses Verfahrens daher auf die Oberstufe. Das schließt natürlich nicht aus, daß die Freunde desselben es auch anders halten dürfen. Daß die Aufgaben unseres „Rechenbuches“ dem nicht entgegenstehen, ist selbstverständlich.[18])

C. Multiplikation.

a) *Mit Zwischenformen.*

$$\begin{array}{r} 587\ .\ 2 \\ \hline 14 \\ 160 \\ 1000 \\ \hline 1174 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 345\ .\ 20 \\ \hline 345\ .\ 10\ .\ 2 \\ \hline 3450\ .\ 2 \\ \hline 100 \\ 800 \\ 6000 \\ \hline 6900 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 234\ .\ 27 \\ \hline 4680 \\ 1638 \\ \hline 6318 \end{array}$$

[18]) Über das Verfahren selbst findet man für das *fünfte* Schuljahr in dem betr. Lehrerhefte Näheres. Daß übrigens auch in Österreich auf Unter- und Mittelstufe von demselben abgesehen wird, ergiebt sich aus *Hofer* a. a. O. S. 45.

b) Normalformen.

587 . 2	345 . 20	234 . 27
1174	6900	468
		1638
		6318

49 . 503	764 . 896	7654 . 4008
2450	6112	3061600
147	6876	61232
24647	4584	30677232
	684544	

c) Mit Rechenvorteilen.

789 . 54	257 . 21	6789 . 36
789 . 9 . 6	514	20367
7101 . 6	5397	40734
42606		244404

Die Formen unter a) und b) bedürfen nach dem, was beim vierten Schuljahre gesagt worden ist, keiner weitern Erklärung. Es muß aber bei Anwendung der Normalformen dahin gestrebt werden, daß die begleitenden Worte eine weitere Abkürzung erfahren, so zwar, daß durch sie schließlich die ganze Operation nur angedeutet, womöglich in taktmäßigem Verlaufe angedeutet wird. Demgemäß ist z. B. bei der Aufgabe 587 . 2 zuletzt zu sprechen: 7 mal 2 = 14; 4, gemerkt 1; 8 mal 2 und 1 = 17; 7, gemerkt 1; 5 mal 2 und 1 = 11 u. s. w. Oder noch kürzer so: 7 mal 2 = 14; 4, 1; 8 mal 2 und 1 = 17; 7, 1; 5 mal 2 und 1 = 11 u. s. w.

Ist der Multiplikator mehrstellig, so ist mindestens bei den Zwischenformen vor der Rechnung vom Schüler die Aufeinanderfolge der Operationen anzugeben, also z. B. bei 234 . 27 zu sprechen: 234 mal 27 gleich 234 mal 20 und 234 mal 7 u. s. w. Auch die Aufeinanderfolge der Faktoren darf beim Sprechen nicht gleichgiltig sein. Da der Multiplikator ein für allemal rechts steht, so ist stets mit einer Stelle des links stehenden Faktors (des Multiplikanden) zu beginnen. Es darf also in der ersten Aufgabe nicht heißen 2 mal 7, 2 mal 8 und 2 mal 5, sondern 7 mal 2, 8 mal 2 und 5 mal 2.

Die Darstellungsformen für Aufgaben mit einfach benannten Zahlen (einschließlich dezimale Sorten) ergeben sich leicht aus den vorstehenden Beispielen in Verbindung mit denen des vierten Schuljahres. Auch bei ihnen sind die begleitenden Worte entsprechend abzukürzen.

Einer besondern Probe der Multiplikation bedarf es für die Volksschule nicht. Der Schüler hat, um sich von der Richtigkeit des Gerechneten zu überzeugen, die Aufgabe ein zweites Mal zu rechnen. Will man indessen eine solche Probe nicht missen, so empfiehlt sich ein nochmaliges Durchrechnen in Verbindung mit Faktorenvertauschung.

Was die Rechenvorteile betrifft, so gründen sich diese auf Faktorenzerlegung, Benutzung des Multiplikanden bei der Multiplikation

mit 1 und Benutzung eines Teilproduktes, wenn eine nachfolgende Stelle ein Vielfaches (bei 36 z. B. ist 6 das 2fache von 3!) einer vorhergehenden ist.

D. Division.

a) Zwischenformen.

```
15346 : 2 = 7000   | 15346 : 20 = 700      | 15346 : 24 = 600
14000              | 14000                 | 14400
-----              | -----                 | -----
 1346 : 2 =  600   |  1346 : 20 =  60      |   946 : 24 =  30
 1200              |  1200                 |   720
 ----              |  ----                 |   ---
  146 : 2 =   70   |   146 : 20 =   7 R. 6 |   226 : 24 =   9 R. 10
  140              |   140                 |   216
  ---              |   ---      ---------- |   ---       -----------
    6 : 2 =    3   |     6        767 R. 6 |    10        639 R. 10
    6              |                       |
    -      ----    |                       |
           7673    |                       |
```

b) Normalformen.

```
15346 : 2 = 7673   | 15346 : 20 = 767 R. 6 | 15346 : 24 = 639 R. 10
14          ====   | 140          ======== | 144          =========
--                 | ---                   | ---
 13                | 134                   |  94
 12                | 120                   |  72
 --                | ---                   |  ---
  14               |  146                  |  226
  14               |  140                  |  216
  --               |  ---                  |  ---
   6               |    6                  |   10
   6               |                       |
   -               |                       |
```

```
27432 : 54 = 508   | 1318426 : 329 = 4007 R. 123
270          ===   | 1316            ===========
---                | ----
 432               |  2426
 432               |  2303
 ---               |  ----
                   |   123
```

c) Rechenvorteile.

15346 : 2 = 7673; 15346 : 10 = 1534 R. 6;
$1534\cancel{6} : 2\cancel{0}$ = 767 R. 6;
15345 : 5 = 15345 . 2 : 10 = $3069\cancel{0}$;
15346 : 24 = 639 R. 10.

```
15346 : 24 = 639 R. 10.
-----
  94
 ---
  226
  ---
   10
```

Die Formen unter a) und b) erklären sich in Verbindung mit dem, was beim vierten Schuljahre mitgeteilt worden ist, sehr leicht. Doch müssen auch hier die begleitenden Worte eine weitere Abkürzung erfahren. Etwa so, daß z. B. bei 15346 durch 24 zu sprechen ist: 153 durch 24 = 6; 4 mal 6 = 24; 4, 2; 2 mal 6 und 2 = 14; 13 weniger 4 = 9; 4 herunter; 94 durch 24 = 3; 4 mal 3 = 12; 2, 1; 2 mal 3 und 1 = 7; 4 weniger 2 = 2; 9 weniger 7 = 2; 6 herunter; 226 durch 24 = 9; 4 mal 9 = 36; 6, 3; 2 mal 9 und 3 = 21; 6 weniger 6 = 0; 2 weniger 1 = 1; also ist 15346 durch 24 gleich 639 Rest 10.

Ist der Divisor mehr als zweistellig, dann bereitet dem Anfänger schon die Wahl der ersten Stelle des Quotienten nicht selten große

Schwierigkeiten. Deshalb muß fortgesetzt darauf gehalten werden, daß derselbe die Gründe, welche die Wahl bestimmen, kurz angiebt. Dabei wird zweckmäßig die Division als eine wiederholte Subtraktion aufgefaßt. Denn ob z. B. ein dreistelliger Divisor von den drei höchsten Stellen des Dividenden abgezählt werden kann, das erkennt der Schüler sofort. Ist ein solches Abzählen nicht möglich, so wird noch eine Stelle hinzugenommen. Daraus ergiebt sich zugleich, welcher Wert der höchsten Stelle des Quotienten zukommt.

Ein Irrtum kann bei Bestimmung der Quotientenstellen selbst einem geübten Rechner begegnen, indessen darf derselbe nicht mehr als eine Einheit auf- oder abwärts betragen. Um auch soweit zu gelangen, ist der Anfänger zum richtigen Abschätzen anzuleiten. Dasselbe besteht darin, daß er die höchste Stelle (bez. die beiden höchsten Stellen) desjenigen Teiles des Dividenden, welcher dividiert werden soll, durch die höchste Stelle des Divisors dividiert. Es ist aber letztere um eine Einheit zu erhöhen, wenn die nächste Stelle mehr als 5 beträgt. Ist z. B. 326 der Divisor, so wird man durch 3 dividieren, während bei 376 eine vorläufige Division durch 4 stattzufinden hat.

Bekanntlich spielen bei der Division unter den begleitenden Wörtern von Alters her die Wörtchen „in“, „geht“ und „geht nicht“ eine große Rolle. Wir meinen aber, daß es an der Zeit sei, dieselben zu verabschieden, da sie nicht in den Rahmen der bereits angenommenen Darstellungsformen passen. Umsomehr, als wir durchaus nicht zugeben können, daß durch dieselben den Kindern die Sache leichter gemacht werde. Es liegt hier eben ein Irrtum vor, welcher auf den Umstand, daß uns Lehrern von der eigenen Schulzeit her die Ausdrücke geläufig sind, zurückzuführen ist. An Stelle des „in“ hat also überall „durch“ zu treten, an Stelle von „geht“ wird „ist“ gesetzt. Dieser Ausdruck gewährt zugleich den Vorteil, daß man mit ihm die Wertbezeichnung der betreffenden Quotientenstelle leicht verbinden kann, z. B. „ist 3 Hundert, 4 Zehner“ u. s. w. Das „geht nicht“ kann durch „ist Null“ ersetzt werden.

Selbstredend ist auch beim Dividieren jedem toten Mechanismus vorzubeugen. Man wird also von Zeit zu Zeit immer wieder eine Aufgabe in ausführlicher Weise lösen lassen, ab und zu auch eine Frage nach dem Werte einer Quotientenstelle oder eines Teilproduktes einschalten u. dgl. m.

Die besondern Formen der Division, „Messen“ und „Teilen“, sind auch hier zu beachten. Für die Aufgaben mit unbenannten Zahlen tritt ein Unterschied in der Form zwar nicht ein, bei den Aufgaben mit benannten Zahlen ist dieses aber, wie aus den für das vierte Schuljahr gegebenen Auseinandersetzungen deutlich hervorgeht, stets der Fall.

Den Grundrechnungsarten mit unbenannten und einfach benannten Zahlen folgen die Rechnungen mit mehrfach benannten Zahlen. Zunächst Sortenverwandlungen, durch welche entweder höhere Einheiten in niedere oder niedere Einheiten in höhere übergeführt werden sollen.

Ersteres geschieht durch Multiplikation, letzteres durch Division. [19]) **Danach die Grundrechnungsarten. Beispiele:**

a) *Erweitern und Einrichten.*

Wieviele Stunden sind 6 T 18 Std?

1 T = 24 Std
6 T 18 Std = 24 Std . 6 + 18 Std
144
18
162 Std.

b) *Kürzen.*

Wieviele Gros, Dutzend und Stück sind 5387 St?

5387 St = 5387 D : 12 = 448 D 11 St
58
107
11

448 D = 448 Gr : 12 = 37 Gr 4 D
88
4

5387 St = 37 Gr 4 D 11 St.

Hier entscheidet die *mathematische* Richtigkeit, wie schon oben S. 396 bemerkt wurde. Die Schreibweise, wie man sie zumeist findet, nämlich 5387 St : 12 = 448 D 11 St u. s. w. zwingt die Kinder, Grundfalsches auf Treu und Glauben hinzunehmen.

c) *Addition.* 36 J 8 Mon + 27 J 3 Mon + 25 J 9 Mon + 48 J 10 Mon + 29 J 7 Mon + 54 J 6 Mon = ?

36	J	8	Mon		43 Mon =
27	„	3	„		43 J : 12 = 3 J
25	„	9	„		7 Mon
48	„	10	„		
29	„	7	„		219 J
54	„	6	„		3 „
219	„	43	„		222 J
222	J	7	Mon		

Die Sortenverwandlung wird hier selbstverständlich schneller ohne schriftliche Darstellung vollzogen; das gegebene Beispiel soll aber das *Normalverfahren* veranschaulichen.

d) *Subtraktion.* 1) 1804 J 4 Mon 8 T — 1758 J 10 Mon 9 T. 2) Wie alt war Goethe, als er starb?

---

19) Wir bemerken hier noch einmal, daß wir an Stelle der Namen *Resolution* und *Reduktion* (in der in Norddeutschland gebräuchlichen Bedeutung) die deutschen Bezeichnungen *Erweitern* und *Einrichten* einerseits und *Kürzen* andererseits angenommen haben. Vgl. Rechenbuch, Heft 4 (Ausg. A).

$$\begin{array}{rrrrrrr} 1) & 1804. & J & \overset{15}{4.} & Mon & \overset{38}{8} & T \\ - & 1758 & „ & 10 & „ & 9 & „ \\ \hline & 45 & J & 5 & Mon & 29 & T \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} 2) & 1831. & J & \overset{13}{2.} & Mon & \overset{50}{21} & T \\ - & 1748 & „ & 7 & „ & 27 & „ \\ \hline & 82 & J & 6 & Mon & 23 & T \end{array}$$

Es sind hier, was sich durchaus empfiehlt, die durch Verwandlung einer höhern Einheit entstandenen niedern Einheiten mit den vorhandenen gleich vereinigt worden. — Bei dem zweiten Beispiele muß der Februar, weil 1832 ein Schaltjahr war, zu 29 Tagen angenommen werden.

e) Multiplikation. Wieviel ist 35 D 9 St . 47?

35 D 9 St . 47
140 36
245 63
35 423 : 12 = 35 D
63
3
1680 D 3 St.

f) Division. 1) Teilen: Wieviel beträgt der 28. Teil von 345 Schock 54 Stück? 2) Messen: Wie oft kann man 9 Schock 1 Mandel 12 Stück von 125 Schock 3 Mandel 14 Stück wegnehmen?

345 Sch 54 St : 28 = 12 Sch 21 St
28
65
56
9 Sch = 540 St
594 St
56
34
28
6 St Rest.

125 Sch 59 St : 9 Sch 27 St =
60 St . 125 — 60 St . 9
7500 — 540
59 — 27
7559 — 567
7559 St : 567 St = 13 mal
567
1889
1701
188 St Rest.

Noch vor den Rechnungen mit benannten Zahlen bringt unser „Rechenbuch" die Schlußrechnung mit einer Aufgabenreihe, in welcher die Schlüsse von der Einheit auf die Mehrheit und umgekehrt, sowie die Schlüsse von einer Mehrheit auf eine andere Berücksichtigung finden. In diesen Aufgaben kann es sich nur um ganze und Dezimal-Zahlen, dazu um leicht übersehbare Verhältnisse, handeln. In den schriftlichen Darstellungsformen dieser Stufe müssen aber alle einzelnen Erwägungen und Schlüsse Berücksichtigung finden. Beispiele:

Schluß von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit.

1) Gerades Verhältnis. Aufgabe: Am 24. Februar früh 7 Uhr zeigte das Thermometer 12° R (Réaumur) Kälte an; wieviel Grad Celsius (C) sind das (80° R = 100° C)?

a) Ansatz. 80° R = 100° C
12° „ = x

b) Schlüsse. 80° R = 100° C
1° „ = 100° C : 80
12° „ = 100° C : 80 . 12

c) Ausrechnung. 100° C . 12 = 1200° C
1200° C : 80 = 15° C
400

Zu sprechen: a) 80 Grad R sind 100 Grad C; 12° R sind wieviel Grad C?
b) Wenn 80° R 100° C sind, so ist 1° R der 80. Teil davon und 12° R sind 12 mal der 80. Teil von 100° C.

d) Zusammenfassung (mündlich): Da 80° R gleich 100° C sind, so sind 12 Grad R gleich 15 Grad C.

2) Ungerades Verhältnis. Aufgabe: Wer täglich 5 ℳ ausgiebt, reicht mit seinem Gelde 16 Tage; wie lange reicht er bei einer täglichen Ausgabe von 4 ℳ?

a) Ansatz. 5 ℳ r. 16 T
4 „ „ x

b) Schlüsse. 5 ℳ = 16 T
1 „ = 16 T . 5
4 „ = 16 T . 5 : 4

c) Ausrechnung. 16 T . 5 = 80 T;
80 T : 4 = 20 T

Zu sprechen: a) Bei 5 Mark täglicher Ausgabe reicht man 16 Tage; bei 4 Mark reicht man wieviele Tage?
b) Reicht man bei 5 ℳ täglicher Ausgabe 16 Tage, so reicht man bei 1 ℳ 16 mal so lange und bei 4 ℳ den 4. Teil davon, also 16 Tage mal 5 durch 4.

d) Zusammenfassung (mündlich): Wenn jemand bei einer täglichen Ausgabe von 5 ℳ mit seinem Gelde 16 Tage reicht, so reicht er bei einer täglichen Ausgabe von 4 ℳ 20 Tage.[20])

f) Das sechste Schuljahr.

Wie Dezimalzahlen zu lesen sind, das ist oben mitgeteilt worden.[21]) Über das Schreiben derselben sei hier noch folgendes bemerkt. Da und dort pflegt man die Dezimalstellen mit kleinern Ziffern zu schreiben, auch wohl etwas tiefer zu stellen als die vorausgehenden Ziffern für die Ganzen. Es ist das aber nicht nur eine unnötige, sondern auch eine unpraktische Schreibweise, von der wir deshalb keinen Gebrauch machen. Übrigens kommen kleinere Ziffern für Dezimalen auch nicht in den reichsgesetzlichen Bestimmungen über die Schreibweise der dezimalen

20) Weitere Angaben über einzelne Fälle der schriftlichen Darstellung findet man in dem betr. Lehrerhefte.

21) Vergl. S. 399.

Sorten vor. Dazu hier noch folgendes. Um „bequemere" Zahlen zu erhalten, werden die dezimalen Sorten nicht selten in abgekürzter Form geschrieben, d. h. man läßt Nullen am Ende weg, oder man drückt die Dezimalstellen durch eine Bruchzahl aus.[22]) In einzelnen Fällen mag das zu „bequemeren" Zahlen führen, auch sonst sich „praktisch" erweisen, indem dadurch z. B. das Schreiben einiger Ziffern erspart wird; trotzdem sind wir aus mathematischen und pädagogischen Gründen nicht für dergleichen Abkürzungen. Denn es wird dadurch der dezimale Charakter unserer Münz-, Maß- und Gewichtszahlen gründlich verwischt, während es doch Aufgabe der Schule sein muß, dafür zu sorgen, daß derselbe so stark als möglich hervortrete. Fast möchte es den Anschein gewinnen, als gingen manche Rechenbücher und Rechenlehrer immer noch darauf aus, die Dezimalstellen, wo nur irgend möglich, zu beseitigen. Das kann aber doch gewiß nicht der Zweck der Einführung dezimaler Sorten sein. Und so halten wir denn daran fest, daß mindestens in den schriftlichen Darstellungsformen die Dezimalzahlen als solche zu respektieren sind. Nur in einem Falle meinen wir eine Ausnahme machen zu dürfen, dann nämlich, wenn Flächen- und Körpermaße mit mehr als 3 Dezimalen auftreten.

Was die Schreibweise der **Bruchzahlen** anlangt, so ist wiederholt betont worden, daß die Bruchstriche **wagerecht** zu schreiben sind und daß sich die Kinder daran gewöhnen müssen, dieselben zuerst, d. h. bevor sie Zähler und Nenner schreiben, auszuführen. Bei **gemischten Zahlen** muß der Bruchstrich auf die Mitte der vorangehenden Ziffer der Ganzen zeigen; ähnliches gilt betreffs des vorangehenden oder nachfolgenden Gleichheitszeichens. Es ist also z. B. $6\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ aber nicht $6_{\frac{2}{3}}$ und $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ zu schreiben u. s. w. Auch empfiehlt es sich, für Bruchzahlen im allgemeinen etwas kleinere Ziffern als für ganze und Dezimal-Zahlen zu verwenden, damit nicht Doppelzeilen entstehen.

A. Dezimalzahlen.

a) **Addition.** 1) 19,748 + 28,635 + 46,437 + 79,086 + 7,904 + 5,468 =; 2) 87,5 + 9,78 + 0,9 + 28,678 + 4,035 + 97,85 =; 3) 296,250 kg + 1054,750 kg + 873,125 kg + 654,375 kg + 2479,875 kg + 537,268 kg = ?

19,748	87,5	296,250 kg
28,635	9,78	1054,750 „
46,437	0,9	873,125 „
79,086	28,678	654,375 „
7,904	4,035	2479,875 „
5,468	97,85	537,268 „
187,278	228,743	5895,643 kg

b) **Subtraktion.** 1) 9,065 — 6,456; 2) 6,95 — 3,456; 3) 8,2 — 7,709; 4) 12 — 6,308. 5) Zwei Kaufleute erhielten zusammen eine Warensendung, deren Bruttogewicht 342,125 kg und deren Tara 27,375 kg betrug. Wenn nun der erste Kaufmann 158,875 kg von der Ware bekam, wieviel bekam der zweite?

---

22) So finden wir z. B. $12\frac{3}{4}$ ℳ anstatt 12,75 ℳ; 6,5 m anstatt 6,50 m; $3\frac{1}{8}$ kg anstatt 3,125 kg; 3,54 kg anstatt 3,540 kg u. s. w.

```
  9.,06.5        6,9.5        8.,2.        1.2.,0
– 6,456        – 3,456      – 7,709      –   6,308
  2,609          3,494        0,491          5,692
```

```
Brutto  34.2.,1.25 kg
Tara       27,375 „
Netto   3.1.4.,7.5.0 kg; davon ab
„        158,875 „ ; bleibt
Netto    155,875 kg für den zweiten Kaufmann.
```

c) **Multiplikation.** 1) 5,407 . 100; 2) 5,407 . 37; 3) 5,407 . 0,29; 4) 5,407 . 6,83. 5) Wie groß ist die Bodenfläche eines 8,25 m langen und 6,13 m breiten Zimmers?

```
1) 5,407 . 100      2) 5,407 . 37       3) 5,407 . 0,29
   540,700             16221                10814
                        37849                 48663
                       200,059              1,56803

4) 5,407 . 6,83     5) 8,25 qm . 6,13
   32442                4950
    43256                825
     16221               2475
   36,92981            50,5725 qm
```

Auffassung: Maßeinheit = 1 qm; deshalb eigentlich: 1 qm . 8,25 . 6,13; dafür abgekürzt: 8,25 qm . 6,13 2c.

d) **Division (Teilen und Messen).** 1) 17 : 8; 2) 36 : 11; 3) 334,56 : 246; 4) 334,56 : 2,46; 5) 33,456 : 24,6; 6) 0,051 : 0,68; 7) 63,7 : 34,56. 8) Ein Wasserbottich enthält, bis an den Rand gefüllt, 15,38 hl Wasser; wieviele Fässer zu 0,85 hl können daraus gefüllt werden?

```
1) 17 : 8 = 2,125          2) 36 : 11 = 3,2727 . . .
   10                         30
    20                         80
     40                         30
                                 80
                                  3

3) 334,56 : 246 = 1,36     4) 334,56 : 2,46 =
   246                         33456 : 246 = 136
    885                        246
    738                         885
     1476                       738
     1476                        1476
                                 1476

5) 33,456 : 24,6 =         6) 0,051 : 0,68 =
   334,56 : 246 = 1,36          5,1 : 68  = 0,075
    885                          510
     1476                        476
                                  340
                                  340
```

7) 63,7 : 34,56 =
6370 : 3456 = 1,843
3456
29140
27648
14920
13824
10960
10368
592

8) 15,38 hl : 0,85 hl =
1538 : 85 = 18 Fässer.
85
688
680
8

Da die Dezimalzahlen auf dieser Stufe das erste Mal als solche im Zusammenhange auftreten, so muß bei jeder der vier Grundrechnungsarten auf Bezeichnung der Stellenwerte eben so großes Gewicht gelegt werden, wie im vierten Schuljahre betreffs der Stellenwerte ganzer Zahlen. Bei Addition und Subtraktion gelingt die Übertragung des Verfahrens dem Schüler ohne große Mühe; weniger bei Multiplikation und Division. Deshalb liegt hier auch mehr als anderwärts die Gefahr nahe, in einen toten Mechanismus zu versinken. Um denselben zu verhüten, muß gleich von vornherein zu voller Klarheit durchgedrungen werden. Jedenfalls dürfen Abkürzungen in der begleitenden Sprechweise nicht eher eintreten, als bis der Schüler mit Angabe der Stellenwerte jede Aufgabe geläufig durchzuführen vermag. Hierzu zwei Beispiele.

Multiplikation. Aufgabe: 2,34 . 67. Auflösung: α) Ausführlich: 4 h[23]) mal 60 = 24 z, geschrieben 4 z, gemerkt 2 E; 3 z mal 60 = 18 E; 18 E und 2 E = 20 E; geschrieben 0 E, gemerkt 2 Z; 2 E mal 60 = 12 Z; 12 Z und 2 Z = 14 Z u. s. w. β) Kurz: 4 mal 6 = 24; 4, 2; 3 mal 6 und 2 = 20; 0, 2; 2 mal 6 und 2 = 14 u. s. w.

Division. Aufgabe: 0,051 : 0,68. Auflösung: α) Ausführlich: Der Divisor ist in eine ganze Zahl zu verwandeln; deshalb multipliziert man Dividend und Divisor mit 100[24]) und erhält 5,1 : 68 als Aufgabe. 5 E durch 68 giebt 0 E; 5 E = 50 z; 50 z und 1 z = 51 z; 51 z durch 68 giebt 0 z; 51 z = 510 h; 510 h durch 68 = 7 h; 8 mal 7 h = 56 h; geschrieben 6 h, gemerkt 5 z; 60 mal 7 h ist 420 h oder 42 z, dazu 5 z ist 47 z; abgezählt bleibt 34 h; 34 h = 340 t; 340 t durch 68 = 5 t; 8 mal 5 t = 40 t; geschrieben 0 t, gemerkt 4 h; 60 mal 5 t = 300 t, dazu 4 h ist 340 t; abgezählt bleibt Null. Also ist 0,051 : 0,68 gleich 0,075! β) Kurz: 0,051 : 0,68 wird umgewandelt in 5,1 : 68; 5 durch 68 = 0 Einer; 51 durch 68 = 0 z; 510 : 68 = 7 h; 8 mal 7 = 56; 6, 5; 6 mal 7 und 5 = 47; 10 weniger 6 = 4; 10 weniger 7 = 3; 340 durch 68 = 5; 8 mal 5 = 40; 0, 4; 6 mal 5 und 4 = 34; Rest Null. Also ist ꝛc.

Nur ganz kurz sei der Stellenerhöhung gedacht, welche dann eintritt, wenn eine beschränkte Anzahl von Dezimalstellen beibehalten wird. Dieselbe besteht bekanntlich darin, daß man die letzte beibehaltene Stelle um eine Einheit erhöht, sobald die erste weggelassene Stelle 5 oder mehr als 5 beträgt.

c) Schlußrechnung. Bei 3,75 m Höhe würde der Luftraum eines Schulzimmers 169,5 cbm betragen; wieviel beträgt er bei 3,85 m Höhe?

---

[23]) E = Einer, Z = Zehner, H = Hunderte u. s. w. z = Zehntel, h = Hundertstel, t = Tausendstel u. s. w.

[24]) Weshalb hieraus eine Aufgabe entsteht, die denselben Quotienten ergiebt, muß der Rechenschüler schon vorher eingesehen haben. Vergl. S. 281.

Ansatz.	3,75 m g. 169,5 cbm	
	3,85 „ „ x	
Schlüsse.	3,75 m g. 169,5 cbm	
	1,00 „ „ 169,5 cbm : 3,75	
	3,85 „ „ 169,5 cbm : 3,75 . 3,85	

Ausrechnung. 169,5 cbm : 3,75

$$
\begin{array}{lll}
= 16950 \text{ „ } : 375 = 45{,}2 \text{ cbm}; & & 45{,}2 \text{ cbm} . 3{,}85 \\
\underline{1500} & & \underline{\qquad\qquad} \\
\;\;1950 & & \quad 1356 \\
\;\;\underline{1875} & & \quad\; 3616 \\
\quad 750 & & \quad\;\; \underline{2260} \\
\quad \underline{750} & & \underline{\underline{174{,}020 \text{ cbm}}}
\end{array}
$$

Zusammenfassung (mündlich): Wenn der Luftraum eines Schulzimmers bei 3,75 m Höhe 169,5 cbm betragen würde, so beträgt er bei 3,85 m Höhe 174,020 cbm.

B. Bruchzahlen.

a) **Formänderungen**: Verwandlung ganzer oder gemischter Zahlen in Bruchzahlen und umgekehrt; Einrichten, Erweitern und Kürzen; Aufsuchen des Hauptnenners und Gleichnamigmachen.

1) Verwandle 28 Ganze in Viertel!

1 Ganzes $= \frac{4}{4}$; 28 Ganze $= \frac{4}{4} . 28 = \frac{112}{4}$; kürzer: $28 . 4 = 112$; also $\underline{\underline{\frac{112}{4}}}$!

2) Richte $23\frac{4}{7}$ ein!

$$
\begin{array}{l}
23\frac{4}{7} \\
\underline{\quad\quad} \\
161 \\
\underline{\;\;4} \\
\frac{165}{7}
\end{array}
\quad ; \text{ kürzer: } \quad
\begin{array}{l}
23\frac{4}{7} \\
\underline{\quad\quad} \\
\underline{\underline{\frac{165}{7}}}
\end{array}
$$

3) Verwandle $\frac{3716}{15}$ in eine ganze oder gemischte Zahl!

$$
\begin{array}{lll}
\frac{3716}{15} = & 3716 : 15 = & \underline{\underline{247\frac{11}{15}}} \\
 & \;\;\underline{71} & \\
 & \;\;\;\underline{116} & \\
 & \;\;\;\;\;11 &
\end{array}
$$

4) Erweitere $\frac{3}{8}$ zu 72steln!

$$72 : 8 = 9; \; \frac{3 . 9}{8 . 9} = \underline{\underline{\frac{27}{72}}}$$

5) Kürze $\frac{27}{72}$!

$$\frac{27}{72} \overset{3}{=} \frac{9}{24} \overset{3}{=} \frac{3}{8}; \text{ kürzer gleich } \frac{27}{72} \overset{9}{=} \frac{3}{8}$$

6) Suche den Hauptnenner (H) für die Nenner 8, 3, 15, 4, 6, 24, 20!

$$
\begin{array}{l}
\cancel{8}, \cancel{3}, 15, \cancel{4}, \cancel{6}, 24, 20 \\
\hline
15 = 3 . 5 \\
24 = 2 . 2 . 2 . \cancel{3} \\
20 = \cancel{2} . \cancel{2} . \cancel{5} \\
\hline
H = 15 . 8 = \underline{\underline{120}}
\end{array}
$$

7) Mache gleichnamig $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{12}$!

$$\begin{array}{r}
\cancel{4},\ \cancel{6},\ 8,\ 15,\ 10,\ 12 \\ \hline
8 = 2\,.\,2\,.\,2 \\
15 = 3\,.\,5 \\
10 = \cancel{2}\,.\,\cancel{5} \\
12 = \cancel{2}\,.\,\cancel{2}\,.\,\cancel{3} \\ \hline
H = 8\,.\,15 = \underline{\underline{120}}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c|c}
\multicolumn{3}{c}{1 = \frac{120}{120}} \\ \hline
\frac{3}{4} & 30 & 90 \\
\frac{5}{6} & 20 & 100 \\
\frac{1}{8} & 15 & 15 \\
\frac{8}{15} & 8 & 64 \\
\frac{7}{10} & 12 & 84 \\
\frac{5}{12} & 10 & 50
\end{array}$$

Hierzu ist folgendes zu bemerken. Die Behandlung der Aufgaben unter 1) bis 5) ist die allgemein übliche. Das Kürzen wird um so besser gelingen, je sicherer die Rechenschüler in der Zerlegung der Produktzahlen (innerhalb der Zahlreihe 1 bis 100) in Faktorenpaare sind. Es ist daher diese Art der Zerlegung vorher und nebenher immer wieder zu üben. — Abweichend von der üblichen Weise ist hingegen unsere Behandlung der Aufgaben unter 6) und 7). Die noch immer in den meisten Rechenwerken gebotene Form für die Aufsuchung des Hauptnenners besteht darin, daß man die gemeinschaftlichen Faktoren der übrigbleibenden Nenner fortgesetzt aufsucht und dieselben schließlich multipliziert. Für die unter 6) gegebene Aufgabe erhält man dann z. B.

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{8},\ \cancel{3},\ 15,\ \cancel{4},\ \cancel{6},\ 24,\ 20 \\ \hline
3) & \phantom{\cancel{8},\ \cancel{3},\ 1}\cancel{5}\phantom{,\ \cancel{4},\ \cancel{6},\ 2}8\ \ 20 \\ \hline
4) & \phantom{\cancel{8},\ \cancel{3},\ 15,\ \cancel{4},\ \cancel{6},\ 2}2\ \ \ 5 \\ \hline
H = & 3\,.\,4\,.\,2\,.\,5 = 12\,.\,10 = \underline{\underline{120}}
\end{array}$$

Wir haben dieses Verfahren nicht gewählt, weil der angehende Rechner durch dasselbe sehr oft zu einem Nenner gelangt, welcher nicht, wie es doch sein soll, zugleich der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist. Der Grund ist in dem Umstande zu suchen, daß durch die Division mit einem gemeinschaftlichen Faktor oft sich wieder Zahlen ergeben, von denen die eine in der andern aufgeht. Übrigens ist auch das von uns angenommene Verfahren für den Volksschüler das leichter verständliche. Man versuche es nur, wenn man anderer Ansicht sein sollte!

Da es üblich ist, von den sich ergebenden gleichnamigen Bruchzahlen nur die Zähler aufzuschreiben, so haben auch wir bei Aufgabe 7) von dieser Abkürzung Gebrauch gemacht. Es folgen also in den senkrechten Reihen aufeinander: Gegebene Bruchzahlen, Erweiterungszahlen, Zähler der gesuchten gleichnamigen Bruchzahlen.

b) Grundrechnungsarten.

I. Addition. 1) $5\frac{47}{60} + \frac{29}{60} + 7\frac{59}{60} =$; 2) $\frac{2}{3} + 3\frac{3}{5} + 8\frac{9}{10} + 7\frac{5}{12} =$; 3) $3\frac{1}{2}$ Sch $+ 4\frac{5}{8}$ Sch $+ 8\frac{3}{4}$ Sch $=$?

1) $$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{1 = \frac{60}{60}} \\ \hline
5\frac{47}{60} & 47 \\
\frac{29}{60} & 29 \\
7\frac{59}{60} & 59 \\ \hline
12 & 135 : 60 = 2\frac{1}{4} \\
2\frac{1}{4} & \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \\ \hline\hline
14\frac{1}{4} &
\end{array}$$

2) $$\begin{array}{r|r|l}
\multicolumn{3}{c}{1 = \frac{60}{60}} \\ \hline
\frac{2}{3} & 20 & 40 \\
3\frac{3}{5} & 12 & 36 \\
8\frac{9}{10} & 6 & 54 \\
7\frac{5}{12} & 5 & 25 \\ \hline
18 & & 155 : 60 = 2\frac{7}{12} \\
2\frac{7}{12} & & \frac{35}{60} = \frac{7}{12} \\ \hline
\underline{\underline{20\frac{7}{12}}} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\cancel{3},\ \cancel{5},\ 10,\ 12 \\ \hline
10 = 2\,.\,5 \\
12 = \cancel{2}\,.\,2\,.\,3 \\ \hline
10\,.\,6 = 60
\end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l|c|l} \multicolumn{3}{c}{1 = \frac{12}{12}} \\ \hline 3\frac{1}{2}\text{ Sch} & 6 & 6 \\ 4\frac{5}{6}\ \text{„} & 2 & 10 \\ 8\frac{3}{4}\ \text{„} & 3 & 9 \\ \hline 15\text{ Sch} & & 25 : 12 = 2\frac{1}{12} \\ 2\frac{1}{12}\ \text{„} & & \frac{1}{12} \\ \hline 17\frac{1}{12}\text{ Sch} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \cancel{2},\ 6,\ 4 \\ \hline 6 = 2 \cdot 3 \\ 4 = \cancel{2} \cdot 2 \\ \hline 6 \cdot 2 = 12 \end{array}$$

II. Subtraktion. 1) $6\frac{43}{60} - 4\frac{29}{60}$; 2) $32\frac{13}{60} - 18\frac{37}{60}$; 3) $5\frac{5}{12} - 4\frac{3}{16}$; 4) $264\frac{7}{18} - 158\frac{19}{30}$; 5) $7\frac{3}{4}$ T $- 3\frac{5}{6}$ T.

1)
$$\begin{array}{r|l} 6\frac{43}{60} & 43 \\ -\ 4\frac{29}{60} & 29 \\ \hline 2\frac{7}{30} & \frac{14}{60} = \frac{7}{30} \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{1 = \frac{60}{60}} \\ \hline 32.\frac{13}{60} & 73 \\ -\ 18\,\frac{37}{60} & 37 \\ \hline 13\frac{3}{5} & \frac{36}{60} = \frac{3}{5} \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r|c|r} \multicolumn{3}{c}{1 = \frac{48}{48}} \\ \hline 5\frac{5}{12} & 4 & 20 \\ -\ 4\frac{3}{16} & 3 & 9 \\ \hline 1\frac{11}{48} & & \frac{11}{48} \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r|c|r} \multicolumn{3}{c}{1 = \frac{90}{90}} \\ \hline 264.\frac{7}{18} & 5 & 125 \\ -\ 158\,\frac{19}{30} & 3 & 57 \\ \hline 105\,\frac{34}{45} & & \frac{68}{90} = \frac{34}{45} \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r|c|r} \multicolumn{3}{c}{1 = \frac{12}{12}} \\ \hline 7.\frac{3}{4}\text{ T} & 3 & 21 \\ -\ 3\,\frac{5}{6}\ \text{„} & 2 & 10 \\ \hline 3\frac{11}{12}\text{ T} & & \frac{11}{12} \end{array}$$

Die Gleichung für 1 Ganzes, welche (abweichend von den sonst üblichen Darstellungsformen) hier aufgeführt wird, erweist sich gegenüber der Beweglichkeit der jugendlichen Rechner als eine durchaus praktische Beigabe. Auch die etwas umständlichere Behandlung der Aufgaben, in denen 1 Einer in Bruchteile aufzulösen ist, entspringt derselben Erwägung.

III. Multiplikation. 1) $\frac{4}{9} \cdot 732$; 2) $35\frac{5}{8} \cdot 76$; 3) $384 \cdot \frac{3}{5}$; 4) $96 \cdot 87\frac{7}{12}$; 5) $\frac{15}{16} \cdot \frac{8}{9}$; 6) $5\frac{5}{12} \cdot 4\frac{4}{15}$. 7) Wieviel Zinsen bringen 26 ℳ zu $3\frac{1}{3}\,\%$ in 1 Jahr? 8) Desgleichen 250 ℳ zu 4 % in $4\frac{3}{4}$ J? 9) Desgleichen 360 ℳ zu $4\frac{1}{3}\,\%$ in $2\frac{3}{4}$ J?

$$1)\ \frac{4}{9} \cdot 732 = \frac{4 \cdot \overset{244}{\cancel{732}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \begin{array}{l} 976 : 3 = \underline{\underline{325\frac{1}{3}}} \\ \hline \ \ 7 \\ \hline \ \ 16 \\ \hline \ \ \ \ 1 \end{array}$$

$$2)\ 35\frac{5}{8} \cdot 76 = 35 \cdot 76 + \frac{5}{8} \cdot 76 = \underline{\underline{2707\frac{1}{2}}}.$$

$$\begin{array}{r|l} 35 \cdot 76 & \dfrac{5 \cdot \overset{19}{\cancel{76}}}{\underset{2}{\cancel{8}}} = \begin{array}{l} 95 : 2 = 47\frac{1}{2} \\ \hline 15 \\ \hline \ \ 1 \end{array} \\ \hline 245 & \\ 210 & \\ \hline 2660 & \\ +\ 47\frac{1}{2} & \\ \hline 2707\frac{1}{2} & \end{array}$$

$$3)\ 384 \cdot \frac{3}{5} = \frac{384 \cdot 3}{5} = \begin{array}{l} 1152 : 5 = \underline{\underline{230\frac{2}{5}}} \\ \hline \ \ 15 \\ \hline \ \ \ \ 2 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} \underline{96 \;.\; 87\tfrac{7}{12}} \\ 768 \\ \underline{672} \\ 8352 \\ \underline{+\;56} \\ \underline{\underline{8408}} \end{array} \;; \qquad \frac{\overset{8}{\cancel{96}} \;.\; 7}{\underset{1}{\cancel{12}}} = 56$$

5)
$$\tfrac{15}{16} \;.\; \tfrac{8}{9} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}} \;.\; \overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{2}{\cancel{16}} \;.\; \underset{3}{\cancel{9}}} = \underline{\underline{\tfrac{5}{6}}}$$

6)
$$5\tfrac{5}{12} \;.\; 4\tfrac{4}{15} = \frac{\overset{13}{\cancel{65}} \;.\; \overset{16}{\cancel{64}}}{\underset{3}{\cancel{12}} \;.\; \underset{3}{\cancel{15}}} = \begin{array}{l} 208 : 9 = \underline{\underline{23\tfrac{1}{9}}} \\ \underline{28} \\ \;\;1 \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{r} \underline{0{,}26\ \mathcal{M} \;.\; 3\tfrac{1}{3}} \\ 78 \\ \underline{8\tfrac{2}{3}} \\ \underline{\underline{0{,}86\tfrac{2}{3}\ \mathcal{M}}} \end{array} \;(0{,}87\ \mathcal{M})$$

8)
$$\begin{array}{r} \underline{2{,}50\ \mathcal{M} \;.\; 4 \;.\; 4\tfrac{3}{4}} \\ \underline{2{,}50\ \mathcal{M} \;.\; 19} \\ 250 \\ \underline{2250} \\ \underline{\underline{47{,}50\ \mathcal{M}}} \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{r} \underline{3{,}60\ \mathcal{M} \;.\; 4\tfrac{1}{3} \;.\; 2\tfrac{3}{4}} \\ 3{,}60\ \mathcal{M} \;.\; \tfrac{143}{12} \\ \underline{=\; 0{,}30\ \mathcal{M} \;.\; 143} \\ 30 \\ 120 \\ \underline{90} \\ \underline{\underline{42{,}90\ \mathcal{M}}} \end{array} \;; \qquad \frac{13 \;.\; 11}{3 \quad\; 3} = \tfrac{143}{12}$$

IV. **Division.** 1) 536 : 12; 2) $633\frac{3}{5}$: 12; 3) 365 : $\frac{15}{16}$; 4) 79 : $3\frac{5}{8}$; 5a) $\frac{23}{25}$: $\frac{11}{12}$; 5b) $\frac{24}{25}$: $\frac{8}{15}$; 6) $96\frac{8}{9}$: $13\frac{3}{4}$. 7) Welches Kapital giebt jährlich 6,50 *M* Zinsen bei $3\frac{1}{4}$ %? 8) In welcher Zeit bringen 100 *M* zu $3\frac{1}{3}$ % 12,50 *M* Zinsen?

1)
$$\begin{array}{l} 536 : 12 = \underline{\underline{44\tfrac{2}{3}}} \\ \underline{\;56} \\ \tfrac{8}{12} = \tfrac{2}{3} \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l} 633\tfrac{3}{5} : 12 = \underline{\underline{52\tfrac{4}{5}}} \\ \underline{\;33} \\ 9\tfrac{3}{5} = \tfrac{48}{5};\; \tfrac{48}{5} : 12 = \tfrac{4}{5} \end{array}$$

3)
$$365 : \tfrac{15}{16} = \frac{\overset{73}{\cancel{365}} \;.\; 16}{\cancel{15}\,3} = \underline{\underline{389\tfrac{1}{3}}}$$

$$\begin{array}{r} \underline{73 \;.\; 16} \\ 73 \\ \underline{438} \\ 1168 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1168 : 3 = 389\tfrac{1}{3} \\ \underline{\;26} \\ \;\;\underline{28} \\ \;\;\;\;1 \end{array}$$

4)
$$79 : 3\tfrac{5}{8} = 79 : \tfrac{29}{8} = \frac{79 \;.\; 8}{29} = \begin{array}{l} 632 : 29 = \underline{\underline{21\tfrac{23}{29}}} \\ \underline{\;52} \\ \;\;23 \end{array}$$

5a)
$$\tfrac{23}{25} : \tfrac{11}{12} = \frac{23}{25} \cdot 12 : 11 = \frac{23 \;.\; 12}{25 \;.\; 11} = \tfrac{276}{275} = 1\tfrac{1}{275}$$

$$5b)\quad \tfrac{24}{25} : \tfrac{8}{15} = \frac{\overset{3}{\cancel{24}} \cdot \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{5}{\cancel{25}} \cdot \underset{1}{\cancel{8}}} = \tfrac{9}{5} = \underline{\underline{1\tfrac{4}{5}}}$$

$$6)\quad 96\tfrac{8}{9} : 13\tfrac{3}{4} = 96\tfrac{8}{9} : \tfrac{55}{4} = 387\tfrac{5}{9} : 55 = \underline{\underline{7\tfrac{23}{495}}}$$

$$\begin{array}{l} 385 \\ \hline 2\tfrac{5}{9} = \tfrac{23}{9};\ \tfrac{23}{9} : 55 = \tfrac{23}{495} \end{array}$$

$$7)\quad 100\ \mathcal{M} : 3\tfrac{1}{4} \cdot 6\tfrac{1}{2} = 100\ \mathcal{M} \cdot 2 = \underline{\underline{200\ \mathcal{M}}}$$

Ausführlich: $650 : 3\frac{1}{4} = 2600 : 13 = 200$

$$8)\quad 12\tfrac{1}{2}\ J : 3\tfrac{1}{3} = \tfrac{25}{2}\ J : \tfrac{10}{3} = \underline{\underline{3\tfrac{3}{4}\ J}}$$

$$\frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot 3}{2 \cdot \underset{2}{\cancel{10}}} = \tfrac{15}{4} = 3\tfrac{3}{4}$$

Bei allen Multiplikations- und Divisionsaufgaben mit Bruchzahlen muß darauf Bedacht genommen werden, daß nicht unnötigerweise große Zahlen entstehen. Es empfiehlt sich deshalb z. B. durchaus nicht, jede gemischte Zahl einzurichten. Wird aber eingerichtet, dann darf das Kürzen nicht verabsäumt werden. Erfahrungsgemäß bereitet die Multiplikation den Kindern wenig Schwierigkeiten; desto mehr dagegen die Division. Man beseitigt diese Schwierigkeiten aber durch die einfache Regel: *Ist der Divisor eine Bruchzahl oder gemischte Zahl, dann ist derselbe vor der Division in eine ganze Zahl zu verwandeln!* Wie diese Verwandlung zu bewirken ist, muß dem Kinde natürlich vollständig klar sein. Sie beruht bekanntlich auf den beiden Sätzen: a) *Multipliziert man einen Bruch mit seinem Nenner, so erhält man den Zähler als Ganze;* b) *Multipliziert man Dividend und Divisor mit derselben Zahl, so erhält man dasselbe Ergebnis.* Nach der Verwandlung hat man nur noch eine Bruchzahl oder gemischte Zahl durch eine ganze Zahl zu dividieren. Mit andern Worten: Alle Fälle der Bruchdivision werden auf den einzigen Fall zurückgeführt: *Bruchzahl durch ganze Zahl!* Man setze daher das Kind vor allem in stand, *diesen* Rechenfall geläufig durchzuführen, und die Bruchdivision wird ihre Schwierigkeiten für immer verlieren.

5) *Schlußrechnung.*

1) Ein Kapital bringt in 3 J 9 Mon 2538 $\mathcal{M}$ Zinsen ein; wieviel in 6 J? (3 J 9 Mon = $3\frac{3}{4}$ J.)

a) *Ansatz.* $\begin{array}{lll} 3\tfrac{3}{4} & J & 2538\ \mathcal{M}\ Z. \\ 6 & \text{"} & x \end{array}$

b) *Schlüsse.* $\begin{array}{rcl} 3\tfrac{3}{4}\ J & = & 2538\ \mathcal{M} \\ 1\ \text{"} & = & 2538\ \mathcal{M} : 3\tfrac{3}{4} \\ 6\ \text{"} & = & 2538\ \mathcal{M} : 3\tfrac{3}{4} \cdot 6 \end{array}$

c) *Ausrechnung.* $\dfrac{2538\ \mathcal{M} \cdot 4 \cdot \overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} =$

Zu sprechen: a) In $3\frac{3}{4}$ J bringt ein Kapital 2538 $\mathcal{M}$ Zinsen; in 6 Jahren wieviel Mark?

b) Wenn ein Kapital in $3\frac{3}{4}$ J 2538 $\mathcal{M}$ Zinsen bringt, so bringt es in 1 Jahre soviel durch $3\frac{3}{4}$ und in 6 Jahren 6 mal diesen Teil an Zinsen ein.[25])

25) Man könnte von $3\frac{3}{4}$ J auch zunächst auf $\frac{1}{4}$ J durch Division durch 15 schließen, dann weiter auf 6 J durch Multiplikation mit 24; indessen soll hier absichtlich der Charakter der Bruchzahlen in dem Schlusse auf die Einheit hervortreten.

20304 ℳ : 5 = 4060,80 ℳ
  30
   40

d) Zusammenfassung (mündlich): Wenn ein Kapital in $3\frac{3}{4}$ J 2538 ℳ Zinsen einbringt, so bringt es in 6 J 4060,80 ℳ ein.

2) Ein Schriftsetzer setzte während des Vormittags in $4\frac{4}{5}$ Std $\frac{3}{5}$ Bg; wieviel bringt er unter gleichen Umständen während eines Tages in $10\frac{2}{3}$ Std fertig?

a) Ansatz. $4\frac{4}{5}$ Std $\frac{3}{5}$ Bg
$10\frac{2}{3}$ „ x

b) Schlüsse. $4\frac{4}{5}$ Std $= \frac{3}{5}$ Bg
1 Std $= \frac{3}{5}$ Bg : $4\frac{4}{5}$
$10\frac{2}{3}$ Std $= \frac{3}{5}$ Bg : $4\frac{4}{5} \cdot 10\frac{2}{3}$

c) Ausrechnung. $\frac{3}{5}$ Bg : $4\frac{4}{5} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \underset{8}{\cancel{24}}}$ Bg $= \frac{1}{8}$ Bg;

$$\frac{1}{8} \text{ Bg} \cdot 10\frac{2}{3} = \frac{\overset{4}{\cancel{32}}}{\cancel{8} \cdot 3} \text{ Bg} = 1\frac{1}{3} \text{ Bg}.$$

d) Zusammenfassung (mündlich): Wenn in $4\frac{4}{5}$ Std $\frac{3}{5}$ Bg fertig werden, so werden in $10\frac{2}{3}$ Std $1\frac{1}{3}$ Bg fertig.[26])

g) Das siebente und achte Schuljahr.

Der theoretische Teil des Volksschulrechnens schließt unter Verhältnissen, wie sie zumeist vorliegen, mit dem Lehrstoffe des sechsten Schuljahres ab. Was weiter folgt, das ist Wiederholung und Befestigung des Erworbenen, namentlich aber praktisches Rechnen. Es werden da Aufgaben behandelt, deren Lösungen sich wesentlich auf das Verfahren der Schlußrechnung stützen. Nur in gehobenen Volksschulen, vier- bis achtklassigen städtischen Volksschulen, Bürgerschulen (Stadtschulen, Rektoratsschulen 2c.) genannt, wird man auch den theoretischen Teil fortführen wollen. Diesen Bedürfnissen will das letzte Heft unseres „Rechenbuches" (Ausgabe A) dadurch entsprechen, daß es einige Ergänzungs-Abschnitte einschaltet, welche einerseits das theoretische, anderseits das praktische Rechnen weiterführen. Liegen die Verhältnisse günstig, dann sind diese Abschnitte durchzuarbeiten; sonst nicht. Eine Lücke im volksschulmäßigen Wissen und Können wird nicht entstehen, wenn von der Durcharbeitung abgesehen werden muß.

Nachstehend werden zunächst die Ergänzungen des theoretischen, danach die des praktischen Rechnens berücksichtigt.

A. Ergänzungen des theoretischen Rechnens.

Die ersten Ergänzungen beziehen sich auf die Subtraktion. Hier wird das sogenannte österreichische Verfahren, die Ermittelung des Unter-

26) Auch für das sechste Schuljahr bringt das betr. Lehrerheft weitere Angaben über einzelne Fälle der schriftlichen Darstellung.

schieds durch **Zuzählen**, gelehrt. Dasselbe gestattet namentlich bei der **Division** eine Abkürzung, weil sich durch dasselbe die Reste ermitteln lassen, ohne daß man nötig hat, die Teilprodukte aufzuschreiben. Sodann wird die Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Faktors durch **Kettendivision** (Aufsuchung der Kürzungszahl) gezeigt. Besonders aber sind die **abgekürzten Rechnungen** mit Dezimalzahlen für alle Grundrechnungsarten von Wichtigkeit; teilweise auch die Beziehungen zwischen Dezimal- und Bruchzahlen, die Sortenverwandlungen unter Heranziehung von Bruchzahlen und die Doppelbrüche. Ein Gebiet für sich bilden die Quadrat- und Kubikwurzelausziehung.

I. Subtraktion durch Ergänzung des Subtrahenden (sogenanntes österreichisches Verfahren). Beispiele:

a)
$$\begin{array}{r} 548 \\ -\ 325 \\ \hline 223 \end{array} \qquad \text{Rechne: } \begin{array}{l} 5 + \mathbf{3} \text{ (sofort zu schreiben!)} = 8; \\ 2 + \mathbf{2} \text{ („ „ „)} = 4; \\ 3 + \mathbf{2} \text{ („ „ „)} = 5. \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 504 \\ -\ 246 \\ \hline 258 \end{array} \qquad \text{Rechne: } \begin{array}{l} 6 + \mathbf{8} = 14; \\ 5 + \mathbf{5} = 10; \\ 3 + \mathbf{2} = 5. \end{array}$$

Das Verfahren besteht in nichts anderem als in einer Verwertung der bekannten Subtraktionsprobe (Subtrahend + Rest = Minuend). Die Möglichkeit, nach demselben schneller als nach dem eigentlichen Subtraktionsverfahren rechnen zu lernen, liegt vor. Vorteilhaft erweist es sich insbesondere, wenn von demselben Minuenden unmittelbar nacheinander mehrere Subtrahenden abzuzählen sind. **Beispiel:**

$9452 - 3486 - 4427 = 1539$; denn

$7 + 6 + \mathbf{9} = 22$; $4 + 8 + \mathbf{3} = 15$; $5 + 4 + \mathbf{5} = 14$; $5 + 3 + \mathbf{1} = 9$!

Seine Hauptverwertung findet es aber in der **Division**. **Beispiel:**

$$\begin{array}{l} 74396 : 56 = 1328 \text{ R. } 28. \\ 183 \\ \ 159 \\ \ \ 476 \\ \ \ \ 28 \end{array}$$

Rechne: 6 u. **8** ist 14; 5 u. 1 u. **1** ist 7; 18 + **5** ist 23; 15 u. 2 + **1** ist 18; 12 + **7** ist 19; 10 + 1 + **4** ist 15; 48 + **8** ist 56; 40 + 5 + **2** ist 47!

II. Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Faktors (der Kürzungszahl) für zwei Zahlen. Beispiel:

Aufsuchung des Faktors für 756 und 594. Ausführung:

$$\begin{array}{l} 756 : 594 = 1 \\ 594 \\ \hline 162 \mid 594 = 3 \\ \mid 486 \\ \hline 108 \mid 162 = 1 \\ \mid 108 \\ \hline 54 \mid 108 = 2 \\ \mid 108 \\ \hline \end{array}$$

Hiernach ist 54 (der letzte Divisor) der größte gemeinschaftliche Faktor. In der That erhält man: 756 : 54 = 14; 594 : 54 = 11. Das Verfahren nennt man auch Kettendivision.

III. Die abgekürzten Rechnungen mit Dezimalzahlen.

Rechnet man mit Mark und Pfennig, dann genügen zwei Dezimalstellen; bei Kilometer und Meter bedarf es deren drei u. s. w. Deshalb rechnet man auch für gewöhnlich — und namentlich in der Volksschule — nur mit ein, zwei und drei Dezimalstellen. Ergeben sich — z. B. bei Multiplikationen und Divisionen — gleichwohl mehr als drei Stellen, so führt man dieselben auf die erforderliche Stellenanzahl zurück. Dieses geschieht stets auf dieselbe Weise, nämlich durch einfaches Weglassen aller nachfolgenden Stellen, oder durch Erhöhung der letzten beibehaltenen Stelle um eine Einheit. **Regel ist, daß der Fehler, welcher dabei absichtlich gemacht wird, die Hälfte einer Einheit der letzten beibehaltenen Stelle nicht erreichen darf.** Werden also nur Zehntel beibehalten, dann muß der Fehler weniger als ein halbes Zehntel oder fünf Hundertstel betragen. Mit andern Worten: Ist die erste Stelle, welche nicht beibehalten wird, 5 oder größer als 5, dann wird die letzte beibehaltene Stelle um eine Einheit erhöht; ist die erste nicht beibehaltene Stelle kleiner als 5, dann bleibt die letzte beibehaltene Stelle unverändert. Hiernach ist also, wenn nur zwei Stellen beibehalten werden sollen, zu setzen: $48,53\cancel{1} = 48,53$; $65,42\cancel{8} = 65,43$; $106,54\cancel{5} = 106,55$ u. s. w. **Diese Stellenverminderung ist die Grundlage aller abgekürzten Rechnungen mit Dezimalzahlen.**

1. **Abgekürzte Addition.** Bei zwei oder drei Summanden addiert man **eine** Stelle, bei mehr als drei Summanden **zwei** Stellen mehr als in der Summe beibehalten werden sollen. Beispiele:

a) $$\begin{array}{r|l} 0,6569 & 46 \\ 5,3692 & 85 \\ 0,4385 & 27 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{6,464\cancel{6} = \underline{\underline{0,465}};} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r|l} 0,6569 & 46 \\ 5,3692 & 85 \\ 0,4385 & 27 \\ 4,9672 & 68 \\ 0,7438 & 65 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{12,17\cancel{56} = \underline{\underline{12,18}}} \end{array}$$

2. **Abgekürzte Subtraktion.** Man berechnet **eine** Stelle mehr als Stellen beibehalten werden sollen. Beispiele:

a) $$\begin{array}{r} 53,52965 \\ -\ 38,61436 \\ \hline 14,91\cancel{5} = \\ \underline{\underline{14,92}} \end{array}$$

b) Wieviele Stunden sind 5,326745 T — 2,943824 T ?

$$\begin{array}{rl} 5,326745 & \text{T} \\ -\ 2,943824 & „ \\ \hline 2,38\cancel{3}; & 24 \text{ Std} \,.\, 2,38 \\ & \quad\quad 48 \\ & \quad\quad\ 72 \\ & \quad\quad\ 192 \\ \hline & \underline{\underline{57,12 \text{ Std}}} \end{array}$$

3. **Abgekürzte Multiplikation.** Berechne bis auf drei Dezimalstellen genau: 6,78943 . 18,3053! —

a) Vollständige Multiplikation.		b) Abgekürzte Multiplikation.	
6,78943 . 18,2053		6,78943 . 18,2053	
67894	3	. 678943	a
54315	44	543154	b
1357	8860	13579	c
33	94715	339	d
2	036829	20	e
123,603	609979 =	123,603$\cancel{5}$ =	
123,604		123,604	

Das Verfahren ist dieses: Soll das Produkt 3 Dezimalstellen behalten, dann sind in den Einzelprodukten **vier** Dezimalstellen zu berechnen, d. h. es sind die Zehntausendstel noch zu berücksichtigen. Da der Multiplikator aber in seiner höchsten Stelle Zehner enthält, so sind damit die Hunderttausendstel zuerst zu multiplizieren (a), mit der Einerstelle zuerst die Zehntausendstel (b), mit der Zehntelstelle die Tausendstel (c) u. s. f. Doch um möglichste Genauigkeit zu erzielen, zählt man jedesmal noch die durch Multiplikation der vorhergehenden Stelle sich ergebenden höhern Einheiten dazu, d. h. zu 4 mal 8 = 32 (bei b) fügt man hinzu die 2 höhern Einheiten von 3 . 8 = 24; zu 9 . 2 = 18 (bei a) die 1 höhere Einheit von 4 . 2 = 8 u. s. w.

4. **Abgekürzte Division.** Beispiel: 38,3694 : 4,159 = ?

a) Vollständige Division.		b) Abgekürzte Division.	
38369,4 : 4159 = 9,2256;		38369,4 : 4$\cancel{1}\cancel{5}\cancel{9}$ = 9,2256;	
37431		37431	
9384		9384	
8318		8318	
1066	0	1066	(a)
831	8	832	
234	20	234	(b)
207	95	208	
26	250	26	(c)
24	954	25	
1	296	1	

Verfahren bei der abgekürzten Division: Die Einrichtung der Aufgabe ist wie gewöhnlich; dem Reste hängt man aber keine Nullen an, wie bei der vollständigen Division, sondern man verkürzt den Divisor jedesmal um eine Stelle. Grund: Wenn im Dividenden keine Null angehängt wird, so wird derselbe für sich 10 mal so klein genommen; wenn im Divisor eine Stelle gestrichen wird, so wird derselbe für sich auch 10 mal so klein genommen; beides gleicht sich aus. So hätte z. B. bei (a) 10660 Hundertstel durch 4159 dividiert werden müssen; statt dessen betrachtet man aber 1066 als Hundertstel und dividiert durch 415 u. s. w. Die größere Genauigkeit erfordert freilich, daß bei Bildung der Teilprodukte die eben gestrichene Stelle des Divisors noch mit multipliziert wird, und daß die höhern Einheiten des dabei entstehenden Produktes addiert werden. Deshalb ist z. B. bei (a) zu rechnen: 9 . 2 = 18 (gemerkt 2 höhere Einheiten!); 5 . 2 = 10; 10 u. 2 ist 12; geschrieben 2, gemerkt 1; 1 . 2 ist 2; 2 u. 1 ist 3; 4 . 2 ist 8; bei (b) ferner: 5 . 5 ist 25, gemerkt 3; 1 . 5 ist 5; 5 u. 3 ist 8 u. s. f.

IV. Beziehungen zwischen Dezimal- und Bruchzahlen.

Hier handelt es sich um Verwandlung der Bruchzahlen in Dezimalzahlen und umgekehrt; weiterhin um Lösung von Aufgaben, in denen Dezimal- und Bruchzahlen nebeneinander gegeben sind. Die periodischen Dezimalzahlen, welche hierbei auftreten, sind soweit darzustellen, daß die Periode erkennbar ist. Beispiele:

1. **Gegeben: Bruchzahlen.**

a) $\frac{1}{2} = \begin{array}{l} 1 : 2 = 0{,}5; \\ \underline{10} \end{array}$ b) $\frac{1}{3} = \begin{array}{l} 1 : 3 = 0{,}33\ldots; \\ \underline{10} \\ \underline{10} \\ 1 \end{array}$

c) $\frac{5}{6} = \begin{array}{l} 5 : 6 = 0{,}833\ldots; \\ \underline{20} \\ \underline{20} \\ 2 \end{array}$ d) $3\frac{5}{11} = 3 + \begin{array}{l} 5 : 11 = 3{,}4545\ldots; \\ \underline{60} \\ \underline{50} \\ \underline{60} \\ 5 \end{array}$

2. **Gegeben: Dezimalzahlen.**

a) $0{,}5 = \frac{5}{10} \overset{5}{=} \frac{1}{2}$; b) $0{,}33\ldots = \frac{3}{9} \overset{3}{=} \frac{1}{3}$;

c) $0{,}833\ldots = \frac{75}{90} \overset{15}{=} \frac{5}{6}$; d) $3{,}4545\ldots = 3\frac{45}{99} = 3\frac{5}{11}$ u. s. w.

Bei b), c), d) erhält man die Bruchzahlen wie folgt:

b) Das 10fache von 0,33 . . . = 3,33 . . .; davon ab
  „ 1 „ „ 0,33 . . . = 0,33 . . . bleibt

  das 9fache von 0,33 . . . = 3; also
  „ 1 „ „ 0,33 . . . = $\frac{3}{9}$ oder $\frac{1}{3}$;

c) das 100fache von 0,833 . . . = 83,33 . . .; davon ab
  „ 10 „ „ 0,833 . . . = 8,33 . . . bleibt

  das 90fache von 0,833 . . . = 75; also
  „ 1 „ „ 0,833 . . . = $\frac{75}{90} = \frac{5}{6}$;

d) das 100fache von 0,4545 . . . = 45,4545 . . .; davon ab
  „ 1 „ „ 0,4545 . . . = 0,4545 . . . bleibt

  das 99fache von 0,4545 . . . = 45; also
  „ 1 „ „ 0,4545 . . . = $\frac{45}{99} = \frac{5}{11}$ u. s. w.

3. **Aufgaben in Dezimal- und Bruchzahlen.**

a) $\frac{3}{4} + 0{,}58 + \frac{2}{3} + 9{,}375 + \frac{9}{16} = ?$ Lösung: Entweder durch Verwandlung der Bruchzahlen in Dezimalzahlen oder der Dezimalzahlen in Bruchzahlen. Mithin so:

$$\begin{array}{rcr} \frac{3}{4} & = & 0{,}75 \\ 0{,}58 & = & 0{,}58 \\ \frac{2}{3} & = & 0{,}6666 \\ 9{,}375 & = & 9{,}375 \\ \frac{9}{16} & = & 0{,}5625 \\ \hline & & \underline{\underline{11{,}9341}} \end{array}$$

Oder so:

$$\begin{array}{rcr|r|r} & & & \multicolumn{2}{c}{1200} \\ \hline \frac{3}{4} & = & \frac{3}{4} & 300 & 900 \\ 0{,}58 & = & \frac{29}{50} & 24 & 696 \\ \frac{2}{3} & = & \frac{2}{3} & 400 & 800 \\ 9{,}375 & = & 9\frac{3}{8} & 150 & 450 \\ \frac{9}{16} & = & \frac{9}{16} & 75 & 675 \\ & & \overset{\frown}{2} & & \\ \hline & & \underline{\underline{11\frac{1121}{1200}}} & & 3521 : 1200 = 2\frac{1121}{1200} \\ & & & & \underline{2400} \\ & & & & 1121 \end{array}$$

Die zuerst vorgeführte Darstellung ist in den meisten Fällen die kürzere.

b) $17\frac{8}{15} - 13{,}785 = ?$ Lösung. Entweder so:

$$\begin{array}{rcr} 17\frac{8}{15} & = & 17{,}533 \\ -\ 13{,}785 & = & -\ 13{,}785 \\ \hline & & \underline{\underline{3{,}748;}} \end{array}$$

oder so:

$$\begin{array}{rcr|r|r} & & \multicolumn{3}{c}{1 = \frac{600}{600}} \\ \hline 17\frac{8}{15} & = & 17\frac{8}{15} & 40 & 920 \\ -\ 13{,}785 & = & 13\frac{157}{200} & 3 & 471 \\ \hline & & 3\frac{449}{600} & & \frac{449}{600} \end{array}$$

Auch hier ist die Verwandlung der Bruchzahlen in Dezimalzahlen in der Regel das kürzere Verfahren. Zu demselben Ergebnisse gelangt man für Multiplikation und Division, wie die folgenden Beispiele zeigen.

c) $5\frac{3}{4} \,.\, 0{,}79 = 5{,}75 \,.\, 0{,}79$

4025

$\,.\,5175$

$\underline{\underline{4{,}5425}}$;

oder $5\frac{3}{4} \,.\, 0{,}79 = \dfrac{23 \,.\, 79}{4 \,.\, 100}$

$= 1817 : 400 = 4\frac{217}{400}$.

d) $16{,}48 : 3\frac{4}{9} = ?$

$16{,}48 : 3{,}44 =$

$1648 : 344 = \underline{\underline{4{,}79}}$;

2720

3120

24

oder: $16\frac{12}{25} : 3\frac{4}{9} = \frac{412}{25} : \frac{31}{9} = \dfrac{412 \,.\, 9}{25 \,.\, 31}$

$= 3708 : 775 = \underline{\underline{4\frac{608}{775}}}$

3100

608

V. Sortenverwandlungen. Doppelbruchzahlen.

Beispiele:

a) $\frac{3}{5}$ T $= 24$ Std $.\, \frac{3}{5} = 14\frac{2}{5}$ Std

$\frac{2}{5}$ Std $= 60$ Min $.\, \frac{2}{5} = 24$ Min

$\frac{3}{5}$ T $= 14$ Std 24 Min.

b) $7\frac{1}{2}$ Min $= 7\frac{1}{2}$ Std $: 60$

$= \frac{15}{120}$ Std $= \frac{1}{8}$ Std.

c) $\dfrac{\frac{2}{3}}{8} = \frac{2}{3} : 8 = \frac{1}{12}$; $\dfrac{4}{\frac{3}{5}} = 4 : \frac{3}{5} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$;

$\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \dfrac{2 \,.\, 5}{3 \,.\, 3} = 1\frac{1}{9}$ u. s. w.

Derartige Sortenverwandlungen und Doppelbruchzahlen können in der Schlußrechnung nicht selten mit Vorteil verwendet werden.

VI. Quadrat- und Kubikwurzelausziehung.

Hier kommen zwei besondere Fälle aus der Lehre von den Potenzen und Wurzeln in Betracht, welche Anwendung in der Flächen- und Körperrechnung finden. Um nicht (was hier wieder mehr als anderwärts möglich ist) in toten Mechanismus zu geraten, hat der Ausziehung der Wurzeln die klare Einsicht in die Bildung der Quadrat- beziehentlich Kubikzahlen vorauszugehen. Die Quadrate und Kuben der Grundzahlen muß der Schüler seinem Gedächtnisse fest einprägen. Zu unterscheiden ist zwischen ganzen Zahlen, Dezimal- und Bruchzahlen.

Die Ausführung von Beispielen unterbleibt hier, da einerseits jedes Lehrbuch der Arithmetik, anderseits aber auch unser Rechenbuch selbst alles, was nötig ist, bietet.[27])

Wie die Anzahl der Dezimalstellen für Quadrate stets eine gerade sein muß, so für Kuben eine durch drei teilbare, denn aus Zehnteln entstehen durch Kubieren Tausendstel, aus Hundertsteln Millionstel u. s. w. Entsprechend zerfällt der Kubus ganzer Zahlen in Gruppen zu je drei Stellen von rechts nach links, die durch Teilstriche angedeutet werden u. s. w.

Als Operationszeichen dienen: a) beim Quadrieren und Kubieren die rechts oben neben die Grundzahl gesetzten Exponenten 2 bez. 3; b) beim Wurzelziehen das aus dem r (radix = Wurzel) entstandene Wurzelzeichen $\sqrt{}$ ohne oder mit (bei der Kubikwurzel) darüber stehendem Exponenten.

27) Vergl. Heft 6 (Ausg. A). Anhang.

B. Ergänzungen des praktischen Rechnens.

Den Ausgangspunkt des praktischen Rechnens bildet, wie schon wiederholt bemerkt wurde, die Schlußrechnung. Nachdem dieselbe aber bereits im fünften Schuljahre in Beispielen mit ganzen Zahlen und im sechsten Schuljahre in Beispielen mit Dezimal- und Bruchzahlen Berücksichtigung gefunden hat, fällt dem siebenten und achten Schuljahre die Aufgabe zu, sie im Zusammenhange zu behandeln. Als eine besondere Art der Schlußrechnung tritt dabei die Prozentrechnung auf, während Zinsrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung, Rabatt-, Diskontorechnung u. s. w. nur Unterabteilungen der Prozentrechnung sind. Die Namen Gesellschaftsrechnung, Mischungsrechnung u. dgl. m. bezeichnen in der Hauptsache auch nichts weiter als besondere Fälle der Schlußrechnung.

I. Die Schlußrechnung im Zusammenhange.

Wir haben bis jetzt drei Aufgabengruppen unterschieden: a) Aufgaben, bei denen von der Einheit auf eine Mehrheit, b) Aufgaben, bei denen von einer Mehrheit auf die Einheit, c) Aufgaben, bei denen von einer Mehrheit auf eine andere (über die Einheit) zu schließen ist. Diese Einteilung kann beibehalten werden. Die dritte Gruppe läßt aber einige bemerkenswerte besondere Fälle zu: a) die zweite Mehrheit ist ein Vielfaches der ersten; b) die zweite Mehrheit ist ein Teil der ersten; c) die zweite Mehrheit ist durch einen gemeinschaftlichen Faktor mit der ersten verwandt. Diese drei Gruppen laufen, wie man sofort bemerkt, den drei ersten parallel; der Unterschied ist aber der, daß an Stelle der Einheit eine andere Zahl, eine Vielheit, tritt. Wenn nun aber auch durch diese Einteilung alle Aufgaben untergebracht werden können, so empfiehlt es sich doch, daneben noch zwischen ganzen, dezimalen und gebrochenen Zahlen zu unterscheiden, da gerade diese Unterscheidung eine Reihe von Rechenfällen bringt, welche den Fortschritt vom Leichten zum Schweren vorteilhaft vermitteln. Bezeichnet nämlich a eine beliebige ganze, b eine dezimale und c eine gebrochene Zahl, dann können in den drei Gliedern der Schlußrechnung (abgesehen von einer Mischung der dezimalen und gebrochenen Zahlen) auftreten:

I. $a_1 \quad a_2 \quad a_3$

II.	b_1	a_2	a_3	III.	c_1	a_2	a_3
	a_1	b_2	a_3		a_1	c_2	a_3
	a_1	a_2	b_3		a_1	a_2	c_3
	b_1	b_2	a_3		c_1	c_2	a_3
	b_1	a_2	b_3		c_1	a_2	c_3
	a_1	b_2	b_3		a_1	c_2	c_3
	b_1	b_2	b_3		c_1	c_2	c_3

Weil der Schluß stets vom ersten auf das dritte Glied führt, so sind die Aufgaben insbesondere nach diesen beiden Gliedern zu beurteilen. Insofern zeigt also der zweite Fall unter II, also $a_1 \; b_2 \; a_3$, ebenso der zweite Fall unter III, also $a_1 \; c_2 \; a_3$, nichts Neues, denn es wird in beiden von einer ganzen auf eine andere ganze Zahl geschlossen.

Dagegen bringt jeder der übrigen Fälle Beachtenswertes. Von diesen Fällen sind einander ähnlich der je erste und vierte und der je dritte und sechste. Denn jene haben im ersten Gliede eine Dezimal- oder Bruchzahl und im dritten Gliede eine ganze Zahl aufzuweisen; bei diesen ist es umgekehrt. Als die schwierigsten Fälle erscheinen der je fünfte und siebente, weil hier im ersten und dritten Gliede einerseits Dezimalzahlen, anderseits Bruchzahlen vorkommen. Nach dem Gesagten lassen sich schließlich, vom zweiten Gliede abgesehen, auf jeder Seite drei Hauptfälle unterscheiden: a) Schluß von einer Dezimal- oder Bruchzahl auf eine ganze Zahl; b) Schluß von einer ganzen Zahl auf eine Dezimal- oder Bruchzahl; c) Schluß von einer Dezimal- oder Bruchzahl auf eine andere Dezimal- oder Bruchzahl.

Hierzu noch folgendes. Sobald sich die Rechenschüler in den Schlußfolgerungen sicher genug zeigen, empfiehlt es sich, die ausführlichen Darstellungen des fünften und sechsten Schuljahres aufzugeben. Das kann wie folgt geschehen. Zuerst kommt die schriftliche Darstellung der Schlüsse in Wegfall, da sie in der „Ausrechnung", wenn auch in etwas anderer Form wiederkehrt. Später kann auch noch der erste Ansatz wegbleiben, sodaß ein unmittelbarer Übergang von der Aufgabe zur Ausrechnung stattfindet. Am deutlichsten tritt der Unterschied zwischen der ausführlichen und kurzen Darstellung in den Lösungen der Aufgaben mit Bruchzahlen in sämtlichen Gliedern hervor. Hierzu ein Beispiel.

Aufgabe: Ein Rad macht in $7\frac{1}{2}$ Min $42\frac{3}{4}$ Umläufe; wieviele Umläufe kommen auf $8\frac{1}{3}$ Min? Auflösung:

Ausführliche Darstellung.

a) Ansatz.

$7\frac{1}{2}$ Min $42\frac{3}{4}$ Uml.
$8\frac{1}{3}$ „ x

b) Schlüsse.

$\frac{15}{2}$ Min $\frac{171}{4}$ Uml.

$\frac{1}{2}$ „ $\frac{171 \text{ Uml.}}{4 \cdot 15}$

1 „ $\frac{171 \text{ U.} \cdot 2}{4 \cdot 15}$

$\frac{1}{3}$ „ $\frac{171 \text{ U.} \cdot 2}{4 \cdot 15 \cdot 3}$

$\frac{25}{3}$ „ $\frac{171 \text{ U.} \cdot 2 \cdot 25}{4 \cdot 15 \cdot 3}$

c) Ausrechnung.

$$\frac{\overset{19}{\cancel{171}} \text{ U.} \cdot \cancel{2} \cdot \overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot \underset{\cancel{3}}{\cancel{15}} \cdot \cancel{3}}$$

$= 95$ U. : $2 = 47\frac{1}{2}$ Uml.

d) Zusammenfassung (mündlich): Wenn ein Rad in $7\frac{1}{2}$ Min $42\frac{3}{4}$ Uml. macht, dann kommen auf $8\frac{1}{3}$ Min $47\frac{1}{2}$ Umläufe.

Kurze Darstellung.

a) Ansatz.

$7\frac{1}{2}$ Min $42\frac{3}{4}$ Uml.
$8\frac{1}{3}$ „ x

b) Ausrechnung.

$$\frac{42\frac{3}{4} \text{ U.} \cdot 8\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}} = \frac{171 \text{ U.} \cdot 2 \cdot 25}{4 \cdot 15 \cdot 3} \text{ u. s. w.}$$

Zu sprechen: In $7\frac{1}{2}$ Min $42\frac{3}{4}$ Umläufe (geschrieben!), in 1 Min $42\frac{3}{4}$ Uml. durch $7\frac{1}{2}$ (geschrieben!), in $8\frac{1}{3}$ Min dieses mal $8\frac{1}{3}$ (geschrieben!).

Dabei ist noch zu merken: Im Ausrechnungsansatze beginnt stets das zweite Glied, also das Glied, welches dieselbe Benennung wie das gesuchte (vierte) Glied hat. Nur dieses Glied darf seine Benennung im Ausrechnungsansatze beibehalten; es ist aber auch durchaus falsch, diese Benennung wegzulassen, wie es häufig geschieht.

In den nachfolgenden Beispielen wird von der kurzen Darstellungsform Gebrauch gemacht. Die Beispiele selbst werden sich auf solche Fälle beschränken, in denen Dezimal- und Bruchzahlen vorkommen.

a) Schluß von einer Dezimal- oder Bruchzahl auf eine ganze Zahl.

1. Aufgabe. Wieviel alte sächsische Ellen sind 4 m? (1000 Ellen = 566,38 m).[28]

$$\begin{array}{rcl} 566{,}38 \text{ m} & = & 1000 \text{ Ell.} \\ 4 \;\;\text{„} & = & x \end{array}$$

$$\frac{1000 \text{ Ell.} \cdot 100 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{28319}{\cancel{56638}}} = 200000 : 28319 = \underline{\underline{7{,}06 \text{ Ell.}}}$$

$$\begin{array}{r} 198233 \\ \hline 176700 \\ 169914 \\ \hline 6786 \end{array}$$

2. Aufgabe. Ein Eisenbahnzug fährt in $3\frac{1}{4}$ Std von Leipzig nach Dresden; wieviel Kilometer legt er durchschnittlich in 1 Std zurück, da die ganze Strecke 115,1 km beträgt?

$$\begin{array}{ll} 3\frac{1}{4} \text{ Std} & 115{,}1 \text{ km} \\ 1 \;\;\text{„} & x \end{array}$$

$$\frac{115{,}1 \text{ km} \cdot 1 \cdot 4}{\cancel{3\frac{1}{4}}\; 13} = 460{,}4 \text{ km} : 13 = \underline{\underline{35{,}4 \text{ km}}}$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ \hline 54 \end{array}$$

b) Schluß von einer ganzen Zahl auf eine Dezimal- oder Bruchzahl.

3. Aufgabe. Am 1. März 1888 wurden an der Leipziger Börse für 100 österr. Gulden 160,75 ℳ bezahlt; wieviel ist hiernach für eine Rechnung von 23,75 österr. Gulden zu bezahlen?

$$\begin{array}{rcl} 100 \text{ fl.} & = & 160{,}75 \text{ ℳ} \\ 23{,}75 \;\text{„} & = & x \end{array}$$

$$\frac{160{,}75 \text{ ℳ} \cdot \overset{0{,}95}{\cancel{23{,}75}}}{\underset{4}{\cancel{100}}} = 38{,}18 \text{ ℳ}$$

$$\begin{array}{r} 160{,}75 \cdot 0{,}95 \\ \hline 144675 \\ 80375 \\ \hline 152{,}7125 : 4 = 38{,}18 \text{ ℳ} \end{array}$$

4. Aufgabe. War es richtig, wenn für $5\frac{3}{4}$ sächs. Ellen 3,25 m gesetzt wurden?

$$\begin{array}{rcl} 1000 \text{ Ell.} & = & 566{,}38 \text{ m} \\ 5\frac{3}{4} \;\;\text{„} & = & x \end{array}$$

$$\frac{\overset{283{,}19}{\cancel{566{,}38}} \text{ m} \cdot \cancel{5\frac{3}{4}}\; 23}{1000 \cdot \cancel{4}\; 2} = 6513{,}37 : 2000 = \underline{\underline{3{,}25 \text{ m}}}$$

$$\begin{array}{r} 5133 \\ \hline 11337 \\ \hline 1337 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 283{,}19 \cdot 23 \\ \hline 56638 \\ 84957 \\ \hline 6513{,}37 \end{array}$$

Es war also richtig!

---

28) Im Verkehre rechnet man 4 m = 7 Ell.

c) **Schluß von einer Dezimal- oder Bruchzahl auf eine Dezimal- oder Bruchzahl.**

5. Aufgabe. Auf der Skala älterer Barometer sind gewöhnlich pariser Zoll und Linien angegeben, während die heutigen Barometerangaben in Millimeter erfolgen. Wenn nun Deutschlands höchste Stadt (Oberwiesenthal) einen mittleren Barometerstand von 681,33 mm hat, wieviel pariser Zoll und Linien sind das? (12 par. Zoll = 324,839 mm; 1 Zoll = 12 Linien.)

324,839 mm = 144 par. Linien
681,33 " = x

$$\frac{144 \text{ par. L.} \cdot 681{,}33}{324{,}839} = 302 \text{ par. L. oder } \underline{\underline{25 \text{ Z. } 2 \text{ L. par.}}}$$

681,33 . 144
68133
272532
272532
98111,52 : 324,839
98111520 : 324839 = 302 L. = 25 Z. 2 L.
974517
659820
649678
10142

6. Aufgabe. Ein Ölvorrat reichte den Monat Januar hindurch bei einer täglichen Brennzeit von $6\frac{2}{3}$ Std; wie lange reicht ein gleicher Vorrat, wenn die Brennzeit weiterhin nur $4\frac{1}{2}$ Std beträgt?

$6\frac{2}{3}$ Std 31 T
$4\frac{1}{2}$ " x

$$\frac{31 \text{ T} \cdot \overset{20}{\cancel{6\frac{2}{3}}} \cdot 2}{\underset{9}{\cancel{4\frac{1}{2}}} \cdot 3} = 1240 \text{ T} : 27 = \underline{\underline{45\tfrac{25}{27} \text{ T } (46 \text{ T}).}}$$

160
25

7. Aufgabe. Welche Strecke legt ein Eisenbahnzug bei gleichförmiger Bewegung in $9\frac{3}{5}$ Std zurück, wenn er zu 115,125 km $3\frac{1}{3}$ Std braucht?

$3\frac{1}{3}$ Std 115,125 km
$9\frac{3}{5}$ " x

$$\frac{\overset{\overset{4{,}605}{\cancel{23{,}025}}}{\cancel{115{,}125}} \text{ km} \cdot \overset{\overset{24}{\cancel{48}}}{\cancel{9\frac{3}{5}}} \cdot 3}{\cancel{3\frac{1}{3}} \cdot \cancel{5}} = \underline{\underline{331{,}560 \text{ km}}}$$

$\cancel{10}$ 1
$\cancel{2}$

4,605 . 72
32235
9210
331,560

Neben dem Normalverfahren, worunter die Lösungen mit dem Schlusse über die Einheit zu verstehen sind, giebt es noch mehrere besondere Lösungsarten, welche Beachtung verdienen. Die eine Gruppe ist oben bereits erwähnt worden. Es werden in derselben Aufgaben behandelt,

deren erstes und drittes Glied einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen. Auf diesen Faktor schließt man, wie man beim Normalverfahren auf die Einheit schließt. Der einfachste Fall ist der, daß das eine Glied im andern vollständig aufgeht. Es kann sich aber bei solchen Aufgaben selbstredend nur dann ein Vorteil ergeben, wenn die Verwandtschaft der Zahlen sofort erkannt wird; denn erst auf diese Verwandtschaft prüfen wollen, wäre gewiß meist umständlicher als sofort über die Einheit zu schließen. So kann denn auch der Wert des Verfahrens selbst nur ein beschränkter sein. Hierzu drei Beispiele:

a) Die zweite Mehrheit ist ein Vielfaches der ersten.

8. Aufgabe. Auf 25 kg Brutto betrug die Tara 3 kg; wieviel wird sie auf 100 kg betragen?

25 kg Br.	3 kg Tara.	‖	3 kg . 4 = 12 kg
100 „	x	‖	

b) Die erste Mehrheit ist ein Vielfaches der zweiten.

9. Aufgabe. 100 kg Kaffee verlieren durch Brennen 23 kg; wieviel wiegen also 12,500 kg nach dem Brennen noch?

100 kg	77 kg	‖	$\frac{77\text{ kg}}{8} = \underline{\underline{9{,}625\text{ kg}}}$
12,500 „	x	‖	

c) Beide Mehrheiten besitzen einen gemeinschaftlichen Faktor.

10. Aufgabe. Von einem Stück Leinwand, 32 m haltend, welches 23,04 ℳ gekostet hat, werden werden 12 m abgegeben; wieviel ist dafür zu bezahlen?

32 m	23,04 ℳ	‖	$\frac{23{,}04\text{ ℳ} \cdot 3}{8} = 69{,}12\text{ ℳ} : 8 = \underline{\underline{8{,}64\text{ ℳ}}}$
12 „	x	‖	51
			32

Wertvoller als das vorstehende erscheint das als „Welsche Praktik" bezeichnete Verfahren, Aufgaben durch gewisse Zerlegungen der Zahlen zu lösen. Hierzu folgende Beispiele:

11. Aufgabe. C gab im Februar (28 T.) bei gleichen Tagesdurchschnitten 10,35 ℳ weniger aus als im Januar; wieviel betrugen seine Ausgaben in jedem der beiden Monate?

a) 3 T 10,35 ℳ
31 „ x

b) 3 T 10,35 ℳ
28 „ x

a)
30 T = 103,50 ℳ
+ 1 „ = 3,45 „
31 T = 106,95 ℳ (Januar).

b)
31 T = 106,95 ℳ
− 3 „ = 10,35 „
28 T = 96,60 ℳ (Februar).

12. Aufgabe. Wieviel wurde aus 35 Sch 2 Mdl 10 St Garben an Körnern gewonnen, wenn 1 Sch 3,18 hl gab?

1 Sch =	3,18 hl	
30 Sch =	95,40 hl	(Das 3 mal 10fache.)
5 „ =	15,90 „	(Das 5fache.)
2 Mdl =	1,59 „	(Der 2. Teil.)
10 St =	0,53 „	(Der 3. Teil vom 2. Teil.)
35 Sch 2 Mdl 10 St =	113,42 hl	

II. Prozentrechnung.

a) Berechnung von Kapitalzinsen.

1. Aufgabe. Wieviel betragen die jährlichen Zinsen von 735 ℳ zu $2\frac{2}{3}$ %?

100 ℳ $2\frac{2}{3}$ ℳ
735 „ x

a) $$\frac{\overset{2}{\cancel{8}}\ \cancel{2\tfrac{2}{3}}\ \mathcal{M} \cdot \overset{49}{\cancel{735}}\ \cancel{245}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{5}{\cancel{100}}\ \cancel{20}} = 98\ \mathcal{M} : 5 = 19{,}60\ \mathcal{M}$$
48
80

b) $2\frac{2}{3}$ ₰ . 735 =
1470
490
19,60 ℳ

Das Normalverfahren, welches sich eng an die Schlußrechnung anschließt, ist unter a), ein abgekürztes Verfahren unter b) gegeben. Letzteres geht davon aus, daß die Prozentzahl zugleich die Anzahl der Pfennige angiebt, welche eine Mark als Zinsen abwirft. Da dieses abgekürzte Verfahren überall anwendbar ist, so verdient es volle Beachtung.

2. Aufgabe. Berechne die Zinsen von 348 ℳ zu $3\frac{1}{2}$ % für 3 J 5 Mon!

100 ℳ 1 J $3\frac{1}{2}$ ℳ
348 „ $3\frac{5}{12}$ „ ?

a) $\frac{3\frac{1}{2}\ \mathcal{M}\ 348\ .\ 3\frac{5}{12}}{100}$ ꝛc. b) $3\frac{1}{2}$ ₰ . $3\frac{5}{12}$. 348 ꝛc.

3. Aufgabe. Berechne die Zinsen von 95 ℳ zu $3\frac{1}{3}$ % für 18 T!

100 ℳ 360 T $3\frac{1}{3}$ ℳ
95 „ 18 „ x

a) $\frac{3\frac{1}{3}\ \mathcal{M}\ 95\ .\ 18}{100\ .\ 360}$ ꝛc. b) $3\frac{1}{3}$ ₰ . 95 . $\frac{18}{360}$ ꝛc.

Es ergiebt sich aus diesen Beispielen, daß die Zinsberechnung stets auf Jahre zurückzugreifen hat: ganze Jahre oder Bruchteile des Jahres (1 Monat = $\frac{1}{12}$ J und 1 T = $\frac{1}{360}$ J). Die Anwendung der sogenannten Zinsdivisoren bei Berechnung der Zinsen auf Tage kann in der Volksschule vollständig unterbleiben. Die Kinder kommen mindestens ebenso schnell mit Hilfe der kurzen Darstellung unter b) zum Ziele.

b) Berechnung von Gewinn und Verlust.

4. Aufgabe. Wieviel Prozent beträgt der Gewinn bei 38,40 ℳ Verkaufspreis und 2,40 ℳ Gewinn?

36,00 ℳ gew. 2,40 ℳ
100 „ „ x

$$\frac{\overset{0{,}20}{\cancel{2{,}40}}\ \mathcal{M}\ .\ 100}{\underset{3}{\cancel{36}}} = 20 : 3 = 6\tfrac{2}{3}\ \%$$

5. Aufgabe. Wieviel beträgt der Verkaufspreis, wenn der Einkaufspreis 123,25 ℳ und der Verlust 8 % beträgt?

$$\begin{array}{lll} 100 & ℳ \text{ E.} & 92 \text{ ℳ V.} \\ 123{,}25 & " & x \end{array}$$

$$\frac{\overset{23}{\cancel{92}} \text{ ℳ} \cdot \overset{4{,}93}{\cancel{123{,}25}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{100}}} = \begin{array}{r} 23 \text{ ℳ} \cdot 4{,}93 \\ \hline 92 \\ 207 \\ 69 \\ \hline \underline{\underline{113{,}39 \text{ ℳ}}} \end{array}$$

c) Berechnung von Zu- und Abnahmen.

6. Aufgabe. Ein Kalkstein wog vor dem Brennen 3,250 kg, nach dem Brennen 1,690 kg; wieviel Prozent beträgt die Abnahme?

$$\begin{array}{llll} 3{,}250 \text{ kg} & \text{verl.} & 1{,}560 \text{ kg} \\ 100 \quad " & " & x \end{array}$$

$$\frac{1{,}56\cancel{0} \text{ kg } 100}{3{,}25\cancel{0}} = \begin{array}{l} 15600 : 325 = \underline{\underline{48 \%}} \\ 1300 \\ \hline 2600 \\ 2600 \\ \hline \end{array}$$

d) Berechnung von Bestandteilen.

7. Aufgabe. Das deutsche Schießpulver bestand früher aus 74,49 % Salpeter, 9,72 % Schwefel und 15,79 % Kohle; wieviel von jedem Stoffe war in 675 kg Pulver enthalten?

$$\begin{array}{llll} 100 \text{ kg} & \text{enth.} & 74{,}49 \text{ kg} & \text{Salpeter} \\ 675 \quad " & " & x & \end{array}$$

$$\frac{74{,}49 \text{ kg} \cdot 675}{100} \text{ ꝛc.}$$

Die Summe der drei Ergebnisse muß 675 kg betragen.

e) Berechnung von Abzügen (Rabatt).

8. Aufgabe. Eine Rechnung von 136,40 ℳ wird mit 125 ℳ bar bezahlt; wieviel Prozent betrug der Rabatt?

$$\begin{array}{lll} 136{,}40 \text{ ℳ} & 11{,}40 \text{ ℳ} & \text{Rabatt} \\ 100 \quad " & x & \end{array}$$

$$\frac{\overset{5{,}7}{\cancel{11{,}40}} \text{ ℳ} \cdot 100}{\underset{68{,}2}{\cancel{136{,}40}}} = \begin{array}{l} 5700 : 682 = \underline{\underline{8{,}36 \%}} \\ 2440 \\ 3940 \end{array} \text{(abgerundet).}$$

9. Aufgabe. Wieviel beträgt der gegenwärtige Wert von 960 ℳ zahlbar in 3 Monaten bei 4 % Diskont (auf Hundert)?

$$\begin{array}{llllll} \text{Für} & 101 \text{ ℳ} & \text{werden} & 100 \text{ ℳ} & \text{bezahlt} \\ " & 960 \quad " & " & x & " \end{array}$$

$$\frac{100 \text{ ℳ} \cdot 960}{101} = \begin{array}{l} 96000 : 101 = \underline{\underline{950{,}50 \text{ ℳ}}} \\ 510 \\ 500 \end{array} \text{(abgerundet).}$$

Für gewöhnlich wird nach Rabatt von Hundert gerechnet, obwohl das eigentlich falsch ist. Der Grund ist in der bequemern Rechnung zu suchen. Der Rabatt auf Hundert kommt wohl nur noch bei Käufen, Erbschaften ꝛc., die einer gerichtlichen Kontrolle unterliegen, vor. Die Bedeutung beider Ausdrücke aber ist diese: 4 % Rabatt von 100, d. h. für 100 ℳ werden 96 ℳ bezahlt; 4 % Rabatt auf 100, d. h. für 104 ℳ werden 100 ℳ bezahlt. Im kaufmännischen Verkehre unterscheidet man zwischen Rabatt im Warenhandel, der Skonto (Abkürzung von Diskonto) oder Dekort genannt wird, und Rabatt im Geldverkehre, der Diskont (Diskonto) heißt.

III. Ergänzungen zur Schlußrechnung.

a) Zusammengesetzte Schlußrechnung (Vielsatz).

1. Aufgabe. In einer Mühle wurden auf 5 Gängen in $7\frac{1}{2}$ Std 9 hl Weizen gemahlen; wieviel Zeit wird zu 6 hl bei 3 Gängen nötig sein?

Ansatz. 5 G. 9 hl $7\frac{1}{2}$ Std
3 „ 6 „ ?

Ausrechnung.
$$\frac{\overset{5\ \cancel{15}}{\cancel{7\frac{1}{2}}}\ \text{Std} \cdot 5 \cdot \cancel{6}\ \cancel{3}\ 1}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{3}{\cancel{9}}} = 25\ \text{Std} : 3 = \underline{\underline{8\tfrac{1}{3}\ \text{Std}}}$$

Zu sprechen: Wenn bei 5 G. $7\frac{1}{2}$ Stunden nötig sind, so sind bei 1 Gange $7\frac{1}{2}$ Stunden mal 5 und bei 3 Gängen $7\frac{1}{2}$ Stunden mal 5 durch 3 nötig; das gilt zunächst für 9 hl; für 1 hl braucht man davon den 9. Teil und für 6 hl diesen wieder mal 6.

b) Gesellschaftsrechnung (Verteilungs- oder Repartitionsrechnung).

So bezeichnet man diejenige Gruppe von Aufgaben, in denen irgend ein Ganzes nach bestimmten Verhältnissen zu teilen ist. Diese Verhältnisse sind entweder geometrische oder arithmetische. Das geometrische Verhältnis ist ein Teilverhältnis, das arithmetische ein Unterschiedsverhältnis. Sagt man z. B. 15 ist 3 mal so groß wie 5, so hat man das geometrische Verhältnis von 15 und 5 bestimmt; sagt man hingegen 15 ist um 10 größer als 5, so ist vom arithmetischen Verhältnisse beider Zahlen die Rede. Wird nichts hinzugefügt, so versteht man unter Verhältnis zweier Zahlen stets das geometrische.

2. Aufgabe. (Geometrisches Verhältnis.) A und B beziehen gemeinschaftlich eine Doppelladung böhmischer Braunkohlen, welche mit allen Nebenausgaben 118,80 ℳ kostet. Wieviel hat jeder zu zahlen, wenn A 3 und B 5 Fuhren erhält?

Anteile. $A = 3\,x$
$B = 5\,x$
$A + B = 8\,x$

Ansatz. $8\,x = 118{,}80$ ℳ
$3\,x = ?$
$5\,x = ?$

Ausrechnung.
$$A = \frac{118{,}80\ ℳ \cdot 3}{8} = 14{,}85\ ℳ \cdot 3 = 44{,}55\ ℳ$$
$$B = \frac{118{,}80\ ℳ \cdot 5}{8} = 14{,}85\ ℳ \cdot 5 = 74{,}25\ ℳ$$
$$A + B = 118{,}80\ ℳ$$

Kürzere Darstellung:

$$
\begin{array}{rcrcl}
 & A = & 3\,x & = & 44{,}55\ \mathcal{M} \\
 & B = & 5\,x & = & 74{,}25\ \text{„} \\
\hline
A + & B = & 8\,x & = & 118{,}80\ \mathcal{M} \\
 & & x & = & 14{,}85\ \mathcal{M}
\end{array}
$$

Bezüglich der kürzern Darstellung ist zu bemerken, daß zunächst x (d. h. ein Anteil) bestimmt werden muß, danach 3 x und 5 x. Es wird also das, was unter dem Striche steht, eher als das, was über dem Striche steht, berechnet. Die gute Anordnung ersetzt hier zugleich die Probe.

3. Aufgabe. (Arithmetisches Verhältnis.) Von zwei Sorten Zigarren, deren Preis zusammen 125 ℳ betrug, kostete die erste 34,50 ℳ mehr als die zweite. Wie teuer war jede Sorte?

$$
\begin{array}{rl}
 & 125{,}00\ \mathcal{M} \\
- & 34{,}50\ \text{„} \\
\hline
 & 90{,}50\ \mathcal{M} : 2 \\
\hline
 & 45{,}25\ \mathcal{M}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lr}
\text{Erste Sorte} & 45{,}25\ \mathcal{M} \\
 & +\ 34{,}50\ \text{„} \\
\hline
 & 79{,}75\ \mathcal{M} \\
\text{Zweite Sorte} & 45{,}25\ \text{„} \\
\hline
\text{Beide S.} & 125{,}00\ \mathcal{M}
\end{array}
$$

4. Aufgabe. (Gemischte Verhältnisse.) 1050 ℳ sollen so verteilt werden, daß A 1 Teil und 50 ℳ, B 2 Teile weniger 50 ℳ, C 3 Teile weniger 150 ℳ erhält; wieviel bekommt jeder?

$$
\begin{array}{rcl}
A = & 1\,x + 50\ \mathcal{M} & = 250\ \mathcal{M} \\
B = & 2\,x - 50\ \text{„} & = 350\ \text{„} \\
C = & 3\,x - 150\ \text{„} & = 450\ \text{„} \\
\hline
A + B + C = & 6\,x - 150\ \mathcal{M} & = 1050\ \mathcal{M} \\
 & 6\,x & = 1200\ \mathcal{M} \\
 & x & = 200\ \mathcal{M}
\end{array}
$$

c) Durchschnittsberechnungen.

5. Aufgabe. Wie teuer muß 1 kg einer Kaffeemischung verkauft werden, welche aus 15 kg zu 2,44 ℳ und 13 kg zu 2,32 ℳ besteht, wenn 25 % daran gewonnen werden sollen?

$$
\begin{array}{lcl}
15\ \text{kg zu}\ 2{,}44\ \mathcal{M} & = & 36{,}60\ \mathcal{M} \\
13\ \text{„}\ \text{„}\ 2{,}32\ \text{„} & = & 30{,}16\ \text{„} \\
\hline
28\ \text{kg} & = & 66{,}76\ \mathcal{M} \\
1\ \text{„} & = & 66{,}76\ \mathcal{M} : 28 = 2{,}38\ \mathcal{M} \\
 & & \quad 107 \qquad\qquad \text{(abgerundet).} \\
 & & \quad\ 236 \\
 & & \quad\ \ 12
\end{array}
$$

$$
\text{Verkauf mit 25 \% Gewinn} = \frac{2{,}38\ \mathcal{M} \cdot 5}{4} = \underline{\underline{2{,}99\ \mathcal{M}}}\ \text{(abger. 3 } \mathcal{M}\text{)}
$$

d) Mischungs- (Alligations-) Rechnung.

6. Aufgabe. Ein Kaufmann will aus Kaffee zu 2,10 ℳ und 2,80 ℳ das Kilogramm eine Mischung zu 2,50 ℳ herstellen; wieviel (ganze) Kilogramm kann er von jeder Sorte verwenden?

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Bessere Sorte} & = & 2{,}80\ \mathcal{M} \\
\text{Mischung} & = & 2{,}50\ \text{„} \\
\hline
\text{Verlust} & = & 0{,}30\ \mathcal{M}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lcl}
\text{Mischung} & = & 2{,}50\ \mathcal{M} \\
\text{Geringere Sorte} & = & 2{,}10\ \text{„} \\
\hline
\text{Gewinn} & = & 0{,}40\ \mathcal{M}
\end{array}
$$

Gewinn und Verlust müssen sich ausgleichen; deshalb ist auf 1 kg der bessern Sorte (30 ₰ Verl.) $\frac{3}{4}$ kg der geringern Sorte (40 ₰ . $\frac{3}{4}$ = 30 ₰ Gewinn) zu nehmen, oder in ganzen Kilogramm: auf 4 kg der bessern Sorte 3 kg der geringern Sorte.

Probe:	4 kg	zu 2,80 ℳ	=	11,20 ℳ	
	3 „	zu 2,10 „	=	6,30 „	
	7 kg	zu 2,50 ℳ	=	17,50 ℳ	

Kurze Darstellung:

			10		
1. Sorte	2,80 ℳ	— 0,30 ℳ	40	4 x	(Anteile, hier
Mischung	2,50 „				also ganze
2. Sorte	2,10 „	+ 0,40 ℳ	30	3 x	Kilogramm.)

7. Aufgabe. Ein Wasserbehälter wird durch zwei Röhren gespeist; die Röhre x füllt ihn in 2 Stunden, die Röhre y in 3 Stunden. In welcher Zeit füllen ihn beide Röhren zusammen?

Röhre x in 1 Std = $\frac{1}{2}$ Behälter
„ y „ 1 Std = $\frac{1}{3}$ „
x + y in 1 Std = $\frac{5}{6}$ Behälter.

$\frac{5}{6}$ Beh. 1 Std
1 „ x

$$\frac{1 \text{ Std } 6}{5} = \underline{\underline{1\tfrac{1}{5}\text{ Std.}}}$$

IV. Ergänzungen zur Prozentrechnung.

A. Die vier Fälle der Zinsrechnung.

Bei den Aufgaben der Zinsrechnung handelt es sich um vier Größen: **Kapital, Zinsfuß (Prozent), Zeit und Zinsen.** Gewöhnlich sind die drei ersten Größen gegeben und die vierte wird gesucht. Das ist der Fall, der oben bereits behandelt wurde. Sind die Volksschüler imstande, die dazu gehörigen Aufgaben sicher und geläufig zu lösen, so haben sie das gelernt, was nötig ist. Denn die übrigen drei Fälle kommen im gewöhnlichen Verkehre des praktischen Lebens nur selten oder gar nicht vor. Allerdings möchte es den Anschein gewinnen, als sei das anders, denn viele Rechenbücher ꝛc. behandeln die vier Fälle als nahezu gleichwertige. Wir verweisen jedenfalls mit größerm Rechte die übrigen drei Aufgabengruppen in das Gebiet des Nützlichen und nicht des Nötigen.

Bezeichnet man das Kapital durch K, den Zinsfuß (Prozent) durch P, die Zeit mit Z und die Zinsen (Interessen) durch I, so lassen sich die vier Fälle der Zinsrechnung kurz so wiedergeben:

Gegeben	K P Z	gesucht	I
„	P Z I	„	K
„	K Z I	„	P
„	K P I	„	Z

Die Regeln aber, nach denen die vierte Größe gefunden wird, kann man mit Hilfe dieser vier Buchstaben wie folgt ausdrücken:

$$I = \frac{P\,.\,K\,.\,Z}{100};\quad K = \frac{100\,.\,I}{P\,.\,Z};\quad P = \frac{100\,.\,I}{K\,.\,Z};$$

$$Z = \frac{100\,.\,I}{K\,.\,P}$$

Hierzu folgende Beispiele: [29])

a) Das Kapital wird gesucht.

1. Aufgabe. Welches Kapital bringt 216 ℳ Zinsen in $2\frac{1}{4}$ J zu 6%?

$$\begin{array}{l} 6\ \mathcal{M}\ \ 1\ \ \text{J}\ \ 100\ \mathcal{M} \\ 216\ „\ \ 2\frac{1}{4}\ „\ \ \ x \end{array} \Bigg\| \quad \frac{100\,\mathcal{M}\,.\,\overset{24\ 4}{\cancel{216}}\,.\,4}{\underset{1}{\cancel{6}}\,.\,\underset{1}{\cancel{9}}} = \underline{\underline{1600\ \mathcal{M}}}$$

b) Der Zinsfuß wird gesucht.

2. Aufgabe. Zu welchem Zinsfuße brachten 2400 ℳ vom 9. Januar 1885 bis 24. Mai 1886 181,50 ℳ Zinsen?

$$\begin{array}{r} 1885\ \text{J}\ \ 4\ \text{Mon}\ \ 23\ \text{T} \\ -\ 1884\ „\ \ 0\ \ „\ \ \ \ 8\ „ \\ \hline 1\ \text{J}\ \ 4\ \text{Mon}\ \ 15\ \text{T} \end{array} = 1\ \text{J}\ 4\frac{1}{2}\ \text{Mon} = 1\frac{3}{8}\ \text{J}$$

$$\begin{array}{l} 2400\ \mathcal{M}\ \ 1\frac{3}{8}\ \text{J}\ \ 181{,}50\ \mathcal{M}\ \ \text{Z.} \\ \ \ 100\ „\ \ \ 1\ \ „\ \ \ \ x \\ \hline \end{array} \Bigg\| \quad \frac{\overset{16{,}50}{\cancel{181{,}50}}\,\mathcal{M}\,.\,\cancel{100}\,.\,\cancel{8}}{\underset{300}{\cancel{2400}}\,.\,\cancel{11}} = \underline{\underline{5\frac{1}{2}\,\%}}$$

c) Die Zeit wird gesucht.

3. Aufgabe. Wie lange müssen 450 ℳ zu $3\frac{1}{2}$% stehen, damit die Zinsen dem Kapital gleich werden?

$$\begin{array}{l} 100\ \mathcal{M}\ \ \ 3\frac{1}{2}\ \mathcal{M}\ \ \text{Z}\ \ 1\ \text{J} \\ 450\ „\ \ 450\ \ „\ \ \ \ \ x \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1\ \text{J}\ \ 100\,.\,2\,.\,\overset{1}{\cancel{450}}}{\underset{1}{\cancel{450}}\,.\,7} = 200\ \text{J} : 7 = \underline{\underline{28\frac{4}{7}\ \text{J}}}\ \text{oder}\ \underline{\underline{28\ \text{J}\ 6\ \text{Mon}\ 26\ \text{T}}}$$

Nicht ohne praktische Bedeutung ist der Fall, dessen die nachfolgende Aufgabe gedenkt, nämlich die Verschmelzung von Kapital und Zinsen bei der Rückzahlung.

d) Kapital und Zinsen werden gesucht.

4. Aufgabe. Wieviel ist mit den Zinsen zusammen zurückzuzahlen, wenn 364 ℳ zu $6\frac{2}{3}$% auf 36 T geliehen worden sind?

$$\begin{array}{l} 100\ \mathcal{M}\ \ 36\ \text{T}\ \ 100\frac{2}{3}\ \mathcal{M} \\ 364\ „\ \ \ 36\ „\ \ \ \ x \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{\overset{302}{\cancel{100\frac{2}{3}}}\,\mathcal{M}\ \ \overset{91}{\cancel{364}}}{3\ \ .\ \ \underset{25}{\cancel{100}}} = \begin{array}{l} 27482\ \mathcal{M} : 75 \\ \ \ \ 498 \\ \ \ \ \ 482 \\ \ \ \ \ \ 320 \\ \ \ \ \ \ \ 200 \end{array} = \begin{array}{c} \underline{\underline{366{,}43\ \mathcal{M}}} \\ \text{(abgerundet).} \end{array}$$

---

[29]) Zu dem ersten Falle sind S. 443 bereits drei Beispiele gegeben worden.

B. Zinseszinsrechnung.

Schließlich kommt noch der z. B. bei Sparkassen häufig eintretende Fall in Betracht, daß die Zinsen zum Kapital geschrieben werden, um vom nächsten Jahre ab selbst Zinsen zu tragen. Da hierbei Zinsen von Zinsen, die man auch Zinseszinsen nennen kann, erzielt werden, so bezeichnet man die bezügliche Berechnung als Zinseszinsrechnung. Die Möglichkeit, diese Berechnung ohne besondere Hilfsmittel anzustellen, liegt zwar vor, doch benutzt man, um das zeitraubende Rechengeschäft abzukürzen, gewöhnlich Tabellen. Eine solche Tabelle enthält auch unser Rechenbuch.[30]) Wir lassen zunächst eine Aufgabe folgen, welche ohne Benutzung der Tabelle zu lösen ist, und geben dazu außer dem gewöhnlichen (weitläufigen) noch ein empfehlenswertes abgekürztes Verfahren.

5. Aufgabe. Wie groß wird ein Kapital von 100 ℳ zu 4% durch Zinseszins in 3 Jahren?

a) Gewöhnliches Verfahren.		b) Abgekürztes Verfahren.[31])
Anfangskapital	= 100 ℳ	100 ℳ . 1,04 . 1,04 . 1,04
Zinsen des 1. Jahres	= 4 „	= 112,4864 ℳ
Kapital am Ende des 1. J.	= 104,00 ℳ	
Zinsen des 2. J.	= 4,16 „	
Kapital am Ende des 2. J.	= 108,16 ℳ	
Zinsen des 3. J.	= 4,33 „	
Kapital am Ende des 3. J.	= 112,49 ℳ	

Dazu eine Aufgabe, welche mit Hilfe der Tabelle zu lösen ist:

6. Aufgabe. Berechne mit Hilfe der Zinseszinstabelle den Wert, welchen 850 ℳ zu 3% nach 3 J erreichen!

100 ℳ n. 3 J 109,2727 ℳ
850 „ „ „ „ x

109,2727 ℳ . 8,50 ℳ
8741816
54636350
928,817950 ℳ
= 928,82 ℳ

Im Versicherungswesen insbesondere ist es üblich, Beträge auf die feste Zahl 1000 zu beziehen. Das giebt die sogenannte Promillerechnung, deren unser Rechenbuch auch gedenkt. Ausgeführte Beispiele dazu geben wir hier nicht, weil sich das Verfahren demjenigen der Prozentrechnung eng anschließt und weil in dem betreffenden Lehrerhefte alle etwa noch in Betracht kommenden Einzelheiten Berücksichtigung gefunden haben.

30) Rechenbuch Heft 6 (Ausg. A).

31) Dasselbe beruht auf einer wiederholten Anwendung des Schlußverfahrens. Nach einem Jahre betragen Kapital und Zinsen zusammen 100 ℳ . 1,04 = 104 ℳ. Davon wächst jede Mark im zweiten Jahre auf 1,04 ℳ an, man erhält also nach zwei Jahren an Kapital und Zinsen zusammen 100 ℳ . 1,04 . 1,04. Hiervon wächst abermals nach einem Jahre jede Mark auf 1,04 ℳ an, man erhält also nach drei Jahren an Kapital und Zinsen zusammen 100 ℳ . 1,04 . 1,04 . 1,04 2c.

V. Sonstige Ergänzungen.

Diese schließen sich verschiedenen Sachgebieten an. Als besonders bemerkenswert sind hervorzuheben: a) Die ausländischen Münzen, Maße und Gewichte. b) Die Reichs-Versicherungsgesetze. Für uns handelt es sich auch dabei überall in erster Linie um die rechnerische Durcharbeitung der zugehörigen Stoffe. Da nun in den genannten beiden Gebieten rechnerisch Neues nicht auftritt, so liegt auch keine Veranlassung vor, an dieser Stelle näher darauf einzugehen. Wir verweisen die Behandlung der einschlägigen Aufgaben also besser in die zugehörigen Lehrerhefte und machen nur noch darauf aufmerksam, daß es zu den unter b) erwähnten Sachgebieten zahlreiche Sonderschriften (Aufgabenhefte, Anweisungen ꝛc.) giebt.[32] Empfohlen werden können:

Gebhard und Geibel, Führer durch das Gesetz, betreffend die Invaliditäts- und Altersversicherung. Altenburg 1893. Stenglein, W. Das Reichsgesetz betr. die Invaliditäts- und Altersversicherung. Berlin 1891. Wolff, J. J. Wegweiser für den Lehrer durch die Arbeiterversicherung ꝛc. Osnabrück 1893. Hoffmann, H. W. Praktische Aufgaben aus der Invaliditäts- und Altersversicherung. Düsseldorf 1891. Schneider, K. 200 Aufgaben aus dem Gebiete der Kranken-, Unfall- und Altersversicherung. Leipzig 1891. Schäffer und Weidenhammer, Aufgaben betreffend die Arbeiter-Versicherungen. Berlin 1892. (Auflösungen dazu besonders.) Heinze und Hübner, Einführung in die Kranken-, Unfall-, Invaliditäts- und Altersversicherung. Breslau 1892 u. a. m.

32) Vergl. auch Ausgabe C des Rechenbuchs, Heft 6, und das zugehörige Lehrerheft.